

## RACIOCÍNIO DIAGRAMÁTICO EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL

*DIAGRAMMATIC REASONING IN MATHEMATICAL  
MODELLING ACTIVITIES IN ELEMENTARY SCHOOL*

*RAZONAMIENTO DIAGRAMÁTICO EN ACTIVIDADES DE  
MODELACIÓN MATEMÁTICA EN EDUCACIÓN PRIMARIA*

KARINA ALESSANDRA PESSOA DA SILVA<sup>1</sup>  
NÁGELA MARTINS<sup>2</sup>

### RESUMO

Neste artigo, buscamos inferir sobre os conhecimentos dos alunos de uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática. Entendemos que a modelagem matemática é uma abordagem didático-pedagógica e que a construção do conhecimento pode ser evidenciada no raciocínio diagramático, assim nos respaldamos na semiótica peirceana, mais especificamente nos diagramas produzidos pelos alunos. A análise qualitativa subsidiada no processo de triangulação levou em consideração como sujeitos oito alunos do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola particular do norte do Paraná, como objeto os diagramas construídos no desenvolvimento de duas atividades de modelagem e como fenômeno o raciocínio diagramático que emergiu das atividades. Os resultados nos permitiram inferir que o raciocínio diagramático mobilizado nos diagramas produzidos para as situações em estudo, seja para realizar simplificações ou simulações, revelou que os alunos buscaram implementar conhecimentos matemáticos já estudados ao longo do ano letivo.

**Palavras-chave:** Educação Matemática. Modelagem Matemática. Semiótica Peirceana. Diagramas. 9º ano do Ensino Fundamental.

### ABSTRACT

*In this paper, we infer about the knowledge of students in a 9th grade class of Elementary School in the development of mathematical modelling activities. We understand that mathematical modelling is a didactic-pedagogical approach and that the construction of knowledge can be evidenced in diagrammatic reasoning, so we rely on peircean semiotics, more specifically on the diagrams produced by the students. The qualitative analysis subsidized in the triangulation process took into account as subjects eight students from the 9th grade of Elementary School at a private school in the north of Paraná, the diagrams constructed in the development of two modelling activities as the object, and the diagrammatic reasoning that emerged from activities as a phenomenon. The results allowed us to infer that the diagrammatic reasoning mobilized in the diagrams produced for the situations under study, whether to carry out simplifications or simulations, revealed that the students sought to implement mathematical knowledge already studied throughout the school year.*

**Keywords:** Mathematics Education. Mathematical Modelling. Peircean Semiotics. Diagrams. 9th grade of Elementary School.

1 Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR Câmpus Londrina. E-mail: karinasilva@utfpr.edu.br. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1766-137X>.

2 Mestre em Ensino de Matemática. Colégio Maxi. E-mail: nagelamartins@alunos.utfpr.edu.br. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7895-3245>.

## RESUMEN

*En este artículo inferimos sobre el conocimiento de los estudiantes de una clase de 9º grado de Educación Primaria en el desarrollo de actividades de modelación matemática. Entendemos que la modelación matemática es un enfoque didáctico-pedagógico y que la construcción del conocimiento puede evidenciarse en el razonamiento diagramático, por lo que nos apoyamos en la semiótica peirceana, más específicamente en los diagramas producidos por los estudiantes. El análisis cualitativo subsidiado en el proceso de triangulación tuvo en cuenta como sujetos a ocho alumnos de 9º grado de la Educación Primaria de una escuela privada del norte de Paraná, como objeto los diagramas construidos en el desarrollo de dos actividades de modelación y como fenómeno el razonamiento diagramático que emergió de las actividades. Los resultados permitieron inferir que el razonamiento diagramático movilizado en los diagramas producidos para las situaciones en estudio, ya sea para realizar simplificaciones o simulaciones, reveló que los estudiantes buscaron implementar conocimientos matemáticos ya estudiados a lo largo del año escolar.*

**Palabras-clave:** Educación Matemática. Modelación Matemática. Semiótica Peirceana. Diagramas. 9º grado de Educación Primaria.

## INTRODUÇÃO

Um desafio ao se fazer pesquisa na área de Educação Matemática é evidenciar, na descrição detalhada das atividades dos alunos, a construção de (novos) conhecimentos matemáticos. No âmbito da modelagem matemática, esse desafio, em certa medida, vem amparado por pesquisas que estabelecem interlocuções com referenciais teóricos diversos (SOUZA; ALMEIDA; KLÜBER, 2018).

Dentre os referenciais teóricos que respaldam análises para inferir sobre a construção do conhecimento, investigar os signos tanto em suas abordagens teóricas quanto sobre em suas funcionalidades (KADUNZ, 2016) têm sido uma possibilidade. Na literatura, investigações que lançam luz à análise de signos em atividades de modelagem são fundamentadas na semiótica de Charles Sanders Peirce (YOON; MISKELL, 2016; SILVA; ALMEIDA, 2017; SILVA; VERONEZ, 2021; RAMOS, 2021; ALMEIDA; SILVA; BRITO, 2022).

A semiótica de Peirce, ou semiótica peirceana, versa sobre a ciência dos signos como meios que uma pessoa (intérprete) tem para se referir, remeter ou indicar uma coisa (objeto), considerando certos aspectos desta coisa sob os quais podem ser produzidos novos signos. Segundo Peirce (1972, p. 27), o signo é “qualquer coisa que admita um ‘interpretante’ - isto é, que seja capaz de dar origem a outros signos”.

Em atividades de modelagem, a produção de signos é inerente à natureza de como elas são encaminhadas no intuito de trazer uma solução para um problema originário de um contexto próximo da realidade. Segundo Almeida e Silva (2017, p. 217), no desenvolvimento de uma atividade de modelagem, “a relação entre signos e conhecimento dos alunos parece se configurar como uma rede em que signos são produzidos ou acionados pelo conhecimento e também geram novo conhecimento”.

Neste sentido, como sugere Hoffmann (2013), sob uma perspectiva semiótica, inferir sobre a construção do conhecimento implica em dirigir a atenção para os signos como meios de pensamento, de raciocínio e de significação. Para Hoffmann (2013), Kadunz (2016) e outros estudiosos da semiótica peirceana, o diagrama é um tipo de signo que revela o conhecimento, pois é produzido por uma pessoa seguindo certas regras em um sistema de representação por ela escolhido. A produção, a experimentação e a observação dos resultados via diagramas viabilizam o raciocínio diagramático, que é uma ferramenta que auxilia na construção de conhecimento.

Uma investigação sobre o raciocínio de alunos ingressantes no nível superior de uma universidade da Nova Zelândia, ao desenvolverem uma atividade de modelagem sobre tamanho de peixes, foi realizada por Yoon e Miskell (2016). A manipulação e a produção de diagramas permitiram aos alunos reconhecerem estruturas matemáticas necessárias para a atividade de modelagem, de modo que compreensões sobre os conceitos de área e volume foram configuradas. As autoras se subsidiaram em ciclos de modelagem para concluir que os alunos, dependendo do estágio que se encontravam no ciclo, construíram diagramas de diferentes formas, desde representações lineares a representações dos peixes, neste caso, de forma tridimensional, em que estabeleceram relações com o conceito de volume.

