

ECOLOGIA SOBRE A SOBREVIVÊNCIA DAS PRAXEOLOGIAS USUAIS PARA O ENSINO DE FUNÇÃO QUADRÁTICA DA EDUCAÇÃO BÁSICA AO ENSINO SUPERIOR DE 2005 À 2021*ECOLOGY ON THE SURVIVAL OF USUAL PRAXEOLOGIES FOR QUADRATIC FUNCTION TEACHING FROM BASIC EDUCATION TO HIGHER EDUCATION FROM 2005 TO 2021**ECOLOGÍA SOBRE LA SUPERVIVENCIA DE LAS PRAXEOLOGÍAS HABITUALES PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA DESDE LA EDUCACIÓN BÁSICA HASTA LA EDUCACIÓN SUPERIOR DE 2005 A 2021*

ALESSANDRA AZZOLINI DA SILVA¹
ADEMIR AVILA²
VALDIR BEZERRA DOS SANTOS JÚNIOR³
MARLENE ALVES DIAS⁴

RESUMO

Nesse extrato apresentamos uma ferramenta de análise das praxeologias desenvolvidas nos ensinos fundamental anos finais, médio e superior para a noção de função quadrática. Este estudo foi realizado por meio de uma grade de análise que permite compreender a ecologia das propostas institucionais e verificar a conformidade delas com os conhecimentos prévios possíveis de serem mobilizados e/ou disponíveis no início do Ensino Superior. A grade contempla noções da didática francesa associadas à ecologia dos saberes. Trata-se de uma pesquisa qualitativa documental, que identifica as mudanças institucionais para períodos determinados quando da passagem entre etapas escolares. Os resultados mostram a existência de tarefas associadas à noção de função quadrática que, desde 2005, eram ampliadas e revisitadas nas três etapas aqui consideradas, mas a partir de 2018 esse estudo fica implicitamente deixado a cargo dos professores para o ensino fundamental anos finais. Concluímos que os professores do ensino médio e superior precisam ficar atentos para essa nova organização didática.

Palavras-chave: Função quadrática. Quadro. Ostensivos e não ostensivos. Níveis de conhecimento. Praxeologia.

ABSTRACT

In this extract we present a tool for analyzing the praxeologies developed in elementary middle school, and high school and higher education for the notion of quadratic function. This study was carried out using an analysis grid that allows understanding the ecology of institutional proposals and verifying their conformity with the previous knowledge that can be mobilized and/or available at the beginning of Higher Education. The grid includes notions of french didactics associated with the ecology of knowledge. This is a qualitative documentary research, which identifies institutional changes for certain periods when passing between school stages. The results show the existence of tasks associated

1 Mestre em Educação Matemática pela Universidade Bandeirante de São Paulo - UNIAN. Professora de Matemática, Pesquisadora de Educação Matemática, lotada no Departamento de Matemática do Centro Universitário das Faculdades Metropolitanas Unidas - FMU. E-mail: alessandra.azzolini@fmu.br. ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-6402-089X>

2 Doutor em Educação Matemática pela Universidade Bandeirante de São Paulo - UNIAN. Professor de Computação e Informática do Departamento de Competação e Informática, Pesquisador de Educação Matemática, lotado no Departamento de Matemática do Centro Universitário das Faculdades Metropolitanas Unidas - FMU. E-mail: ademiravila@yahoo.com.br. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3586-9956>

3 Doutor em Educação Matemática pela Universidade Bandeirante de São Paulo - UNIAN. Professor de Matemática e Pesquisador de Didática da Matemática do curso de Licenciatura em Matemática da UFPE, pesquisador em Educação Matemática. E-mail: valdir.bezerra@ufpe.br. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3869-201X>

4 Doutora em Didática da Matemática pela Universidade Paris VII atualmente Universidade Paris Cité. Pesquisadora aposentada colaborando atualmente no curso de mestrado em ensino de Ciências e Matemática do IFCE. E-mail: maralvesdias@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8268-8547>

with the notion of quadratic function that, since 2005, were expanded and revisited in the three stages considered here, but from 2018 this study is implicitly left to teachers for middle school. We conclude that high school and higher education teachers need to be aware of this new didactic organization.

