VIDYA

VIDYA, v. 44, n. 1, p. 97-113, jan./jun. - Santa Maria, 2024.

Recebido em: 06.10.2023. Aprovado em: 21.12.2023.
ISSN 2176-4603 | DOI: doi.org/10.37781/vidya.v44i1.4703

SOBRE LOS MODOS DE PENSAR EN ÁLGEBRA LINEAL Y EL PENSAMIENTO VECTORIAL

SOBRE MANEIRAS DE PENSAR EM ÁLGEBRA LINEAR E PENSAMENTO VETORIAL

ON WAYS OF THINKING IN LINEAR ALGEBRA AND VECTORIAL THINKING

OSCAR ANDRES GALINDO RIVERA[1]

RESUMEN

La presente investigación tiene como propósito mostrar un contraste y una posible generalización de los modos de pensar en Álgebra Lineal de Anna Sierpinska (2000) con relación al Pensamiento Vectorial y sus rúbricas de caracterización, las cuales fueron introducidas como aporte teórico de la tesis doctoral del autor de la presente investigación. Se propusieron un conjunto de actividades con problemas retadores y no rutinarios a estudiantes de ingenierías de la Universidad Antonio Nariño, donde se logró evidenciar un tipo especial de pensamiento matemático que permitió robustecer los modos de pensar en Álgebra Lineal y favoreció la construcción de significado de los conceptos propios del curso de Cálculo Multivariado y Álgebra Lineal.

Palabras clave: Pensamiento Matemático, Pensamiento Vectorial, Modos de Pensar, Cálculo Vectorial, Álgebra Lineal.

RESUMO

O objetivo desta pesquisa é mostrar um contraste e uma possível generalização dos modos de pensar em Álgebra Linear de Anna Sierpinska (2000) em relação ao Pensamento Vetorial e suas rubricas de caracterização, que foram introduzidas como contribuição teórica à tese de doutorado de o autor desta pesquisa. Um conjunto de atividades com problemas desafiadores e não rotineiros foi proposto aos estudantes de engenharia da Universidade Antonio Nariño, onde foi possível demonstrar um tipo especial de pensamento matemático que permitiu fortalecer as formas de pensar em Álgebra Linear e favoreceu a construção de significado dos conceitos da disciplina de Cálculo Multivariado e Álgebra Linear.

Palavras-chave: *Pensamento Matemático, Pensamento Vetorial, Formas de Pensar, Cálculo Vetorial, Álgebra Linear.*

ABSTRACT

The purpose of this research is to show a contrast and a possible generalization of the ways of thinking in Linear Algebra of Anna Sierpinska (2000) in relation to Vector Thinking and its characterization rubrics, which were introduced as a theoretical contribution to the doctoral thesis of the author of this research. A set of activities with challenging and non-routine problems was proposed to engineering students from the Antonio Nariño University, where it was possible to demonstrate a special type of mathematical thinking that allowed strengthening the ways of thinking in Linear Algebra and favored the construction of meaning of the concepts from the Multivariate Calculus and Linear Algebra course.

Keywords: *Mathematical Thinking, Vectorial Thinking, Ways of Thinking, Vector Calculus, Linear Algebra.*

1 Docente investigador del Departamento de Matemáticas. Universidad Antonio Nariño (UAN).Bogotá, Colombia. E-mail: ogalindo@uan.edu.co. ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2385-7202

INTRODUCCION

En la Enseñanza - Aprendizaje del Cálculo Vectorial, al ser una asignatura que se cursa posteriormente a la del cálculo en una variable, los estudiantes deben construir significado de una gran variedad de nuevos conceptos y de entidades matemáticas abstractas, entre ellas, los de campo escalar, campo vectorial, divergencia y rotacional. Además, aparecen los teoremas de Green, Gauss y Stokes, que relacionan conceptos tan importantes como las integrales de línea e integrales de superficie con integrales dobles y triples, tan útiles en los estudios de física, por ejemplo en electricidad y magnetismo.

En la experiencia del investigador, estos nuevos conceptos presentan retos en el aprendizaje para los estudiantes, retos que están dados por el nivel de abstracción de los mismos, las nuevas técnicas de cálculo que se deben dominar en la asignatura y el conjunto de asignaturas previas básicas, como son: Álgebra Lineal, Cálculo Diferencial e Integral de funciones reales de una variable, Geometría Analítica junto con un acertado razonamiento espacial.

En el encuentro sobre la Enseñanza de Matemática en Carreras de Ingeniería (EMCI XXII) realizado en Uruguay se aborda el tratamiento de diferentes teorías educativas (campos conceptuales, APOS, matemática crítica, entre otras) para poder incluirlas en la enseñanza del cálculo en varias variables o en análisis matemático en general.

En el ICME 14 se hace referencia a algunas investigaciones sobre el proceso de Enseñanza - Aprendizaje del Cálculo, por ejemplo las que se dieron en el grupo tema de estudio TSG13. Estas investigaciones tienden a concluir que el mayor reto para los estudiantes en ese proceso es potenciar la visualización y el aprendizaje de los fenómenos que conllevan a su modelación y su posterior puesta en práctica. Estos resultados mostrados en el ICME 14 motivan esta investigación, cuyo objetivo principal es el de analizar el proceso de Enseñanza - Aprendizaje del objeto que se le presenta al estudiante y cómo el docente se lo presenta, lo que permitirá llevar al estudiante a una construcción de significado y su desarrollo de un pensamiento matemático robusto. Cabe resaltar que las investigaciones sobre Enseñanza - Aprendizaje del Cálculo Vectorial son muy escasas y la mayoría se refieren a su interacción con el Álgebra Lineal.

Por otra parte, el investigador aduce que algunos estudiantes en su proceso de aprendizaje de los temas del curso de Cálculo Vectorial han visto reflejados cierta clase de comportamientos de estos nuevos conceptos, que se familiarizan con lo que acontece en los vectores o en el Álgebra Lineal. Esto revela un intrincado proceso de pensamiento presente en los estudiantes que en parte también motivó esta investigación y que permitió estudiar este proceso desde múltiples puntos de vista.

Como resultado de la aplicación de un grupo de problemas se logró caracterizar un tipo de pensamiento capaz de involucrar y magnificar la Enseñanza - Aprendizaje de los temas anteriormente señalados (Pensamiento Vectorial), que junto a una metodología coherente y una pertinente práctica pedagógica pudo llevar al estudiante de ingeniería a desarrollar su pensamiento matemático de manera vectorial mediante la resolución de problemas.

En lo que sigue se analizará desde la óptica del curso de Cálculo Vectorial el artículo clave para entender el proceso de mejora y generalización de los modos de pensar en Álgebra Lineal, luego se muestran los modos de Pensamiento Vectorial y por último el contraste entre estos modos de pensar.

REFERENTES TEÓRICOS

On Some Aspects of Students´ Thinking in Linear Algebra

En este visionario artículo de Anna Sierpinska, independientemente de Hillel (2000) con sus modos de descripción (geométrico, algebraico y abstracto), se distinguen tres tipos de pensamiento en Álgebra Lineal que están muy cercanos al tipo de pensamiento que se pretende mostrar en esta investigación, y que están ligados epistemológicamente a la desaritmetización de la geometría y el rechazo de la “intuición geométrica” a solo un dominio aritmético.