Ramos (2021) evidenciou que, para desenvolver atividades de modelagem, os alunos de um curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade brasileira construíram diagramas para indicar as informações que consideravam significantes para a resolução do problema. Esses diagramas foram aprimorados na matematização e na resolução do problema por meio do raciocínio diagramático. Assim, “o raciocínio diagramático é essencial em uma atividade de modelagem matemática, uma vez que está relacionado com as ações que são relacionadas durante a atividade” (RAMOS, 2021, p. 146).

Os estudos supracitados tiveram como mote investigar os diagramas e o raciocínio diagramático no âmbito do Ensino Superior. Todavia, reconhecendo a necessidade de “Investimento em estudos que, de alguma forma, dialogam com a educação básica” (SOUZA; ALMEIDA; KLÜBER, 2018, p. 225, tradução nossa), pontuado na literatura brasileira, nos debruçamos em *evidenciar os conhecimentos dos alunos de uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental no desenvolvimento de atividades de modelagem, sob uma interpretação semiótica do raciocínio diagramático* a partir de uma análise dos diagramas por eles produzidos.

As discussões presentes neste artigo levam em consideração entendimentos sobre a modelagem matemática como uma abordagem didático-pedagógica (ALMEIDA, 2022), bem como aspectos relativos ao raciocínio diagramático abarcado na semiótica peirceana como discorreremos nos próximos dois tópicos. Em seguida, elucidamos os aspectos metodológicos para, de modo subsequente, inculcar as análises a partir da descrição do desenvolvimento de duas atividades de modelagem com alunos de uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola particular do Paraná. Apontamentos e implicações são abordados nas considerações finais.

## **SOBRE MODELAGEM MATEMÁTICA**

A literatura, tanto no âmbito nacional quanto internacional, tem pontuado aspectos positivos no que concerne à implementação de práticas de modelagem nos diferentes níveis de escolaridade (ENGLISH, 2006; ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012; VERONEZ; CASTRO; MARTINS, 2018; BURAK; PENTEADO, 2019; NISS; BLUM, 2020; ALSINA *et al.*, 2021; ALMEIDA; SILVA; BRITO, 2022). Como não há uma única caracterização nem um único formato para a sua implementação em sala de aula, a resposta sobre *o que é* modelagem matemática e *como* implementá-la não é direta nem objetiva. Porém, as diferentes caracterizações têm indicado como ponto de partida o estudo de uma situação-problema<sup>3</sup> da realidade.

<sup>3</sup> Denotamos por situação-problema à situação inicial problemática da qual se pode definir um ou mais problemas para ser investigado. O termo problema consiste na questão a ser respondida no encaminhamento da atividade e da qual “o indivíduo não possui esquemas a priori para a sua solução” (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 12)..

Alsina *et al.* (2021, p. 92, tradução nossa) afirmam que a implementação da modelagem matemática desde os primeiros anos escolares “permitirá que as crianças adquiram progressivamente sólidas competências matemáticas, sempre tendo em mente a conexão entre o mundo matemático e o mundo real”. Isso porque, segundo English (2006, p. 188, tradução nossa), “problemas que incluem dados qualitativos e quantitativos podem ajudar os alunos a lidar de forma mais eficaz com informações fora da sala de aula”. Todavia, ainda se configura desafio construir um espaço para que a modelagem matemática esteja presente em sala de aula.

Em um ensaio teórico, Almeida (2022) se propôs a elucidar um *design* para o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática de modo que o espaço supracitado seja uma realidade. Tomando como base que “a *realidade subjacente* às teorizações em modelagem se associa a características distintas que a prática pode ter em função de um contexto e de um domínio de interesse particular” (ALMEIDA, 2022, p. 125, grifos no original), apresentou uma abordagem didático-pedagógica para a modelagem matemática.

Neste *design*, Almeida (2022, p. 141) incluiu dez características que sublinham aspectos didáticos e pedagógicos que se associam ao desafio da implementação da modelagem na sala de aula, visto que podem “ser um indicativo de como professores podem atuar em aulas com modelagem e dar suporte para aqueles ainda com pouca experiência com modelagem em sua prática docente”. As dez características são: (1) autenticidade da situação, (2) natureza do problema, (3) matematisação, (4) uso da matemática, (5) necessidade de tomada de decisão, (6) produção de um relatório, (7) planejamento, (8) trabalho em grupos, (9) familiarização dos alunos e (10) avaliação. Para a autora, essas características colocam em evidência “o como fazer modelagem matemática na sala de aula” (ALMEIDA, 2022, p. 141).

Segundo a autora, as características (1) e (2) dizem respeito à natureza da atividade de modelagem e podem estar atreladas tanto ao caráter didático quanto ao pedagógico da abordagem. Especificamente ao caráter didático estão relacionadas as ações dos alunos que se fazem presentes, principalmente, nas características (3) a (6). No que tange ao caráter pedagógico, as características (7) a (10) sinalizam o agir do professor defronte da implementação das práticas de modelagem.

Ponderamos que é no caráter didático que se mostra o viés matemático cujo objetivo é chegar a uma solução para um problema de modelagem. Isso decorre do fato de que as características se aproximam dos apontamentos de Stillman (2015), quanto ao que os alunos fazem quando se envolvem no desenvolvimento de uma atividade de modelagem, quais sejam:

- (a) formular uma questão específica a ser respondida matematicamente, (b) especificar suposições, (c) identificar as informações ou variáveis importantes, (d) modelar diferentes aspectos das relações, (e) gerar relações, (f) reconhecer padrões e relações, (g) selecionar relações, (h) fazer estimativas, (i) validar resultados, (j) interpretar resultados e (k) comunicar resultados (STILLMAN, 2015, p. 47, tradução nossa).

De forma geral, essas ações estão em consonância com o que a literatura convencionou caracterizar por matematisação, que consiste no processo de tradução da situação do mundo real na linguagem matemática (JABLONKA; GELLERT, 2007; ALMEIDA, 2018). Galbraith (2012) entende que, na matematisação, é feita a formulação de hipóteses e a definição de variáveis que subsidiam a construção do modelo matemático. Ferri (2006) afirma que a matematisação vai se aperfeiçoando à medida que os alunos avançam no desenvolvimento da atividade de modelagem matemática em que

há articulação entre conhecimentos matemáticos e extramatemáticos sobre o fenômeno em estudo. Corroboramos com Almeida (2018), ao considerar três objetivos sobre a matematização e os usos da Matemática em atividades de modelagem:

- (a) Podem ser o motivo pelo qual os alunos contemplem o uso de matemática que já conhecem;
- (b) Podem requerer, de alguma forma, conceitos ou procedimentos matemáticos ainda não conhecidos, que o professor pode introduzir por meio da atividade;
- (c) Há uma necessidade de incluir uma avaliação do uso da matemática na atividade, demonstrando que o conhecimento matemático e o conhecimento sobre a situação estão ligados (ALMEIDA, 2018, p. 28, tradução nossa).

Neste sentido, um dos intuitos da implementação da modelagem em sala de aula é “apoiar o aprendizado da matemática, oferecendo motivação para seu estudo, bem como interpretação, significado, compreensão adequada e retenção sustentável de seus conceitos, resultados, métodos e teorias” (NISS; BLUM, 2020, p. 28, tradução nossa). Com isso, em uma atividade de modelagem, a situação-problema, oriunda da realidade, precisa permitir uma abordagem matemática. Nesta abordagem matemática podem ser evidenciados os conhecimentos dos alunos.