Keywords: *Quadratic function. Framework. Ostensives. and non-ostensives. Levels of knowledge. Praxeology.*

RESUMEN

En este extracto se presenta una herramienta para el análisis de las praxeologías, desarrolladas en la educación primaria, secundaria y superior para la noción de función cuadrática. Este estudio se realizó utilizando una matriz de análisis que permite comprender la ecología de las propuestas institucionales y verificar su conformidad con los conocimientos previos que pueden ser movilizados y/o disponibles al inicio de la Educación Superior. La indagación incluye nociones de didáctica francesa asociadas a la ecología del saber. Se trata de una investigación documental, cualitativa que identifica cambios institucionales para determinados periodos entre las tres etapas escolares mencionadas. Los resultados muestran la existencia de tareas asociadas a la noción de función cuadrática que, a partir del año 2005, fueron ampliadas y revisadas en las tres etapas aquí consideradas, pero desde el año 2018 se deja implícitamente este estudio a los docentes de los primeros años de secundaria. Se llegó a la conclusión que, los docentes de educación secundaria y superior deben ser conscientes de esta nueva organización didáctica.

Palabras-clave: *Función cuadrática. Marco. Ostensivos y no-ostensivos. Niveles de conocimiento. Praxeología.*

INTRODUÇÃO

A problemática desse estudo está relacionada às dificuldades apresentadas pelos estudantes nas macroavaliações que aplicadas nas diferentes etapas escolares e, mais particularmente, no final do Ensino Médio e na entrada do Ensino Superior, mais exclusivamente, aquelas associadas à Matemática. Consideramos ser importante compreender se existe uma coerência entre o conhecimento esperado como mobilizável e/ou disponível para os estudantes na passagem de uma etapa escolar a outra e o trabalho que se supõe estar sendo realizado no desenvolvimento da Matemática em função dos conhecimentos prévios preconizados nos documentos oficiais e livros didáticos.

Dessa forma, o objetivo desse trabalho é estudar as propostas institucionais para o desenvolvimento da noção de função quadrática nos Ensinos Fundamental anos finais e Médio e verificar se essas estão em conformidade com o que se espera como conhecimento prévio mobilizável e/ou disponível no início do Ensino Superior, em particular, para as disciplinas de Matemática e Introdução ao Cálculo que compõem os cursos da área de exatas.

Essa pesquisa é parte de um projeto sobre o estudo da transição entre a Educação Básica e o Ensino Superior cuja proposta é investigar as questões associadas a essa transição para as noções Matemáticas que são, em geral, desenvolvidas nos quadros da Álgebra, Álgebra Linear, Análise Matemática e Cálculo Diferencial e Integral.

Sendo assim, observamos que a ferramenta de análise construída para o desenvolvimento desse estudo, a saber: a grade de análise, corresponde a um instrumento teórico de análise do desenvolvimento de um conceito ou noção Matemática para as diferentes etapas escolares que pode ser adaptada para o estudo análogo referente à diferentes conceitos e noções em função de sua introdução e desenvolvimento nas diferentes etapas em que são tratados, nos auxiliando assim a compreender como um determinado conceito ou noção sobrevive no decorrer do tempo e as dificuldades que suas diferentes formas de vida podem causar na transição entre as diferentes etapas escolares.

Para melhor compreender a questão da transição entre diferentes etapas escolares nos referimos a pesquisa de Gueudet (2008) que apresenta uma revisão da literatura de Educação Matemática sobre a transição Ensino Médio e Superior. Nesse trabalho a autora parte da seguinte questão: “Quando a transição acontece?”. Segundo a autora não existe uma resposta simples para essa questão e, além disso, é preciso considerar, por exemplo, os diferentes contextos, culturas e escalas de tempo.