Estos tres modos de pensamiento forman la base de una caracterización del pensamiento en Álgebra Lineal. Se dan bastantes ejemplos de estos tipos de pensamiento en distintos conceptos de la asignatura, junto con algunas actividades que reflejan la interacción entre estos modos.

Estas actividades reflejan, en cierto sentido, la estaticidad de los entes geométricos involucrados en el estudio (sistemas de ecuaciones lineales, paralelismo, cambios de base, transformaciones lineales) que, aunque se da una idea acertada de estos modos de pensamiento, es incompleto en la forma de abordar los conceptos de una manera dinámica e interactiva, que potencie la adquisición de los mismos para un curso basado en gran parte en el Álgebra Lineal, pero con el énfasis del movimiento, como lo es el Cálculo Vectorial.

Además de contrastar y valorar los distintos modos de pensamiento para el Álgebra Lineal, la autora muestra una carencia fundamental en el último modo de pensar (Analítico - Estructural), pues los estudiantes en el estudio se inclinaban más por el modo Analítico - Aritmético, haciendo notar que es el pensamiento dominante históricamente de la matemática en general.

Una de las principales tareas que se abordaron en la investigación fue la de complementar, mejorar, potenciar y generalizar estas ideas, pero para el curso en cuestión, donde se aportó al avance en la caracterización del Pensamiento Vectorial.

Modos de pensamiento en Álgebra Lineal de Sierpinska

Como ya se mencionó anteriormente, esta teoría se basa en los modos de pensamiento que son:

- Sintético - Geométrico: Basado en el lenguaje de las figuras geométricas.
- Analítico - Aritmético: Basado en el lenguaje de los algoritmos.
- Analítico - Estructural: Basado en el lenguaje de las estructuras.

El marco de referencia sugiere que cualquier concepto y forma de resolución de un problema en esta asignatura tiende a sustentarse por alguno o varios modos de pensar, que pueden ser directos o indirectos, dependiendo de la estructura del concepto o del problema.

A efectos prácticos, los primeros conceptos de productos escalares y vectoriales se ven desde estas tres perspectivas directamente, y aplicado en el aula hay estudiantes que manifiestan algún tipo de pensamiento más que otro, que en general es el pensamiento Analítico - Aritmético.

Como un análisis epistemológico de estos tipos de pensamiento, la autora muestra que desde Descartes con su geometría analítica (aritmetización de la geometría) hasta la geometría intuitiva que existen en los espacios de Banach (desaritmetización de la geometría) la historia del desarrollo del Álgebra Lineal es vista por la interacción continua de estos cambios de perspectiva que permite tener una comprensión profunda de los conceptos para así poder solucionar problemas.

En el pensamiento Analítico - Aritmético se distingue la formulación y la manera de ver el concepto o problema como meramente procedimental y algorítmico. Este modo de pensar es siempre el más recurrido por los estudiantes en nivel de preparación, pues es una manera “segura” de obtener y llegar a los resultados propuestos.

En diferentes investigaciones basadas en este marco teórico, se concluye que el estudiante al no poder ver o asimilar otra forma de pensar el concepto o el problema, opta por hacer cálculos sobre este sin ver un objetivo u horizonte a donde llegar. Este es un punto de quiebre de estos artículos, donde se ha escrito desde muchas perspectivas, como desde la que la historia ha favorecido este tipo de pensamiento, hasta la de que no había herramientas teóricas disponibles para poder generar una interacción entre ellas, que a su vez conlleven a una solución elegante pero comprendida por el estudiante.

En el pensamiento Sintético - Geométrico se distingue por sobretodo la forma geométrica deducida o interpretada de un concepto o problema, que a su vez puede que solo esa interpretación sea suficiente para poder analizar sus conexiones con otros conceptos o resolver el problema en cuestión.

Lo anteriormente mencionado se asemeja a lo que actualmente se conoce como Pruebas Sin Palabras (Proof Without Words), en donde se destacan ciertos grupos de investigación matemática con ramificaciones en la Educación Matemática que buscan hacer demostraciones de manera ya sea geométrica o por axiomas en forma de flechas (Teoría de la Demostración) hasta mostrar ciertas estructuras que permitan demostrar la proposición sin la argumentación clásica mostrada en la escuela. Vale la pena decir que este tipo de pensamiento no es propio del Álgebra Lineal al nivel del proceso de Enseñanza - Aprendizaje sino que se extiende por varias ramas de la matemática.

En el pensamiento Analítico - Estructural se distinguen los objetos matemáticos por un conjunto de axiomas o propiedades que las satisfacen. Para el Álgebra Lineal, estos objetos son los que se encuentran al final de la asignatura, referidos a los espacios vectoriales, las transformaciones lineales y sus diferentes conjuntos (núcleo e imagen).

Históricamente se ha visto que estos conceptos no son de fácil comprensión por parte de los estudiantes, al tratar con un lenguaje puramente formal, donde también la forma como surgieron estas ideas no ha tenido una modificación substancial y es propensa a ser mejorada.

Desde un punto de vista matemático, este modo de pensar ha sido característico de la rama pura de las matemáticas, donde el estudiante que sale airoso en una asignatura es porque ha comprendido los esquemas de demostración y sus distintas conexiones que abarquen otros resultados y teorías. Esto genera una frontera teórica entre la matemática pura y la matemática aplicada. Es por ello que no hay muchos estudiantes que opten por llegar a desarrollar este modo de pensar en Álgebra Lineal.

Pero desde cierto acercamiento, este modo de pensar es más elegante y más compacto onto-semioticamente hablando, pues los resultados se deducen de tipos de propiedades inherentes a los objetos matemáticos tratados. Es por ello que ciertos grupos de investigación están enfocados en tratar de esbozar caminos entre este modo de pensar con los otros modos generalmente desarrollados con anterioridad.

AVANCE EN LA CARACTERIZACIÓN DEL PENSAMIENTO VECTORIAL

Como aporte teórico de la tesis doctoral del investigador principal del presente artículo (Galindo (2022)), se logró caracterizar un tipo de pensamiento matemático capaz de involucrar y magnificar el proceso de Enseñanza - Aprendizaje de los temas del Cálculo Vectorial y se llamó *Pensamiento*

Vectorial, que se entenderá como el *sistema de procesos cognitivos asociados con representaciones y operaciones vectoriales de objetos matemáticos de diversa índole*.

A través de la resolución de problemas retadores y no rutinarios consagrados en actividades ajustadas se manifestaron en el aula cinco modos de Pensamiento Vectorial, los cuales permitieron esbozar una rúbrica de caracterización del pensamiento la cual se puede observar en la Figura 1.

Algunos de estos modos de pensamiento fueron inspirados en el trabajo de Sierpinska (2000), a los modos de pensar en Álgebra lineal (Dorier (1995)), donde se ajustaron, modificaron y generalizaron a los requerimientos del curso de Cálculo Vectorial. A continuación una breve descripción de tales modos de Pensamiento Vectorial:

El modo vecto - algorítmico manifiesta la utilización del álgebra vectorial para darle solución a un problema. Es el modo más recurrente observado en la solución dada por los estudiantes. En este modo de pensamiento se encuentran por ejemplo el uso de los algoritmos vectoriales como productos o determinantes, el álgebra del producto de cuatérnios, lo que a su vez conlleva al álgebra de formas diferenciales, etc.