De fato, a Matemática é uma ciência que faz uso de signos para expressar os objetos matemáticos. Assim, o conhecimento matemático é construído por meio de linguagem matemática, subsidiada por imagens e símbolos. Desta forma, a semiótica de Peirce como meio de análise dos signos pode ser introduzida como um instrumento para descrever aspectos do conhecimento matemático.

Neste artigo, voltamos nossa atenção para os signos produzidos por alunos de uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental quando desenvolvem atividades de modelagem matemática para evidenciar a construção do conhecimento matemático. Todavia, lançamos atenção para um certo tipo de signo - os diagramas, no sentido semiótico de Peirce - com o objetivo de evidenciar o raciocínio diagramático quando desenvolvem atividades de modelagem. Em uma perspectiva da semiótica peirceana, “o diagrama pode ser interpretado como um ‘andaime’ que o aprendiz construiu para se ajudar em uma situação que é muito complexa para ele gerenciar sozinho” (HOFFMANN, 2013, p. 121, grifo no original).

## **SOBRE RACIOCÍNIO DIAGRAMÁTICO NA SEMIÓTICA PEIRCEANA**

As diferentes abordagens teóricas sobre semiótica asseveram que os signos são basicamente meios para significar um objeto ou meios para representar algo para alguém. No que diz respeito à semiótica peirceana, entretanto, um aspecto central é a ênfase em outras funções fundamentais dos signos: os signos como meios de pensamento, de compreensão, de raciocínio e de aprendizado (HOFFMAN, 2005). A partir desse aspecto central, Peirce se engajou em uma estruturação teórica para abarcar a importância dos signos.

Neste artigo, focamos nossa atenção em alguns aspectos da abordagem semiótica de Peirce. Em particular, nos referimos ao conceito de raciocínio diagramático no contexto da semiótica peirceana. Coadunando com as ideias de Peirce, Hoffmann (2005) argumenta que, com esse conceito, pode-se explicar o desenvolvimento do conhecimento com base em uma atividade organizada em três etapas: construir diagramas, experimentá-los e observar os resultados.

No entanto, antes de discorrermos sobre o raciocínio diagramático, precisamos levar em consideração os entendimentos para o tipo de signo que o subsidia - o diagrama. O diagrama é

um “representamen que é predominantemente um ícone de relações e é auxiliado por convenções” (HOFFMANN, 2005, p. 46, tradução nossa). O ícone corresponde a um tipo de signo que sugere ou evoca seu objeto. A qualidade que ele exhibe se assemelha a uma outra qualidade. Por exemplo, a imagem da montanha em uma foto tem alguma semelhança com a aparência da montanha, daí temos um ícone.

Peirce também se refere aos diagramas como índices ou símbolos, porém o mais importante é o caráter icônico dos diagramas. Para Peirce (2005), o índice é um tipo de signo que indica seu objeto pela existência concreta. A imagem da montanha apresentada na foto pode se configurar como um índice, a partir da conexão de existência entre a foto e a montanha. Um símbolo representa seu objeto, representa aquilo que a lei determina para que ele representa. Se considerarmos que a foto da montanha representa todas as montanhas, então ela é um símbolo desse objeto - a montanha.

Considerando o caráter icônico dos diagramas, entendemos que eles são ícones que são construídos seguindo certas regras e podem, assim, mostrar relações, pois são produzidos sobre um sistema consistente de representação. O diagrama indica uma similaridade com seu objeto pelas relações internas e não no nível das aparências. Segundo Hoffmann (2013, p. 103, grifo no original) “sistemas axiomáticos em matemática também são sistemas consistentes de representação, e nossas linguagens diárias são também sistemas representacionais, apesar de não serem necessariamente ‘consistentes’”.

Uma representação gráfica e uma tabela são exemplos de diagramas do objeto função, por exemplo. Dessa forma, o diagrama pode ser entendido como um tipo de signo que “por um lado, representa uma ideia e, por outro, estimula um significado na mente de um intérprete” (RIBEIRO, 2021, p. 263). A ideia sobre o objeto função representada no gráfico não é a mesma que a representada na tabela, todavia ambos diagramas trazem significados para o referido objeto.

A partir dos diagramas como um tipo especial de ícones, podemos realizar experimentos ao aprender matemática. Ao representar um problema em um diagrama, as pessoas podem experimentar seus meios cognitivos e, dessa forma, fazer experimentos e construir novos conhecimentos, configurando o raciocínio diagramático.

Kadunz (2016), assim como Hoffmann (2013), pondera que, ao aprender matemática por meio desse raciocínio, na primeira etapa deve-se construir um diagrama (por exemplo: um esboço gráfico da função exponencial para resolver um problema) para, em seguida, realizar experimentos sobre este diagrama (por exemplo, ao gráfico da função exponencial pode ser associada uma expressão algébrica). Finalmente, em uma terceira etapa, os resultados do experimento podem ser explorados e novas relações podem ser percebidas ou visualizadas (por exemplo, analisar o comportamento assintótico da função exponencial). É justamente dessa forma que Kadunz (2016, p. 119, tradução nossa) se refere à afirmação de Peirce de que um diagrama construído por um matemático “coloca diante dele um ícone por cuja observação ele detecta relações entre as partes de um diagrama diferentes daquelas que são usadas na construção”.

Hoffmann (2013), a partir dos processos cognitivos que estão envolvidos no raciocínio diagramático de uma pessoa para resolver problemas, para lidar com complexidade, para aprender algo novo, ou para resolver conflitos, afirma que a função principal do raciocínio diagramático é “facilitar processos de pensamento individuais ou sociais em situações que são complexas demais para serem conduzidas exclusivamente por meios cognitivos internos” (HOFFMANN, 2013, p. 106).

Neste sentido, sob um “ponto de vista epistemológico, a essência do raciocínio diagramático pode ser vista no fato de que ele oferece a base para abstrações hipostáticas - meios cognitivos que podem ser usados e desenvolvidos em um raciocínio diagramático posterior” (BAKKER; HOFFMAN,

2005, p. 353, tradução nossa), visto que possui um aspecto genérico e podem ser interpretados em um sentido relacional (DÖRFLER, 2005).

O raciocínio diagramático, nesta perspectiva, “permite reduzir o custo cognitivo na solução de problemas individuais e colaborativos, em tomadas de decisão e em conflitos de gerenciamento por meio de representações externas” (HOFFMANN, 2013, p. 107). Esses procedimentos se fazem presentes em atividades de modelagem matemática em que os alunos, para tomar decisões, utilizam diagramas para expressar seus pensamentos seja por meio de um esquema, de um gesto, de uma expressão algébrica e podem revelar seus conhecimentos seja no âmbito do fenômeno em estudo, seja no âmbito dos objetos matemáticos que dele emergem.

## **SOBRE A PESQUISA DESENVOLVIDA**

De modo a evidenciarmos os conhecimentos dos alunos de uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental no desenvolvimento de atividades de modelagem, nos respaldamos em uma interpretação semiótica do raciocínio diagramático a partir de uma análise dos diagramas por eles produzidos. Tais diagramas são revelados em duas atividades de modelagem a partir de signos escritos, falados e gesticulados por oito alunos de uma turma do 9º ano de uma escola particular localizada no norte do Paraná.