Gueudet (2008) destaca a existência de diferentes formas de visualizar a questão da transição, que segundo ela, dependendo da forma de visão considerada, não distinguimos as mesmas dificuldades, não as interpretamos da mesma maneira, o que conduz a diferentes formas de tratar a transição e, conseqüentemente, de arquitetar propostas distintas de ação didática.

Essa distinção entre as formas de visualizar a transição conduz Gueudet (2008) a considerar quatro diferentes formatos relacionados ao olhar agregado para a questão da transição, isto é, esse olhar está relacionado aos seguintes modos: de pensamento, de organização dos conhecimentos, da linguagem e da instituição definidos na sequência.

Segundo a pesquisadora os novos *modos de pensamento* estão associados aos novos saberes quando esses são mais complexos e abstratos, o que conduz a uma transição que ocorre por meio de uma sucessão de momentos, a saber: ação, depois processo, depois objeto. Como exemplo Gueudet (2008) considera a noção de função de uma variável real a valores reais, salientando que os estudantes têm dificuldades de ver essa função como uma ação que transforma um número em outro, em seguida, como um processo e finalmente como um objeto sobre o qual podemos agir, isto é, fazer somas, compor, considerá-las como um conjunto que satisfaz determinadas propriedades.

Ao considerar o olhar sobre *modos de pensamento*, a autora identifica o trabalho de Dubinsky (1991) que analisa os diferentes estágios na percepção de uma noção pelos estudantes. Isso conduz o autor a propor um ensino cuja percepção de uma noção segue os estágios de ação, processo, objeto e esses sendo sucessões de momentos de transição.

Em relação aos *modos de organização dos conhecimentos*, ela enfatiza a questão da necessidade de novas práticas Matemáticas de referência, isto é, a Matemática é organizada e não isolada, formando assim uma rede, o que conduz a necessidade de dispor de situações familiares de referência e de meios sistemáticos de questionamento e controle. Em relação a essas novas práticas de referência podemos citar Robert (1997, 1998) que aponta a necessidade de considerar o nível de conceituação relativo a noção que estamos introduzindo e desenvolvendo, pois ele pode nos conduzir a mudar o que deve ser justificado, a considerar as diferenças de tempo de trabalho dos estudantes, a escolher uma ou mais aplicações para um mesmo teorema, a considerar certa disponibilidade dos conhecimentos esperados dos estudantes que deve ser explicitada pelos professores.

Para os *modos da linguagem*, Gueudet (2008) observa a necessidade de um novo discurso, de novas regras de comunicação, em geral, associadas às demonstrações. Finalmente, como exemplo a pesquisadora explicita que é preciso considerar a diferença entre a Matemática trabalhada no Ensino Médio e a desenvolvida no Ensino Superior, pois uma mesma tarefa será desenvolvida com outra técnica, as técnicas são explicadas de outra forma. A autora enfatiza que no caso das demonstrações é preciso utilizar novas regras de comunicação, isto é, em particular nas demonstrações e justificativas das novas técnicas no Ensino Superior as exigências de rigor são imprescindíveis.

Para essa comunicação nos centramos nos *modos da instituição* cujo olhar é centrado nas propostas da instituição sobre a introdução e desenvolvimento de determinada noção ou conceito. No nosso caso observamos particularmente a diferença entre as técnicas e suas justificativas quando elas são trabalhadas nos Ensinos Fundamental anos finais, Médio e Superior.

Gueudet (2008) salienta que a Matemática praticada no Ensino Médio é diferente daquela que será trabalhada no Ensino Superior uma vez que uma mesma noção será tratada de forma diferente, isto é, para uma mesma tarefa será utilizada outra técnica e as técnicas ensinadas são explicadas e justificadas de outra forma.

Segundo Gueudet (2008a) no estudo da transição sob o *modo da instituição* é preciso identificar dificuldades de emprego de novas técnicas pelos estudantes que muitas vezes utilizam aquelas desenvolvidas na etapa anterior, justificando por meio do exemplo empregados pelos estudantes ao responder tarefas propostas no Ensino Superior, aplicando técnicas estudadas e aprendidas no Ensino Médio, que não são suficientes para responder as novas tarefas.