El modo vecto - dinámico manifiesta la utilización de herramientas tecnológicas de geometría dinámica para visualizar un problema o para entender algún concepto teórico que acarree resolver un problema (Donevska (2016)). En este modo se encuentran el desarrollo de las construcciones geométricas de los productos de vectores, curvas y superficies orientadas, campos vectoriales, etc.

El modo vecto - estructural manifiesta la utilización de estructuras vectoriales, tales como axiomas o teoremas propios, para transformar un problema y darle solución. Como ejemplo de tales modos podemos mencionar el uso de axiomas propios de los espacios vectoriales, las desigualdades de magnitud y producto escalar (por ejemplo la desigualdad de Cauchy - Schwarz o desigualdad del triángulo), etc.

El modo de orientabilidad manifiesta la necesidad de un tipo de orientación (por ejemplo productos vectoriales, áreas o volúmenes con signo, álgebra de formas diferenciales,…) que se usa para darle sentido a la solución de un problema. Así se puede mencionar el uso de esquemas de orientación que permitan desarrollar el significado de una operación vectorial, el uso de los vectores tangentes y normales para caracterizar una recta o un plano respectivamente, etc.

El modo de generalización manifiesta la necesidad de ampliar u observar la solución de un problema desde otros puntos de vista para así proponer otros problemas y darles solución. Se menciona por ejemplo el uso de este modo para complementar o expandir una construcción geométrica o un algorítmo efectivo que resulte útil para replicarlos en subsiguientes tipos de problemas, etc.

Cabe resaltar la importancia de estos modos de pensamiento en el trabajo con los estudiantes y que tan solo es un avance que logró una caracterización del Pensamiento Vectorial. Es de remarcar que los modos de pensamiento vecto-algorítmico, vecto-dinámico y vecto-estructural fueron categorías propias derivadas de esta investigación que muestran una evolución frente a las categorías de Sierpinska, modificadas al curso de Cálculo Vectorial, lo que representa un componente diferenciable de las primeras y de las cuales son fuente del presente artículo.

La siguiente rúbrica fue concebida después de los análisis de los modos de Pensamiento Vectorial involucrados en las soluciones de los problemas establecidos por parte de los estudiantes, basados inicialmente en los modos de pensamiento en Álgebra Lineal de Sierpinska, donde posteriormente se ajustaron y extendieron al curso de Cálculo Vectorial.

Posteriormente se generaron dos modos de pensamiento propios para el Cálculo Vectorial, los cuales son los modos de orientabilidad y de generalización, que además tienen conexiones epistemológicas con la génesis del pensamiento matemático, las cuales serán el insumo de próximos artículos.

VIDYA, v. 44, n. 1, p. 97-113,
jan./jun. - Santa Maria, 2024.

Figura 1 - Rúbrica de caracterización del Pensamiento Vectorial.

RÚBRICA PARA LA CARACTERIZACIÓN DEL PENSAMIENTO VECTORIAL					
	1. Modo vecto-algorítmico	***2.*** Modo vecto-dinámico	***3.*** Modo vecto-estructural	***4.*** Modo de orientabilidad	***5.*** Modo de generalización
	0	0	0	0	0
	PARÁMETROS DE EVALUACIÓN				
PARÁMETROS DE EVALUACIÓN	***1.1.*** Recurre a una estrategia algorítmica eficiente y efectiva para resolver un problema.	***2.1.*** Por medio de herramientas tecnológicas visualiza completamente la situación problema.	***3.1.*** Reconoce la estructura vectorial implícita en un problema.	***4.1.*** Aplica la orientación del objeto geométrico subyacente a la solución de un problema.	***5.1.*** Propone algún algoritmo vectorial alternativo al desarrollado en clases.
	1.2. Presenta el desarrollo de la actividad con el proceso algorítmico correcto.	***2.2.*** Utiliza los vectores elaborados con geometría dinámica para dar solución a un problema.	***3.2.*** Propone una manera vectorial para formular la solución de un problema.	***4.2.*** Reconoce la orientación como factor determinante en una solución.	***5.2.*** Muestra otro tipo de construcción geométrica para visualizar un problema.
	1.3. Demuestra dominio de los procesos algorítmicos vistos con antelación a la actividad desarrollada.	***2.3.*** Construye situaciones geométricas que involucran vectores.	***3.3.*** Recurre a esquemas vectoriales para dar solución a un problema.	***4.3.*** Muestra una orientación al análisis de un esquema vectorial dado.	***5.3.*** Modifica una estructura vectorial dada que sirva para dar solución a un problema.
	1.4. Utiliza los algoritmos vectoriales para construir una solución de un problema.	***2.4.*** Conceptualiza el cálculo vectorial desde su faceta dinámica.	***3.4.*** Transforma un problema dado para resolverlo con estructuras vectoriales.	***4.4.*** Entiende la relación entre la orientación y una estructura vectorial dada.	***5.4.*** Conjetura diversos tipos de orientación distinta a la estándar.

Fuente: Galindo (2023).

METODOLOGÍA

En la investigación se elaboró una metodología sustentada en un modelo didáctico, Hernández et al. (2014), donde se imbrique la visualización, la manipulación geométrica, la heurística y el uso de las tecnologías de la información y las comunicaciones (TIC) como herramientas didácticas, para la resolución de problemas retadores; dirigido a fortalecer el proceso de Enseñanza - Aprendizaje de la construcción robusta de los conceptos propios del curso de Cálculo Multivariado y Álgebra Lineal en los estudiantes de Ingeniería de la Universidad Antonio Nariño.

Población y muestra

La investigación se desarrolló con estudiantes de carreras de Ingeniería de la Universidad Antonio Nariño, la cual constituye la población. La muestra estuvo constituida por 35 estudiantes del curso de Cálculo Multivariado y Álgebra Lineal, correspondiente a la asignación de los cursos ofrecidos en el semestre al docente.

Métodos, técnicas e instrumentos utilizados

En el desarrollo de la investigación se utilizaron los siguientes métodos teóricos:

- Histórico-Lógico: se empleó con el fin de valorar la evolución y el desarrollo del proceso de Enseñanza - Aprendizaje del Cálculo Vectorial en estudiantes de Ingeniería.
- Análisis-Síntesis: presente en la investigación para el proceso de diagnóstico, análisis del estado del arte y en los fundamentos teóricos, del proceso de Enseñanza - Aprendizaje del Cálculo Vectorial en estudiantes de Ingeniería, propiciando interpretar y sintetizar los resultados, así como la elaboración de las conclusiones y recomendaciones.
- La observación participante: se utilizó en la observación de clases, para obtener información sobre el proceso de Enseñanza - Aprendizaje del Cálculo Vectorial en estudiantes de Ingeniería.
- Encuesta: Se aplicó una encuesta de satisfacción a los estudiantes una vez concluida la aplicación del sistema de actividades.

Fases de la investigación

Para el logro de resultados satisfactorios en el proceso investigativo se definieron las siguientes fases:

Fase 1. Preparatoria. Diseño de instrumentos: observación participante, encuesta a estudiantes y docentes, pretest. Aplicación de instrumentos. Recogida de datos arrojados por instrumentos. Triangulación de instrumentos para concretar el problema de investigación. Se estableció la metodología de investigación a seguir.