Ambas atividades foram desenvolvidas no final do terceiro trimestre letivo de 2021, nas aulas de Matemática, mais especificamente no mês de dezembro. Desse modo versam sobre um tema que estava em discussão pelos alunos - a formatura do 9º ano. A primeira atividade, denominada por *Pizza*, foi desenvolvida no dia 14 de dezembro de 2021, em três aulas de 50 minutos cada. Os alunos escolheram investigar sobre diferentes tamanhos de *pizzas* que correspondiam ao cardápio da comemoração entre os colegas para determinar a quantidade de massa ingerida a partir de um pedaço de *pizza*. Já a segunda atividade, *Salto alto*, originou-se da sessão de fotos com becas, em que os alunos discutiram sobre a altura que alguns apresentavam devido ao uso de um sapato não convencional no dia a dia nas aulas. Essa atividade foi desenvolvida no dia 16 de dezembro de 2021, em três aulas de 50 minutos cada.

Considerando nosso interesse em analisar o raciocínio diagramático, houve necessidade de realizar gravações em áudio e vídeo das abordagens feitas pelos alunos, e necessidade de também olhar para as anotações que foram escritas pelos alunos no desenvolvimento da atividade. Antes de realizar esse procedimento, foi solicitado aos pais ou aos responsáveis a assinatura de um termo livre e esclarecido, consentindo a coleta de dados. A escola também autorizou o desenvolvimento das atividades e permitiu que os alunos frequentassem outros ambientes da escola, além da sala de aula.

As falas foram transcritas na íntegra, bem como foram descritas as ações que correspondiam a diagramas. Os nomes que aparecem no corpo do texto são fictícios para manter o anonimato dos alunos. Além das transcrições e das descrições, registros de fotos e de anotações dos alunos constituíram os dados para a análise qualitativa.

A análise qualitativa que realizamos é subsidiada no processo de triangulação. Uma “pesquisa firmada na triangulação prevê os diversos ângulos de análise, as diversas necessidades de recortes e ângulos para que a visão não seja limitada e o resultado não seja restrito a uma perspectiva” (TUZZO; BRAGA, 2016, p. 141). Segundo Tuzzo e Braga (2016, p. 152, grifos no original), “a partir dos vértices *objeto*, *sujeito* e *fenômeno*, com importância fundante ao *metafenômeno*”, obtêm-se os resultados. Na pesquisa que realizamos, os *sujeitos* são os oito alunos do 9º ano, os diagramas correspondem ao *objeto* investigado e o raciocínio diagramático é o *fenômeno*. O *metafenômeno* diz respeito à

construção do conhecimento, em que o fenômeno é articulado ao quadro teórico que subsidia a investigação, conforme movimento analítico apresentado no próximo tópico.

## **SOBRE AS ANÁLISES DAS ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA**

### **Atividade sobre a massa de *pizza***

O investimento no estudo da situação sobre a massa de *pizza* foi subsidiado em trazer uma solução para o problema: *Qual a melhor opção entre os diferentes tamanhos de pizza para que os alunos comam um pedaço e na hora que cada um comer ingira a maior fatia de massa possível?* Para materializar o contato com a situação em estudo, a professora disponibilizou massas de *pizzas* de três diferentes tamanhos - broto (com 4 pedaços), grande (com 8 pedaços) e *big* (com 12 pedaços). Os alunos manusearam as massas de modo que pudessem associá-las a um objeto matemático sob o qual poderiam trazer uma solução para o problema.

Uma primeira simplificação foi considerar a massa como um círculo de modo que, ao determinar sua área, seria possível estabelecer a quantidade de massa. Essa simplificação decorreu após os alunos analisarem os diferentes tamanhos de massa e perceberem que tinham espessuras próximas. Logo a espessura não seria uma variável relevante para a quantidade de massa de *pizza* ingerida. Essa tomada de decisão entre os alunos partiu do contato manual com as *pizzas* de diferentes tamanhos e espessuras próximas e oportunizou a eles “conhecer as características e especificidades da situação” (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 15), permitindo as simplificações.

Os alunos realizaram medições dos diferentes tamanhos de massas e indicaram a localização do possível centro de cada uma delas. De modo intuitivo, Pablo localizou o centro da massa da *pizza* em que os pedaços iriam coincidir quando a massa fosse cortada. O que podemos inferir é que essa ação reforça a hipótese de considerar a massa da *pizza* como um círculo, conforme transcrição a seguir:

*Pablo: Vai medir o diâmetro da pizza.*

*Professora: E o que é o diâmetro?*

*Lúcia: É a distância daqui até aqui. [mostrou o local]*

*Pablo: É a distância passando pelo centro.*

*Professora: A distância passando pelo centro, muito bem!*

*Renato: Dá para dividir 360 por 12 e dá para descobrir o ângulo aqui [se referindo a cada pedaço], aí depois que você tem esse ângulo, você vai descobrir o pedaço.*

*Professora: Mas aí a gente vai ter uma área de qualquer polígono?*

No excerto supracitado ficou evidente que os alunos identificaram que as massas poderiam ser medidas por meio do *diâmetro*, portanto, o centro seria necessário, conforme indicações gestuais feitas pelos alunos (Figura 1). Os alunos, então, com uma fita métrica mediram o diâmetro de cada uma das massas: broto com 24 cm; grande com 34 cm e *big* com 40 cm. A temática implementada, de certo modo, oportunizou aos alunos “experenciarem dados complexos em contextos desafiadores e, ainda, significativos” (ENGLISH, 2010, p. 288, tradução nossa), pois retomaram conhecimentos matemáticos estudados na disciplina, como elementos de um círculo e maneiras para a obtenção de sua área.

**Figura 1** - Gestos do aluno indicando o corte na *pizza*.



Fonte: captura de imagem da filmadora.

Com a definição de que seriam feitos os cortes nas *pizzas*, os alunos, reunidos em três grupos, cada qual com um tamanho de massa - broto, formado por Eliana e Vicente; grande, formado por Mariana, Manuela e Pablo; *big*, formado por Lúcia, Gabriela e Renato -, localizaram o centro e cortaram-nas. A quantidade de pedaços para cada tamanho de massa seguiu o padrão feito na *pizzaria*: 4 (broto), 8 (grande) e 12 (*big*). Após os cortes, cada pedaço adquiriu um novo formato (Figura 2a) que os alunos representaram em seus registros escritos (Figura 2b). Não obstante, uma abordagem matemática se faria necessária - considerar a área desse novo formato -, conforme diálogo transcrito a seguir:

*Professora: O que virou essa fatia da pizza?*

*Pablo: Triângulo?*

*Professora: Será que é um triângulo?*

*Pablo: Não!*

*Professora: Por que não é um triângulo?*

*Pablo: Porque a borda é torta assim [mostrou a representação - Figura 2c].*

De imediato, uma figura bidimensional que veio à mente de Pablo foi a representação de um triângulo, ou seja, a representação da fatia de *pizza* em um primeiro momento evocou esse objeto matemático. Porém, a intervenção da professora inviabilizou essa sugestão, fazendo com que Pablo recuasse na sua indicação. Com essa intervenção, a professora incluiu “uma avaliação do uso da matemática na atividade, demonstrando que o conhecimento matemático e o conhecimento sobre a situação estão ligados” (ALMEIDA, 2018, p. 28, tradução nossa).