Observamos aqui a opção pela noção de função quadrática que é introduzida e ampliada nas diferentes etapas da escolaridade, sendo assim um objeto matemático importante para mostrar o limite de utilização de antigas técnica, em particular, no estudo de Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Superior.

Para melhor explicitar essas dificuldades encontradas pelos estudantes Gueudet (2008a) refere-se ao trabalho de Bosch et al. (2004) que ressaltam a importância de um retorno aos tipos de tarefas encontradas no Ensino Médio colocando em prática atividades de modelagem e interpretação por meio da articulação de diferentes tipos de tarefas e propondo tarefas abertas.

Como nosso estudo está centrado nos *modos da instituição*, ponderamos ser importante nos referirmos à noção de praxeologia definida em Chevallard (2002, 2002a), a saber: uma praxeologia é composta por um bloco prático composto por tipos de tarefas - T e técnicas - σ , que será explicitado, justificado e controlado por meio de um bloco teórico composto pelas tecnologias - θ que correspondem a um discurso explicativo e justificativo das técnicas e pela teoria - Θ que corresponde a tecnologia da tecnologia.

Justificamos nossa escolha de utilizar o *modo da instituição* para a pesquisa sobre a noção de função quadrática, observando que no Brasil, em geral, é introduzida no Ensino Fundamental anos finais - EFaf, sendo revisitada, ampliada e contextualizada por meio de aplicações cotidianas e em outras Ciências no Ensino Médio e utilizada como ferramenta explícita para introdução de novos conceitos no Ensino Superior.

Sendo assim, nos parece importante analisar as praxeologias Matemáticas que estão relacionadas à proposta de seu desenvolvimento e aplicação nas três etapas escolares consideradas, assim como as praxeologias didáticas indicadas no material estudado, destacando as possibilidades de abordagem e as aplicações apresentadas, em particular ressaltando as dificuldades que podem ser originárias das mudanças na passagem dos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL, 1998), Parâmetros Curriculares Nacionais + - PCN+, (BRASIL, 2002), Orientações Curriculares para o Ensino Médio - OCEM, (BRASIL, (2006) para a Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL, 2018).

Ressaltamos que com a introdução da BNCC, a proposta de ensino e aprendizagem nas instituições brasileiras passa da abordagem por objetivos para a abordagem por competências, o que conduz a uma reestruturação ecológica dos conceitos e noções a serem desenvolvidos na Educação Básica, ou seja, é preciso observar quais saberes se mantêm e quais são excluídos ou sobrevivem nas etapas posteriores, uma vez que temos uma nova organização dos conhecimentos, o que indica a necessidade de pesquisas que articulem os conhecimentos prévios anteriores e os atuais de forma a mostrar a importância de introdução e/ou revisita desses conhecimentos em diferentes etapas escolares segundo o novo documento.

Desse modo, ressaltamos que a importância desse estudo está associada às mudanças curriculares para o EFaf e estruturais e curriculares para o Ensino Médio, pois a sobrevivência ou não de conceitos e noções matemáticas desenvolvidos nessas etapas escolares podem impactar as avaliações de entrada nas universidades como o Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM, os vestibulares e o desenvolvimento das disciplinas de Matemática nos diferentes cursos superiores, uma vez que os professores do Ensino Superior podem continuar considerando conhecimentos mobilizáveis ou disponíveis de conceitos e noções que não são mais tratados na Educação Básica, o que nos parece uma problemática atual.

Como explicitamos no início desse extrato de pesquisa, os conhecimentos mobilizáveis e/ou disponíveis dependem das condições e restrições de implementação da BNCC e da nova estrutura do Ensino Médio que devido a pandemia, somente em 2022 parece ter iniciado sua implementação em todas as escolas brasileiras.

Essa nova realidade indica a necessidade de uma vigilância constante, que permita compreender as condições e restrições impostas por esse novo modelo, de forma a fazer as adequações necessárias, uma vez que nele são indicadas modificações profundas tanto do ponto de vista da abordagem considerada como da estrutura e metodologia a ser desenvolvida.