Fase 2. Revisión de la literatura. Determinación el estado del arte sobre el proceso de Enseñanza - Aprendizaje del Cálculo Vectorial en estudiantes de Ingeniería, para precisar las carencias presentes en las investigaciones, las cuales fueron bases para identificar el aporte teórico y determinar la unicidad del problema.

Fase 3. Construcción del marco teórico. El marco teórico estuvo dado por el pensamiento matemático basado en la visualización, la teoría de la resolución de problemas y problemas retadores, referentes sobre la modelación matemática y el contenido matemático sobre el Cálculo Vectorial. El marco teórico propició perfilar las categorías para la construcción del modelo didáctico.

Fase 4. Diseño de aportes teóricos y prácticos. En esta fase se elaboró un modelo didáctico y el sistema de actividades. Los problemas retadores planteados en estas actividades fueron enfocados para vislumbrar los modos de Pensamiento Vectorial al fin de estudiar sus características y sus diferencias.

Fase 5. Trabajo de campo. Esta fase se dirigió a la aplicación del sistema de actividades por lo menos dos veces a través de un estudio piloto, lo cual perfeccionó las actividades y mejorar el modelo didáctico.

Fase 6. Recogida, análisis de la información y evaluación. Recogida y procesamiento de la información, triangulación de resultados, elaboración de informes y publicación o socialización de resultados.

VIDYA

VIDYA, v. 44, n. 1, p. 97-113,
jan./jun. - Santa Maria, 2024.

CONTRASTE ENTRE LOS MODOS DE PENSAMIENTO VECTORIAL Y LOS MODOS DE PENSAR EN ÁLGEBRA LINEAL

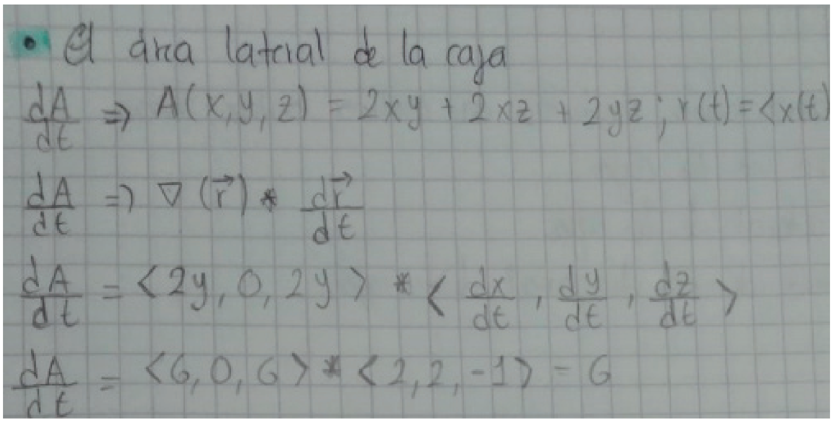
En este apartado se mostrará evidencia del trabajo realizado por los estudiantes del curso de Cálculo Multivariado y Álgebra Lineal en algunas de las actividades dispuestas para dar avances en la caracterización del Pensamiento Vectorial y la manera como logra robustecer las formas de pensar en Álgebra Lineal. Estas evidencias se presentan en las figuras de la 2 a la 10 según cada modo de Pensamiento Vectorial.

Modo vecto - algorítmico

Problema Actividad 3.

Por la estructura de los materiales que conforman una caja, su longitud, su ancho y su altura varían con el tiempo. En cierto instante las medidas de la caja son de dos metros su longitud y de tres metros su ancho y su altura. Se observa que la longitud y el ancho de la caja aumentan a razón de 2 m/h y que su altura disminuye a razón de 1m/h. En el momento que se tomaron las variaciones de las medidas, determine las razones a las que cambian el volumen y el área lateral de la caja. Realice un bosquejo dinámico de la situación.

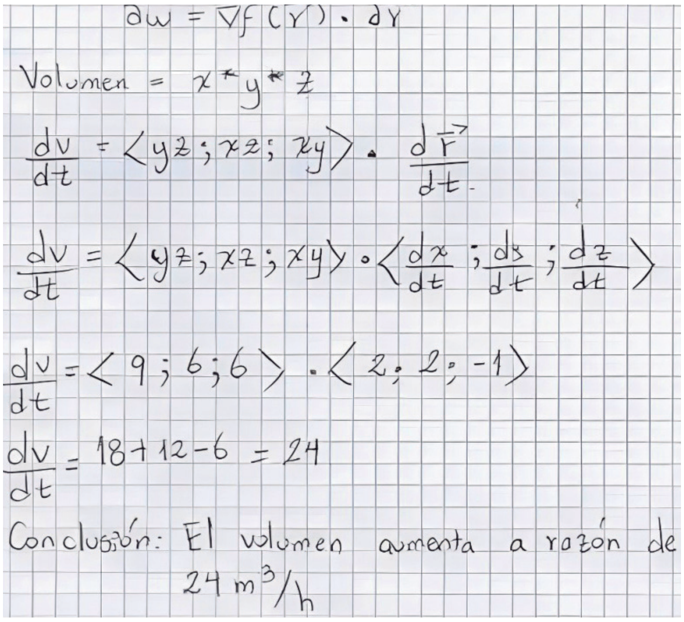
Figura 2 - Problema que representa el modo vecto - algorítmico.



Fuente: Galindo (2023).

VIDYA *VIDYA*, v. 44, n. 1, p. 97-113, jan./jun. - Santa Maria, 2024.

Figura 3 - Problema que representa el modo vecto - algorítmico.



Fuente: Galindo (2023).

Los estudiantes realizan los correspondientes cálculos usando una notación vectorial de la regla de la cadena, lo cual conlleva a una mejor interpretación de los resultados obtenidos sin incurrir a muchos procesos algorítmicos.

En este problema (basados en la rúbrica de caracterización) se muestra que los estudiantes desarrollan el significado vectorial de las fórmulas y algoritmos vistos en las clases previas al desarrollo de la actividad. Asimismo, apoyándose en las herramientas tecnológicas sugeridas con el fin de observar imágenes de las posibles soluciones y utilizando vectores para entender las relaciones existentes y dar una posible solución al problema, volvemos a evidenciar la relación de las facetas vecto-algorítmica y vecto-dinámica.