As atividades de modelagem podem proporcionar aos alunos a “oportunidade de especular, testar ideias, argumentar e defender conjecturas” (ALMEIDA, 2022, p. 138). No entanto, o raciocínio diagramático possibilitado pela observação da representação dos gestos, fez com que Pablo recuasse e analisasse se esse indicava um triângulo.

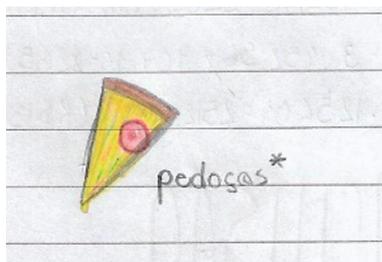
O aluno, então, mudou a caracterização do formato, segundo as bordas do pedaço de *pizza*, por meio de gestos, os quais sugeriram o objeto matemático *setor circular* (Figura 2b). Corroboramos com Hoffmann (2013, p. 51) que “a construção desses diagramas é motivada pela necessidade dos alunos de representar relações que considerem importantes em um problema”. Olhar para o diagra-

ma materializado na fatia de massa de *pizza* e construir um novo diagrama (gestual) potencializou o raciocínio diagramático de Pablo.

**Figura 2** - Diagramas produzidos para representar o setor circular.



(a)



(b)



(c)

Fonte: dados da pesquisa.

Assim, o próximo procedimento, segundo encaminhamentos feitos pelos alunos para o desenvolvimento da atividade, foi a responsabilidade de cada grupo determinar a área do setor circular para a fatia relativa a cada tamanho de massa (broto, grande ou *big*). Para isso, buscaram no material didático formas para calcular esse valor e chegaram na expressão algébrica da área do setor circular, em que  $r$  é o raio do círculo e  $\theta$  é o ângulo que representa o setor, dado em graus. O reconhecimento de que já haviam estudado sobre área do setor circular mobilizou o que Peirce chama de conhecimento colateral, sob o qual os alunos estabeleceram relações para a resolução do problema.

*Eliana: Área de um pedaço.*

*Professora: Mas esse cálculo vai indicar o que para nós sobre os outros pedaços?*

*Renato: Todos iguais.*

*[...]*

*Professora: E será que temos todos os pedaços exatamente iguais aqui?*

*Manuela: Não.*

*Professora: Talvez. E aí, como verificaremos se temos ou não?*

*Renato: Fazendo o cálculo da área do setor. Porque da área do setor, temos um pedaço aqui.*

*Pablo: Um pedaço de pizza.*

De forma aleatória, cada grupo escolheu um pedaço como modelo, considerando que todos tinham o mesmo tamanho, pois os alunos utilizaram-se de instrumentos de medidas (régua e fitas métricas) para realizar a divisão das *pizzas* inteiras. No entanto, um impasse foi gerado com a expressão do cálculo da área do setor circular: a necessidade da medida do ângulo. Os alunos então consideraram utilizar o transferidor que tinham entre seus materiais escolares. A medida do ângulo de cada setor circular foi determinada: para a *pizza* broto, o ângulo foi  $93^\circ$ ; já para a *pizza* grande, o ângulo do setor circular do modelo de pedaço foi de  $48^\circ$ ; e o ângulo do setor representado pelo modelo de pedaço da *pizza big* foi de  $35^\circ$ . No Quadro 1, apresentamos os registros de cada um dos

grupos com o cálculo da área do setor utilizando os ângulos encontrados por meio do pedaço modelo de cada tamanho de *pizza*.

**Quadro 1** - Cálculo feito pelos grupos da área do setor circular das *pizzas*.

Pizzas	Broto	Grande	Big
Medição realizada			
Área do setor circular	$A_{\text{setor}} = \frac{452,16 \cdot 93^\circ}{360^\circ}$ $A_{\text{setor}} = 116,808$	$A_{\text{setor}}: \frac{3,14 \cdot 17^2 \cdot 48}{360^\circ}$ $A_{\text{setor}}: 121 \text{ cm}^2$	$A_s: \frac{1256 \cdot 35^\circ}{360}$ $A_s: 122,12 \text{ cm}^2$

Fonte: dados da pesquisa.

De acordo com os resultados obtidos pelos alunos e sintetizados no Quadro 1, concluiu-se que a área do pedaço da *pizza* broto é  $116,808 \text{ cm}^2$ , a área do pedaço da *pizza* grande é de  $121 \text{ cm}^2$  e a área do pedaço da *pizza* big é de  $122,12 \text{ cm}^2$ . Podemos evidenciar que os grupos optaram por realizar aproximações nos resultados obtidos. O grupo da *pizza* broto fez aproximação para três casas decimais; o grupo da *pizza* grande optou por aproximar a área a um número inteiro; já o grupo responsável pelo cálculo da área do setor circular da *pizza* big fez uma aproximação por duas casas decimais. Essa ação denota que, em uma atividade de modelagem, os alunos podem escolher como apresentar uma solução para o problema.

Assim, para a solução do problema, a maior quantidade de massa estava presente no pedaço de *pizza* big. Para validar esse resultado, os alunos calcularam a massa do círculo associado a cada tamanho de massa e a dividiu pela quantidade de fatias, obtendo resultados aproximados. De fato, a hipótese *a priori* de que a *pizza* big era a que teria maior área de massa acompanhava as discussões iniciais dos alunos. Com os cálculos realizados, foi possível apresentar uma argumentação matemática de modo a defender suas conjecturas.

Os diagramas iniciais produzidos pelos alunos por meio da manipulação da fatia de *pizza*, por um desenho ilustrativo e por gestos, em certa medida, facilitaram a comunicação entre os alunos e os “processos de pensamento individuais ou sociais em situações que são complexas demais para serem conduzidas exclusivamente por meios cognitivos internos” (HOFFMANN, 2013, p. 106). No entanto, com a tomada de decisão sobre a que objetos matemáticos são indicados por esses diagramas,

experimentações foram implementadas de modo que diagramas mais sofisticados, como a expressão algébrica da área do setor circular, fossem produzidos. Ou seja, a produção e a experimentação com diagramas que indicavam o objeto setor circular se intensificaram quando os alunos resolveram o problema subsidiado na expressão para o cálculo da área.

### Atividade sobre salto alto

No dia da sessão de fotos para o álbum de formatura, os alunos estavam com sapatos diferentes dos que habitualmente utilizavam nas aulas. A professora percebeu que estavam discutindo sobre a altura entre eles e fez alguns questionamentos para inferir sobre o interesse dos alunos e vislumbrar o desenvolvimento de uma atividade de modelagem:

*Professora: E aí pessoal, me diga: por que a curiosidade pelo “salto alto”?*

*Renato: Eu sou pequeno, mas sou mais alto que a Gabriela, e no dia da foto com a beca ela estava mais alta que eu! Dava para ver que algo mudou, era perceptível!*

*Lúcia: Ela cresceu uns 10 centímetros ou mais.*

Essa atividade iniciou-se desde o momento em que os alunos manifestaram o interesse de estudo pelo tema para analisar a altura da colega Gabriela na sessão de fotos da turma. De acordo com Almeida (2022), uma das características relativas à natureza de uma atividade de modelagem é a autenticidade, é uma construção social, pois “a situação não precisa, necessariamente, estar no dia-a-dia do aluno” (ALMEIDA, 2022, p. 135), mas também precisa atender a anseios de uma realidade que o circunda. Entretanto, os alunos ainda não haviam definido um problema para ser investigado.

Para dar continuidade à investigação, os alunos começaram a se organizar para a obtenção de informações. Algumas fotos - Figura 3 - foram registradas para uma análise do posicionamento dos pés nos diferentes sapatos com diferentes alturas, como: 10 cm, 8 cm e 6 cm. Com a observação das fotos, os alunos estruturaram um problema a ser investigado: *Qual o tamanho do salto que é possível se equilibrar e andar?* É por meio da interação qualitativa e quantitativa com a situação-problema que abordagens matemáticas podem ser vislumbradas em uma atividade de modelagem.

**Figura 3** - Sapatos utilizados na coleta de dados.



Fonte: arquivo da professora.

Definido o problema, as primeiras considerações e hipóteses foram estruturadas em diálogo entre a turma:

Pablo: Eu acho que uma pessoa que calça 40 vai conseguir usar um salto maior do que uma pessoa que calça 30, por causa de como vai ficar no pé. Eu acho que o tamanho do pé irá influenciar.

Professora: Mais alguma coisa?

Pablo: *Eu só sei que assim* [aluno faz gesto com as mãos - Figura 4a] *ele fica mais confortável, do que assim* [outro gesto - Figura 4b] *com o salto maior, salto muito grande vai ficar muito torto* [pé no sapato] *ou não ficará confortável.*

[...]

Lúcia: *Já sei, vamos ver o tamanho do sapato então que a pessoa consegue usar de acordo com os pés.*

Enquanto falavam, os alunos estavam buscando meios para escrever as informações em linguagem matemática, delineando um problema que pudesse oportunizar uma transição entre a situação e a matemática. Essa discussão reestruturou o problema inicial para: *Que tamanho do salto a pessoa consegue usar de acordo com os pés?* Isso atrela a necessidade de se “formular uma questão específica a ser respondida matematicamente” (STILLMAN, 2015, p. 47, tradução nossa).

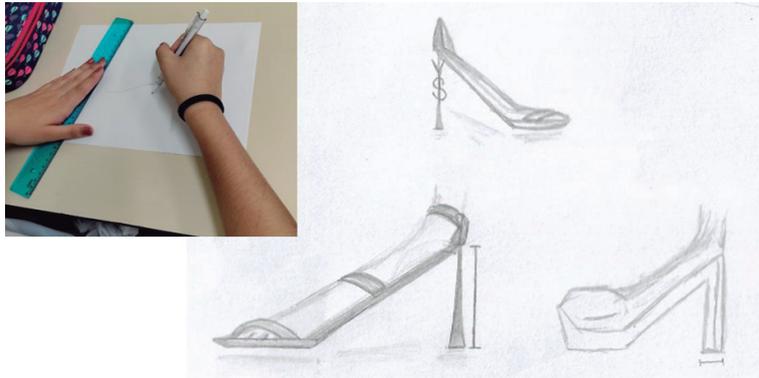
**Figura 4** - Gestos de Pablo enquanto falava sobre o posicionamento dos pés.



Fonte: captura de imagem da filmadora.

A partir dos apontamentos de Pablo e Lúcia, a aluna Eliana sugeriu que poderiam desenhar um sapato para ajudar a visualizar a situação (Figura 5), estruturando uma estratégia para a investigação. Com isso, organizaram “um pensamento diagramático para resolver problemas, para lidar com complexidade, para aprender algo novo, ou para resolver conflitos” (HOFFMANN, 2013, p. 105).

**Figura 5** - Desenhos feitos pelos alunos na coleta de dados.



Fonte: dados da pesquisa.

A construção desses diagramas foi “motivada pela necessidade dos alunos de representar relações que consideravam importantes em um problema” (RAMOS, 2020, p. 53). Os desenhos auxiliaram os alunos a identificarem as características dos sapatos, principalmente o tamanho do salto que cada colega estava imaginando. Logo, os alunos construíram diagramas por meio de um sistema representacional para se ajudar em uma situação que, aparentemente, era complexa para poderem gerenciar sem a presença de um diagrama (HOFFMANN, 2013).

Uma das características que se destacou nos diagramas produzidos para representar os sapatos foi a presença de um padrão para a inclinação dos saltos que poderia sugerir uma abordagem para o objeto matemático ângulo. O que podemos conjecturar foi que os alunos evidenciaram os ângulos que estavam diretamente relacionados com o salto. No excerto a seguir, ficou evidente que os alunos retomaram as classificações dos ângulos conforme o tamanho dos possíveis saltos:

*Pablo: Se o ângulo for menor que  $90^\circ$ , vai ser bom, se for maior que  $90^\circ$  não será, é o ângulo reto.*

*Vicente: Mas o que a gente tá pensando tem a ver com agudo e obtuso, não com ângulo reto.*

*Lúcia: Agudo é porque é menor que  $90^\circ$  e obtuso é porque é maior que  $90^\circ$ .*

*Professora: Mas onde seria esse possível ângulo que você está falando?*

*Pablo: Aqui oh [apontou na Figura 5 indicando o ângulo formado entre a base apoiada do pé até o salto no calcanhar]. Porque sei lá, se for um ângulo de  $2^\circ$  será um salto bem baixo.*

*Vicente: Não, aí não tem salto, será grudado no pé.*

Quando um aluno “constrói um diagrama, ele está diante de um ícone cuja observação possibilita evidenciar relações além daquelas estabelecidas na construção do diagrama” (RAMOS, 2020, p. 53). O aluno Pablo destacou as relações que identificou nos sapatos por meio dos comentários e dos gestos feitos para explicar o que falava aos colegas. Com isso, evidenciamos que ele identificou uma informação sobre um dos ângulos ser importante na altura do salto e buscou entender em que consistia essa informação levantando as características possíveis. Durante o desenvolvimento, comentários de outros alunos, como o de Vicente (*Mas o que a gente tá pensando tem a ver com agudo e obtuso, não com ângulo reto*), destacaram informações relevantes sobre a temática investigada, pois não era viável um pé ficar sobre um salto na posição de ângulo reto.

No desenvolvimento da atividade, a professora auxiliou os alunos respondendo algumas perguntas, entretanto já estava perceptível, conforme o excerto a seguir, que alguns deles já estavam mais familiarizados com os procedimentos a seguir para a resolução de um problema em uma atividade de modelagem:

*Pablo: Eu já levantei a hipótese hein? Agora vocês precisam me ajudar a pensar.*

*Eliana: Bom, se o salto é pequeno, o pé fica mais deitado; se o salto é gigante, o pé fica mais em pé. [...]*

*Vicente: A gente tá pensando em um triângulo!*

*Pablo: Professora, já sei! Teve um conteúdo que você fez com a gente uma vez que era um prédio e no prédio tinha uma escada apoiada, e a escada iria deslizar, é este mesmo conceito!*

Os alunos já estavam caminhando para o uso da linguagem matemática, pois em atividades de modelagem matemática conteúdos já conhecidos podem ser ativados na resolução da atividade (NISS; BLUM, 2020). Podemos evidenciar que Pablo apresentou a ideia de associar a escada apoiada na parede ao salto do sapato e o diálogo entre os alunos fez com que ele pudesse dar continuidade na hipótese que havia levantado. Para a resolução de uma atividade de modelagem, as hipóteses formuladas são importantes, pois podem ser “uma proposição que admite um princípio a partir do qual um conjunto de consequências pode ser deduzido” (ALMEIDA; SOUZA; TORTOLA, 2021, p. 71, tradução nossa). A “elaboração de hipóteses requer a construção de diagramas, o que caracteriza a primeira etapa do raciocínio diagramático, a construção de um ou mais diagramas” (RAMOS, 2020, p. 63).