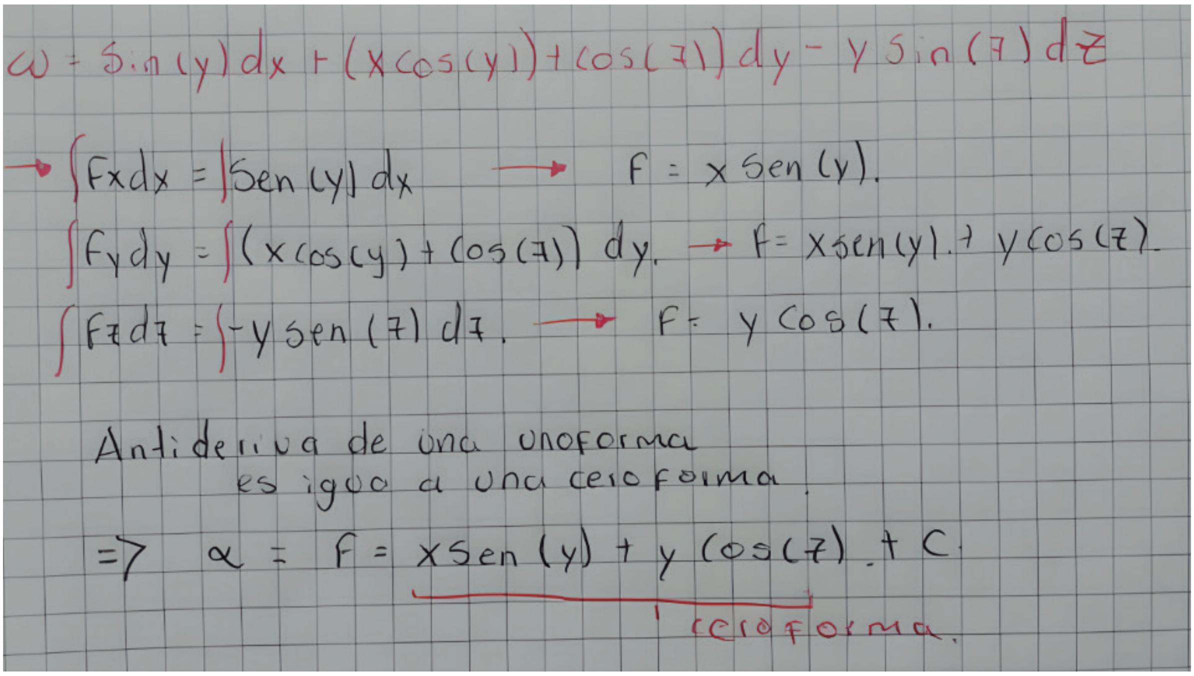
Se contempla al máximo la habilidad tecnológica que posee el estudiante, el cual analiza y organiza los datos para la construcción de la geometría a utilizar y da solución de manera teórico-visual a este problema; un análisis tridimensional basado en la construcción y su correspondiente faceta dinámica permite dar la forma gráfica correspondiente. Esto mostró que los estudiantes tienden a una mayor comprensión y análisis en estas facetas del pensamiento vectorial.

Es de remarcar que el álgebra vectorial de este modo de pensamiento difiere de lo mostrado habitualmente en los libros de testo clásicos, como lo es el de Stewart (2018).

Problema Actividad 7

Sea la 1-forma: $\boldsymbol{\omega}=\mathbf{sin}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx}+(\boldsymbol{x}\mathbf{cos}(\boldsymbol{y})+\mathbf{cos}(\boldsymbol{z}))\boldsymbol{dy}-\boldsymbol{y}\mathbf{sin}(\boldsymbol{y})\boldsymbol{dz}$ ¿Qué procedimiento podrían conjeturar para la obtención de una forma diferencial cuya derivada sea la 1-forma dada?

Figura 4 - Problema que representa el modo vecto - algorítmico.



Fuente: Galindo (2023).

Los estudiantes conjeturan la solución de una “antiderivada exterior” usando el cálculo integral multivariable. Esto da pie a usar un algoritmo efectivo que nos muestre sin demasiados procesos algorítmicos la función potencial de un campo conservativo, que resulta ser una 0-forma en el lenguaje de las formas diferenciales.

Lo anterior muestra que los estudiantes desarrollan un pensamiento intuitivo ligado al cálculo integral que resulta “naive” y que arroja una respuesta correcta más allá de los algoritmos mostrados clásicamente en los textos sobre campos conservativos.

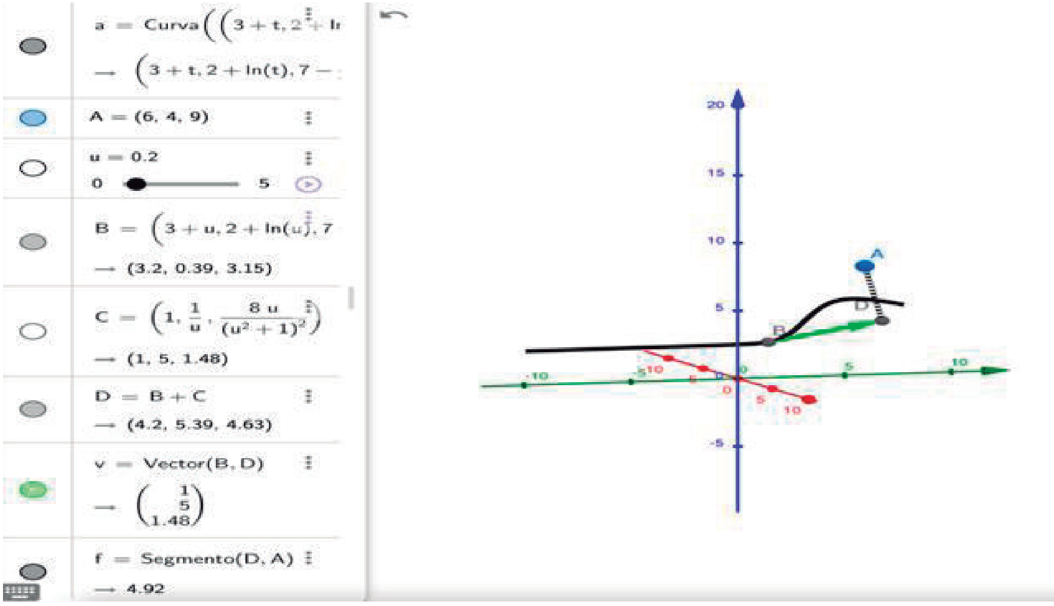
Esto dio inicio a preguntarse sobre cuando una forma de este estilo tiene una “antiderivada exterior” y si este proceso se puede extender a otras formas diferenciales, lo que coincide con el objetivo de un Pensamiento Matemático Avanzado (Tall. 2013) y que contrasta con el modo Analítico - Aritmético de los modos de pensar en Álgebra Lineal.

Modo vecto - dinámico

Problema Actividad 2. (Tomado del libro Cálculo de varias variables. J Stewart)

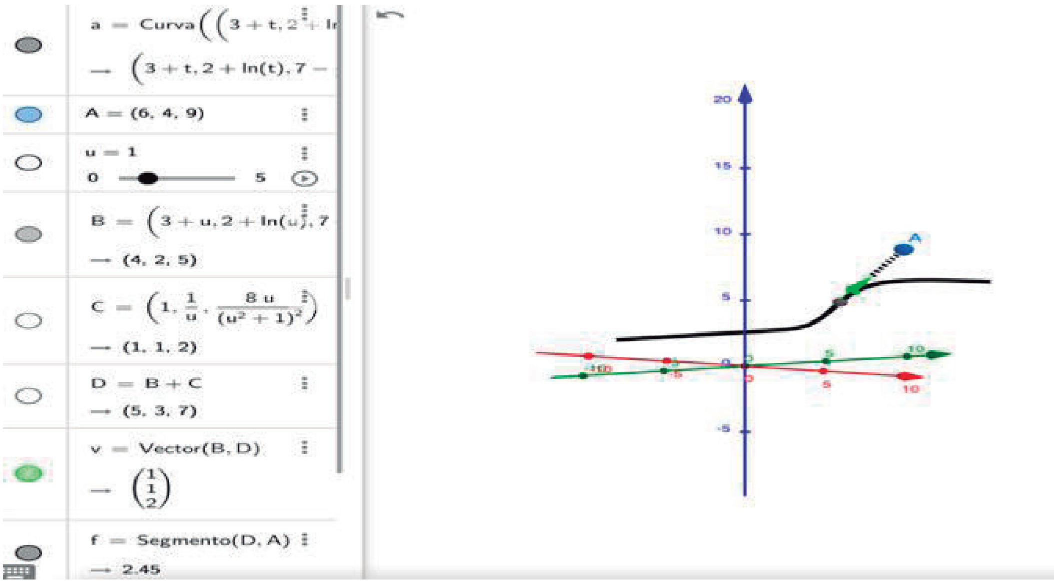
La función posición de una nave espacial es $\vec{r}(t) = \langle 3 + t;\ 2 + \ln(t);\ 7 - \dfrac{4}{t^2+1}\rangle$ y las coordenadas de una estación espacial son $(6,\ 4,\ 9)$. El capitán desea que la nave se deslice hasta la estación espacial. ¿En qué momento deberían apagarse los motores de la nave?

Figura 5 - Problema que representa el modo vecto - dinámico.



Fuente: Galindo (2023).

Figura 6 - Problema que representa el modo vecto - dinámico.



Fuente: Galindo (2023).

Los estudiantes hacen un esquema de la situación geométrica del problema para intuir una forma de solución. Se analiza la relación existente entre la trayectoria seguida por la nave y su trayectoria tangente, la cual se deduce de la derivada de la función posición, con la que el capitán desea que se deslice la nave, notando que en el tiempo se obtiene la solución del mismo. Los estudiantes realizaron

VIDYA, v. 44, n. 1, p. 97-113,
jan./jun. - Santa Maria, 2024.

los cálculos algorítmicos correspondientes, notando que esta faceta vecto - dinámica resultó ser la que mejor se adaptaba a la solución del problema, pues los cálculos aritméticos resultan ser tediosos.

Los estudiantes dan sus respuestas y justificaciones de manera teórica y práctica mediante las fórmulas presentadas durante las clases y el manejo de la plataforma tecnológica sin ir más allá de la faceta vecto-estructural del pensamiento vectorial. Cabe destacar que los estudiantes, utilizando los modos de pensar vecto-algorítmico y vecto-dinámico, intuyen y se preocupan por la orientación de estos objetos geométricos, lo cual relacionan con el recorrido del vector tangente sobre la curva e indica una relación implícita entre los modos de pensar de Sierpinska que trasciende a ellos, pues va mucho más allá de la parte algorítmica, de la geométrica y la estructural que se profesa en estos modos de pensar.

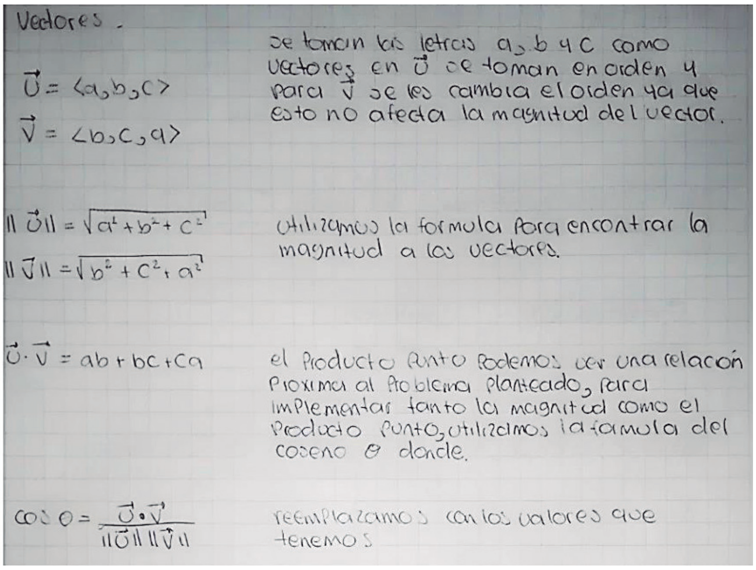
Vale la pena decir que este modo vecto - dinámico va más allá de las interacciones estáticas que clásicamente se tomaron en el modo de pensar sintético - geométrico en álgebra lineal, pues le profieren a la construcción una orientación necesaria para el desarrollo de este modo de pensar vectorialmente.

Modo vecto - estructural

Problema Actividad 1.

Demuestre que: Si para tres números reales a, b, c se tiene que $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$, *mostrar que* $a = b = c$.

Figura 7 - Problema que representa el modo vecto - estructural.

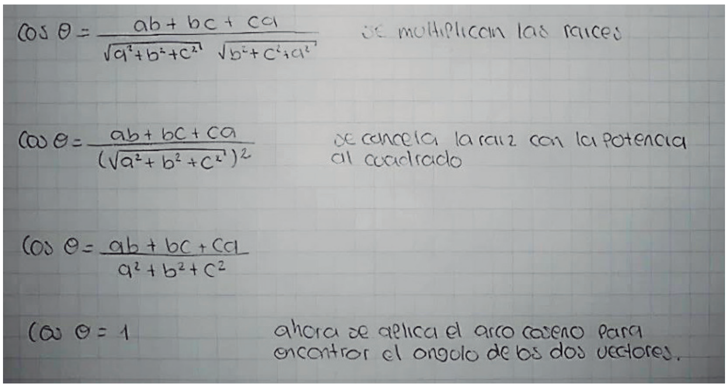


Fuente: Galindo (2023).

VIDYA

VIDYA, v. 44, n. 1, p. 97-113,
jan./jun. - Santa Maria, 2024.

Figura 8 - Problema que representa el modo vecto - estructural.



$$\cos\theta = \frac{ab+bc+ca}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,\sqrt{b^2+c^2+a^2}}$$ se multiplican las raices

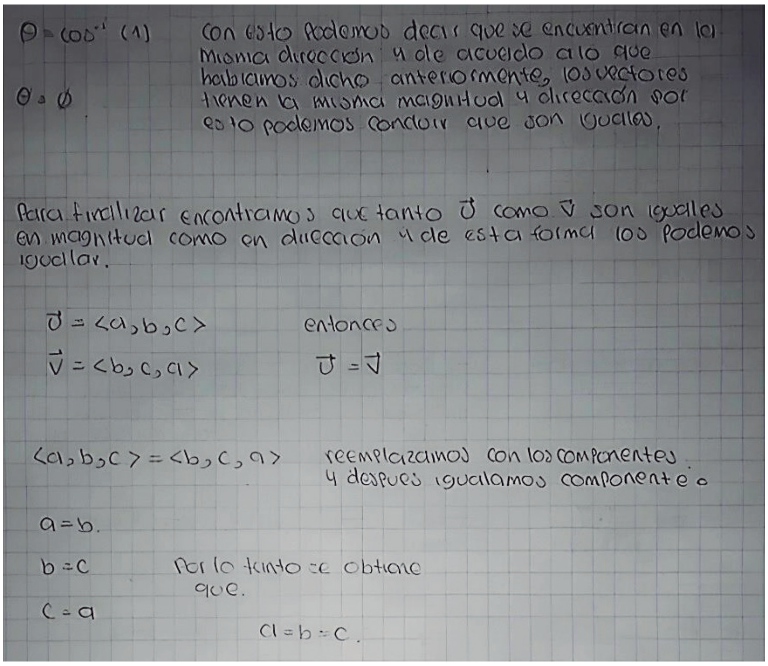
$$\cos\theta = \frac{ab+bc+ca}{\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)^2}$$ se cancela la raiz con la potencia al cuadrado

$$\cos\theta = \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}$$

$\cos\theta = 1$ ahora se aplica el arco coseno para encontrar el angulo de los dos vectores.