A analogia do sapato de salto com a escada encostada na parede promoveu a construção de um novo diagrama (Figura 6) com o intuito de experimentar e observar o que estavam discutindo. Trata-se de, a partir dos diagramas anteriores (representações de tipos de sapatos de salto alto), realizar experimentações para “sair” do contexto real e migrar para estruturas matemáticas.

**Figura 6** - Desenhos feitos pelos alunos na coleta de dados.



Fonte: relatório dos alunos.

Todavia, a observação do novo diagrama, já em uma estrutura mais abstrata, sinalizou que não seria possível apresentar uma solução para o problema. Dados numéricos eram necessários para saber a altura de um salto que o pé poderia se sustentar. Os alunos, então, sugeriram fazer simulações das possíveis alturas do salto (Figura 7) que, supostamente, um pé sustentaria. Mariana se propôs a fazer as simulações enquanto os outros colegas da sala realizavam as medições.

**Figura 7** - Momento em que os alunos fazem simulações e coletam dados de Mariana.

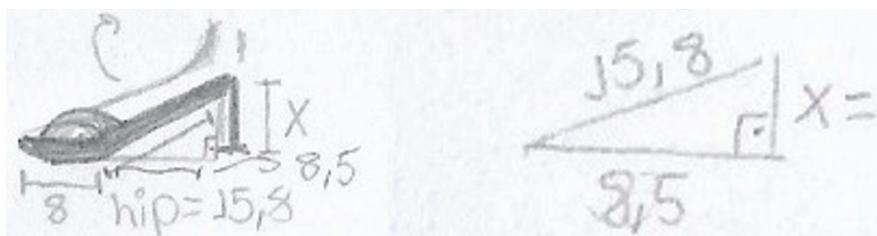


Fonte: arquivo da professora.

Na coleta de dados, os alunos perceberam que deveriam levar em consideração o tamanho do pé (Figura 7a) e a parte de apoio do sapato (Figura 7b), visto que os tamanhos variavam. A medida do comprimento do pé de Mariana em repouso no chão foi de 23,8 cm, já a parte frontal que sustenta o pé no sapato de salto (parte de apoio) foi de 8 cm. Os alunos também mediram a distância entre o salto e o início da parte de apoio do pé (Figura 7c), obtendo 8,5 cm. A partir dessas medidas, consideraram por hipótese, que a medida 8 cm seria a menor base (parte de apoio) suportada por Mariana.

Com isso, fizeram indicações nos diagramas (Figura 8), agora com as medidas coletadas, recorrendo a um recurso visual, pois “é mais fácil lidar com informação visual, e que ela cumpre um importante papel na comunicação e na aprendizagem” (HOFFMANN, 2013, p. 104). No primeiro diagrama, ainda estava presente o perfil do sapato sob o qual foram inseridas as medidas. Os alunos, então, considerando abstrair parte desse diagrama evocando uma estrutura matemática, produziram um novo diagrama representando um triângulo retângulo com indicação das medidas coletadas, em que a hipotenusa (15,8 cm) foi obtida subtraindo a parte de apoio (8 cm) do tamanho do pé de Mariana (23,8 cm).

**Figura 8** - Diagramas com indicações das medidas.



Fonte: relatório dos alunos.

Nos diagramas, ficou evidente que os alunos optaram por associar a altura do salto ao cateto de um triângulo retângulo, desconsiderando a parte de apoio do pé no sapato. Os alunos, então, utilizaram o teorema de Pitágoras, realizaram experimentação no diagrama para chegar à medida de 13,32 cm, medida máxima do salto que a aluna suportaria.

Todavia, os alunos ainda estavam interessados em confrontar ou confirmar a hipótese apresentada por Pablo no início da abordagem matemática para o problema: *Eu acho que uma pessoa que calça 40 vai conseguir usar um salto maior do que uma pessoa que calça 30*. Dentre os colegas, Pablo era o que tinha o pé de maior comprimento em repouso no chão (27 cm). Em seu caso, foi considerada uma base de apoio de 8,5 cm, da qual a hipotenusa do triângulo retângulo mediu 18,5 cm; a distância entre o salto e o início da base de apoio do pé (cateto do triângulo) foi medida, obtendo-se 10,5 cm. Os alunos, então, realizaram os mesmos procedimentos, resultando que o salto máximo deveria ser de até 15,23cm. Assim, a hipótese de Pablo foi confirmada.

O problema motivou os alunos a construírem um diagrama seguindo certas regras (Figura 6). A primeira abordagem apresentada na Figura 6 proporcionou aos alunos a experimentação com diagramas, em busca de dados quantitativos. O raciocínio diagramático colocou em ênfase os conhecimentos dos alunos sobre o fazer modelagem em que promoveram coletas e estabeleceram hipóteses. De fato, com essas ações estabelecidas, um dos alunos imediatamente reestruturou o diagrama (Figura 8) para associá-lo a estruturas matemáticas - triângulo retângulo - que permitissem chegar a uma solução para o problema. Esse procedimento serviu como organização de encaminhamentos para a análise da altura do salto para um pé de tamanho maior.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Trazer evidências sobre a construção de conhecimentos de alunos no desenvolvimento de atividades de modelagem pode se configurar um desafio para os professores. Porém, uma análise semiótica do raciocínio diagramático apresenta potencialidades quando nos atentamos para a construção, a manipulação e a observação dos diagramas pelos alunos. Como assevera Kadunz (2016, p. 124, tradução nossa), a “construção e o uso de diagramas podem ser vistos como uma fonte possível de novo conhecimento” ou mesmo para evidenciar conhecimento já estudado anteriormente.

De fato, nas duas atividades de modelagem desenvolvidas com uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental, foram evidenciados conhecimentos já estudados anteriormente, coadunando com o objetivo de que a matematização e os usos da Matemática em atividades de modelagem podem se configurar como “o motivo pelo qual os alunos contemplem o uso de matemática que já conhecem” (ALMEIDA, 2018, p. 28, tradução nossa). No contexto das situações-problema em estudo - massa da *pizza* e altura do salto -, os conhecimentos se mostraram de modo conectado com a realidade que os alunos estavam vivenciando - a formatura.