Fuente: Galindo (2023).

Figura 9 - Problema que representa el modo vecto - estructural.



$\theta = \cos^{-1}(1)$ con esto podemos decir que se encuentran en la misma dirección y de acuerdo a lo que hablamos dicho anteriormente, los vectores tienen la misma magnitud y dirección por esto podemos concluir que son iguales,

$\theta = 0$

Para finalizar encontramos que tanto $\vec{u}$ como $\vec{v}$ son iguales en magnitud como en dirección y de esta forma los podemos igualar.

$\vec{u} = \langle a, b, c \rangle$ entonces

$\vec{v} = \langle b, c, a \rangle$ $\vec{u} = \vec{v}$

$\langle a, b, c \rangle = \langle b, c, a \rangle$ reemplazamos con los componentes y despues igualamos componentes

$a = b.$

$b = c$ Por lo tanto se obtiene que.

$c = a$

$a = b = c.$

Fuente: Galindo (2023).

En esta solución se muestra una demostración alternativa de este hecho algebraico utilizando las propiedades vistas y trabajadas en clase. El desafío de los estudiantes era utilizar un tipo de pensamiento vectorial tratando de buscar una solución al problema presentado, teniendo en cuenta las estructuras de los teoremas y de las propiedades de las operaciones vectoriales mostradas en clase.

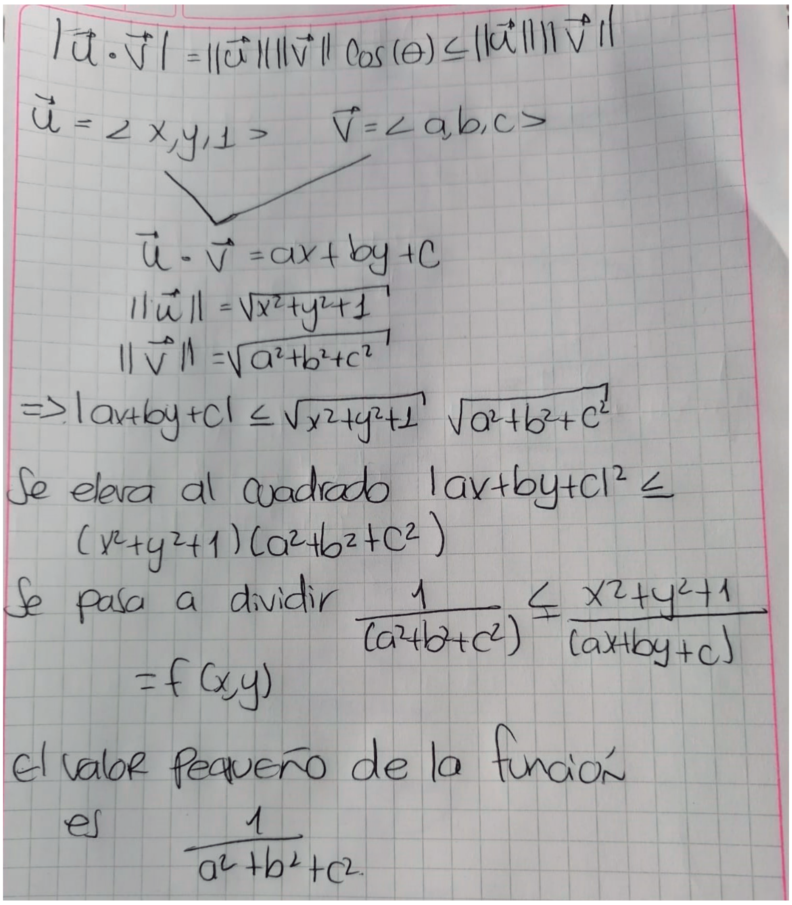
VIDYA, v. 44, n. 1, p. 97-113,
jan./jun. - Santa Maria, 2024.

Problema Actividad 4.

Encontrar el valor mínimo de la función

$$\boldsymbol{f(x,y) = \frac{x^2+y^2+1}{(ax+by+c)^2}}$$

Figura 10 - Problema que representa el modo vecto - estructural.


$|\vec{u}\cdot\vec{v}| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\theta) \le \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$

$\vec{u} = \langle x, y, 1 \rangle$ $\vec{v} = \langle a, b, c \rangle$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = ax+by+c$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+1}$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

$\Rightarrow |ax+by+c| \le \sqrt{x^2+y^2+1}\,\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

Se eleva al cuadrado $|ax+by+c|^2 \le (x^2+y^2+1)(a^2+b^2+c^2)$

Se pasa a dividir $\frac{1}{(a^2+b^2+c^2)} \le \frac{x^2+y^2+1}{(ax+by+c)}$

$= f(x,y)$

el valor pequeño de la función es $\frac{1}{a^2+b^2+c^2}$

Fuente: Galindo (2023).

En esta solución se muestra cómo el estudiante ataca el problema con los recursos mostrados en el aula pero de manera vectorial, lo que evidencia una forma implícita y novedosa de argumentar una solución vía desigualdad de Cauchy - Schwarz, pero sin que él lo mencione. Cabe destacar que otros estudiantes realizaron de manera clásica algorítmicamente esta solución (via la matriz Hessiana de la función) y llegaron al mismo resultado pero con cálculos muy tediosos.

En esta faceta del pensamiento se evidenció en unos estudiantes un poco más de complejidad al momento de presentar una solución, mientras que en otros se presentó un avance importante relacionando las facetas del pensamiento vectorial para dar una solución con el fin de analizar las estructuras propuestas y los diversos esquemas vectoriales que pueden formular los estudiantes.

Además se identifica su conocimiento intuitivo y la capacidad de transformar fórmulas y estructuras con el fin de dar solución a los problemas presentados. En la solución de este problema se nota la confluencia de los distintos modos del pensamiento vectorial y se refleja un entendimiento y empoderamiento de las herramientas de tipo vectorial que no se esbozaba antes en la solución de los problemas anteriores.

El contraste con el modo Analítico - Estructural de los modos de pensar en Álgebra Lineal y el modo vecto - estructural del Pensamiento Vectorial radica en que en este último se conecta con los otros modos de Pensamiento Vectorial de una forma más directa que las propuestas por Sierpinska (2000), donde en Álgebra Lineal parece que este modo de pensar es disconexo con los demás al propender una estructura clausurativa que se baste con sus propias herramientas, muy típico de la matemática formalista.

Lo anterior muestra que el modo vecto - estructural hace desarrollar el significado de los conceptos del curso de Cálculo Vectorial para lograr una óptima demostración y argumentación del porqué de sus respuestas.