Diante de cada um dos problemas que foram elaborados no desenvolvimento das atividades, os alunos procuraram estratégias para solucioná-los. Para tanto, produziram e transformaram diagramas a partir de um sistema de representação escolhido no momento do desenvolvimento de cada atividade, seja por meio de simplificações quando consideraram a massa da *pizza* como um círculo e a fatia como um setor circular; seja por simulações para identificar a altura máxima do salto do sapato que um pé sobre a base de 8 cm e sobre a base de 8,5 cm suportaria. Os conhecimentos revelados, via raciocínio diagramático, indicaram que os alunos buscaram implementar o que haviam estudado durante o ano letivo para obter soluções para os problemas.

A maior quantidade de massa de *pizza* a ser ingerida foi considerada a partir do cálculo de área, desde que a espessura não interferisse nos resultados. Área do círculo e área do setor circular foram conhecimentos matemáticos acionados a partir dos diagramas produzidos via corte da *pizza*, representação por meio de um desenho e gestos. Já no que diz respeito à altura do salto que um pé

suportaria, foi calculada por meio de simulações em que medidas de bases de apoio mínimas, comprimentos de pés em repouso no chão e distâncias de bases de apoio até os saltos delinearão diagramas que os alunos construíram a partir de observações e esquematizações de sapatos de salto. Parte destes diagramas foi associada a um triângulo retângulo e os conhecimentos sobre o teorema de Pitágoras deram subsídios para a obtenção da solução.

No contexto da manipulação e da observação dos diagramas, os alunos tiveram de tomar decisões que permitissem chegar a uma solução para o problema. A tomada de decisão, enquanto uma característica didática conforme aponta Almeida (2022), deu a oportunidade de os alunos implementarem ideias, expressarem o que estavam pensando de forma argumentativa e defenderem suas conjecturas. A tomada de decisão vai para além de uma ação para o desenvolvimento da atividade de modelagem, pois direciona as ações subsequentes. Dar enfoque ao raciocínio diagramático oriundo da tomada de decisão amplia os resultados já evidenciados por Ramos (2021, p. 146) que considera o raciocínio diagramático essencial em uma atividade de modelagem, “uma vez que está relacionado com as ações que são relacionadas durante a atividade”.

Os diagramas produzidos de forma gestual ou escrita foram aprimorados com a troca de ideias, revelando que a natureza dinâmica de atividades de modelagem e o raciocínio diagramático envolveram articulações entre o que é falado e gesticulado no domínio de inquérito da realidade com uma base teórica e um sistema de representação matemático escrito que colocaram em evidência os conhecimentos matemáticos dos alunos. Muito embora não emergiram novos conhecimentos, entendemos que a investigação realizada contribui em investimentos no âmbito da Educação Básica.

Uma análise semiótica de diagramas produzidos via ferramentas digitais e por meio da manipulação de objetos educacionais digitais de modo a evidenciar o raciocínio diagramático pode se configurar como possibilidade de pesquisa futura com alunos do Ensino Fundamental.

## REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. M. W. de. Considerations on the use of mathematics in modeling activities. **ZDM**, v. 50, n. 1, p. 19-30, 2018.

ALMEIDA, L. M. W. de. Uma abordagem didático-pedagógica da Modelagem Matemática. **Vidya**, v. 42, n. 2, p. 121-145, jul./dez., 2022.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P. A ação dos signos e o conhecimento dos alunos em atividades de modelagem matemática. **Bolema**, Rio Claro, v. 31, n. 57, p. 202-219, 2017.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P.; BRITO, D. S. Interface didática entre modelagem matemática e semiótica. **Bolema**, Rio Claro, v. 36, p. 777-800, 2022.

ALMEIDA, L. M. W.; SOUSA, B. N. P. ; TORTOLA, E. The Formulation of Hypotheses in Mathematical Modelling Activities. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 23, n. 5, p. 66-93, 2021.

ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na educação básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

ALSINA, A.; TOALONGO-GUAMBA, X.; TRELLES-ZAMBRANO, C.; SALGADO, M. Developing early mathematical modelling skills in the early ages: a comparative analysis at 3 and 5 years. **Quadrante**, [s. l.], v. 30, n. 1, p. 74-93, 2021.

- BAKKER, A.; HOFFMANN, M. H. G. Diagrammatic reasoning as the basis for developing concepts: a semiotic analysis of students' learning about statistical distribution. **Educational Studies in Mathematics**, v. 60, n. 3, p. 333-358, 2005.
- BURAK, D.; PENTEADO, D. R. As práticas que envolvem modelagem matemática na Educação Básica do Paraná: uma meta-análise do EPMEM. **Vidya**, v. 39, n. 1, p. 21-37, jan./jun., 2019.
- DÖRFLER, W. Diagrammatic Thinking. In: HOFFMANN M. H.; LENHARD J.; SEEGER F. (Ed.). **Activity and Sign**. Boston: Springer, 2005.
- ENGLISH, L. Mathematical Modeling in the Primary School: Children's Construction of a Consumer Guide. **Educational Studies in Mathematics**, [s. l.], v. 63, n. 3, p. 303-323, 2006.
- ENGLISH, L. D. Modeling with Complex Data in the Primary School. In: LESH, R. *et al.* (Ed.). **Modeling students' mathematical modeling competencies**. Springer: New York, London, 2010, p. 287-300.
- FERRI, R. B. Theoretical and empirical differentiations of phases in the modeling process. **ZDM**, v. 38, n. 2, p. 86-95, 2006.
- GALBRAITH, P. Models of Modelling: Genres, Purposes or Perspectives. **Journal of Mathematical Modelling and application**, v. 1, n. 5, p. 3-16, 2012.
- HOFFMANN, M. H. G. Signs as Means for Discoveries. In: HOFFMANN M. H.; LENHARD J.; SEEGER F. (Ed.). **Activity and Sign**. Boston: Springer, Boston, 2005.
- HOFFMANN, M. H. G. Cognição e pensamento diagramático. In: QUEIROZ, J.; MORAES, L. (Org.). **A lógica de diagramas de Charles Sanders Peirce**: implicações em ciência cognitiva, lógica e semiótica. Juiz de Fora: Editora UFJF, 2013, p. 101-134.
- JABLONKA, E.; GELLERT, U. Mathematisation demathematisation. In: GELLERT, U.; JABLONKA, E. (Ed.). **Mathematisation and demathematisation**: social, philosophical and educational ramifications. Netherlands: Sense Publishers, 2007. p. 1-18.
- KADUNZ, G. Diagrams as means for learning. In: SÁENZ-LUDLOW, A.; KADUNZ, G. (Ed.). **Semiotics as a tool for learning mathematics**. Rotterdam: Sense Publishers, p. 111- 126. 2016.
- NISS, M.; BLUM, W. **The learning and teaching of mathematical modelling**. London, New York: Routledge, 2020.
- PEIRCE, C. S. **Semiótica e filosofia**: textos escolhidos. São Paulo: Cultrix, 1972.
- PEIRCE, C. S. **Semiótica**. Tradução de José Teixeira Coelho Neto. 2. reimpr. da 3. ed. de 2000. São Paulo: Perspectiva, 2005.
- RAMOS, D. C. **Modelagem Matemática**: uma análise semiótica das experiências dos alunos. 2020. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2020.
- RAMOS, D. C. Atividades de modelagem matemática: um olhar para os diagramas construídos. In: ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P.; VERONEZ, M. R. D. (Org.). **Elementos Semióticos em Atividades de Modelagem Matemática**. São Paulo: Livraria da Física, p. 133-148, 2021.