RESULTADOS DE LA APLICACIÓN DE LAS ACTIVIDADES

- El 35% de los estudiantes que resolvieron los problemas que vislumbraban el modo vecto - estructural mostraron nuevas formas de pensar algunos problemas propuestos desde el enfoque del Pensamiento Vectorial, dando así una oportunidad de mejora en este sentido.
- El 83% de los estudiantes usaron adecuadamente las herramientas y plataformas tecnológicas para la visualización de los problemas y sus soluciones, trabajando desde la práctica.
- El 74% de los estudiantes desarrollaron notaciones del Cálculo Vectorial que permitió optimizar las formas de entender y las formas de pensar de un problema particular.
- El 92% de los estudiantes se empoderó de las herramientas del Pensamiento Vectorial para la modelación de un problema específico, dando otro énfasis en la solución de los mismos.
- El 74% de los estudiantes notaron un cambio de paradigma de enseñanza - aprendizaje del Cálculo Vectorial a través del Pensamiento Vectorial y sus rúbricas de caracterización, lo cual se llevó a cabo mostrando el trabajo clásico de los libros de texto y contrastándolo con los modos de Pensamiento Vectorial.

CONCLUSIONES

Los modos de pensar vectorialmente muestran la necesidad de un cambio de paradigma entre lo que se imparte en un curso de Cálculo Vectorial y lo que se viene realizando actualmente con las herramientas tecnológicas disponibles, ya que se ha evidenciado el empoderamiento del estudiante en la formación de los conceptos del curso y su posterior aplicación.

Es bien sabido por la comunidad matemática la dificultad inherente entre la transición de un curso de Cálculo a otro, donde esta diferencia se hace remarcable en el curso de Cálculo Vectorial, sobre todo en los métodos y la notación. Se pudo evidenciar con certeza un tránsito óptimo al utilizar elementos vectoriales desarrollados en las actividades para robustecer el significado de conceptos de diferenciación e integración multivariable.

VIDYA, v. 44, n. 1, p. 97-113,
jan./jun. - Santa Maria, 2024.

Los modos del Pensamiento Vectorial generalizan y extienden los modos de pensar en Álgebra Lineal

Como se evidenció en los resultados del trabajo realizado por los estudiantes, se obtuvieron las siguientes generalidades:

- El modo Vecto - Algorítmico tomó situaciones del álgebra vectorial y los adaptó a los algoritmos existentes en Cálculo Vectorial vista como la matemática en movimiento en varias variables. Los conceptos del álgebra del producto vectorial se extendieron al álgebra de las formas diferenciales, abarcando más escenarios que el modo Analítico - Aritmético.
- El modo Vecto - Dinámico generaliza el campo de acción del modo Sintético - Geométrico en cuanto al uso de la herramienta tecnológica y logra visualizar situaciones en movimiento que el modo de pensar en Álgebra Lineal tiene limitaciones, lo que redundó en la obtención de más problemas cuya solución la misma herramienta dinámica era capaz de analizar.
- El modo Vecto - Estructural moldea un camino de diferentes representaciones algebraicas que pueden interactuar con los otros modos de Pensamiento Vectorial, como por ejemplo los modos descritos anteriormente, que redundan en favorecer una componente más general que el modo Analítico - Estructural, la cual algunas veces se limita a la obtención de resultados sin una conexión con los demás modos de pensar en Álgebra Lineal. Las propiedades y los teoremas propios del Álgebra otorgan al desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes de la asignatura de Cálculo multivariado una arista más para el aprendizaje de las funciones multivariables y sus conexiones con otras ramas de la ciencia.

Es de destacar que el uso de herramientas matemáticas poco utilizadas en los textos clásicos, como lo son las formas diferenciales, y el manejo de las mismas de una manera informal que conlleve a una resolución alternativa de los problemas de la asignatura en cuestión, resulto en la creación de una tensión entre los modos de pensar en Álgebra Lineal y el Pensamiento Vectorial, lo que conllevó a la obtención del modo de orientabilidad y al de generalización, los cuales muestran un camino coherente a un posible avance en la caracterización de un pensamiento propio para el Cálculo Vectorial.

Estas mismas ideas podrían implementarse en el ámbito de la Enseñanza - Aprendizaje de la asignatura de Variable Compleja, pues la epistemología de ambas ramas de las matemáticas comparte varios modos de pensar y se conectan de manera natural.

REFERENCIAS

Costa, V. A. & Arlego M. (2011). **Enseñanza del cálculo vectorial en el contexto de la ingeniería: una revisión bibliográfica**. Actas del I Congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática - ICIECyM. II Encuentro Nacional de Enseñanza de la Matemática - II ENEM. Tandil: Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, pp. 88-94.

Donevska-Todorova, A. (2016). **Thinking modes, with or without technology?** Paper presented at the 13th International Congress on Mathematical Education, Hamburg, Germany.

Dorier, J. L. (1995). **A general outline of the genesis of vector Space theory**. Historia Matematica, 22 (3), 227-261.

EMCI XIX Encuentro Nacional, XI Internacional. (2015). **Libro de actas**. Ciudad Autónoma de buenos Aires: Universidad Tecnológica Nacional.

Harel, G. (2008). **What is Mathematics? A Pedagogical Answer to a Philosophical Question**. University of California, San Diego harel@math.ucsd.edu.

Hernández & Sampieri, R., Fernández C. & Baptista Lucio, P. (2014). **Metodología de la Investigación**. Sexta Edición. México: McGrawHill / Interamericana Editores S.A. de C.V.

Gravemeijer, K & Doorman, M. (1999). **Context Problems in Realistic Mathematics Education: A Calculus Course as an Example**. Educational Studies in Mathematics. Volume 39, pp 111-129.

Galindo, O. (2022). **Avances en la caracterización del pensamiento vectorial a través de la resolución de problemas**. (Tesis doctoral). Universidad Antonio Nariño, Bogotá, Colombia.

Galindo, O & Falk, M. (2023). **Sobre los modos de pensamiento vectorial vía resolución de problemas**. Matemáticas, Educación y Sociedad, 6(1), pp. 1-18

Guerra, R, Parraguez, M. (2019). **Comprensión del producto vectorial desde los Modos de pensamiento: El caso de profesores en formación inicial**. Conferencia interamericana de educación Matemática. Medellín, Colombia.

Moreno, L. (2014). **An essential tension in mathematics education**. ZDM Mathematics Education, 46, 621-633.

Moreno, L. Hegedus, S.J. & Kaput, J.J. (2008). **From static to dynamic mathematics: historical and representational perspectives**. Educational Studies in mathematics, 68(2), 99-111

Stewart, J. (2012). **Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas.** Séptima edición. Brooks - Cole / Cengage Learning.

Sierpinska, A. (2000). **On some aspects of students´ thinking in Linear Algebra.** En Dorier, J.L. (Eds.), The teaching of Linear Algebra in question (pp. 209-246). Netherlands:Kluwer Academic Publishers.

T. Dray and C. A. Manogue. (2003). **Using differentials to bridge the vector calculus gap**, College Math. J. 34 283-290

Tall, D. (2003). **Using technology to support an embodied approach to learning concepts in mathematics.** In L. Carvalho & L. Guimara˜es (Eds.), Historia e tecnologia no ensino da matematica (Vol. 1, pp. 1-28).

Tall, D. (2013). **How Humans Learn to Think Mathematically.** Cambridge. Teaching and Learning of Calculus (ICME 13). Springer.

Teaching and Learning of Calculus **(ICME 14)**. Springer.