Sendo assim, iniciamos assim a pesquisa com as seguintes questões: Quais as praxeologias matemáticas e didáticas propostas e desenvolvidas em alguns materiais didáticos que apresentam a noção de função quadrática para os Ensinos Fundamental anos finais e Médio e quais os conhecimentos prévios podem ser considerados disponíveis, para os estudantes dessas etapas escolares? Os conhecimentos prévios supostos disponíveis são suficientes para servir de apoio à introdução de novos conceitos associados à essa noção no Ensino Superior?

A partir da ressalva sobre a necessidade de vigilância ao considerarmos as possibilidades de desenvolvimento do novo currículo e do questionamento acima, optamos apresentar nesse extrato nosso estudo referente à noção de função quadrática, que no Brasil, em geral, era introduzida no EFaf, revisitada, contextualizada e relacionada com outras Ciências no Ensino Médio, sendo utilizada como ferramenta explícita para introdução de novos conceitos no Ensino Superior, fomos conduzidos a visitar nossos estudos sobre transição entre as diferentes etapas escolares a partir dessa noção.

Escolhemos analisar as praxeologias Matemáticas que estão associadas à proposta de seu desenvolvimento e aplicação nas três etapas escolares consideradas nos documentos oficiais anteriormente mencionados, o que nos auxilia a compreender melhor as mudanças indicadas na proposta atual da BNCC e assim mostrar as semelhanças e diferenças encontradas nos livros didáticos que vêm sendo disponibilizados.

Na sequência apresentamos brevemente o referencial teórico da pesquisa.

REFERENCIAL TEÓRICO

Iniciamos a apresentação do referencial teórico utilizado considerando as noções de quadro e mudança de quadro segundo definição de Douady (1984, 1992). A autora introduz a noção de quadro em uma perspectiva de teorização didática, ressaltando que uma noção ou conceito funciona inicialmente como *ferramenta implícita*, que correspondem a fase de elaboração desse conceito ou noção, para se tornar *ferramenta explícita*, ou seja, quando esta é utilizada intencionalmente para resolver um problema até adquirir o caráter de *objeto*.

A partir da noção de *objeto* Douady (1984, 1992) define quadro como um ramo da Matemática constituído de objetos, suas relações, formulações eventualmente diversas que permitem desenvolver imagens mentais associadas a esses objetos, relações e formulações, cujo papel essencial é servir de ferramenta para o funcionamento do quadro. Para Douady (1984, 1992) dois quadros podem conter os mesmos objetos e diferir apenas pelas imagens mentais e problemáticas que eles permitem desenvolver.

Isso conduz Douady (1984, 1992) a transpor a forma de trabalho do matemático para a didática por meio da noção de mudança de quadros, que consiste em obter diferentes formulações para um mesmo problema que possibilitam utilizar ferramentas e técnicas que não se aplicavam na primeira formulação. Ao traduzir um quadro em outro podemos recair sobre resultados desconhecidos, encontrar novas técnicas, criar novos objetos. Isso proporciona o enriquecimento do quadro original e dos quadros auxiliares no desenvolvimento do trabalho matemático. As mudanças de quadro organizadas pelo professor são denominadas jogos de quadros e Douady (1984) os considera como meios privilegiados para suscitar desequilíbrios cognitivos e permitir ultrapassar esses desequilíbrios em reequilíbrios de nível superior.

Sendo assim, as noções de quadro e mudanças de quadros nos auxiliam a identificar e compreender o papel da noção Matemática em jogo no nosso estudo.

Para melhor compreender quais as expectativas institucionais em relação ao trabalho matemático a ser desenvolvido com os estudantes consideramos também a noção de níveis de conceituação, definida por Robert (1997), que corresponde a uma “prateleira” em um campo conceitual de conhecimentos matemáticos, organizados de forma coerente e caracterizado por meio dos objetos matemáticos apresentados de determinada maneira, dos teoremas, métodos e problemas que os estudantes podem resolver em função da caracterização utilizada. A partir do nível de conceituação que nos encontrarmos, Robert (1998) explicita ainda a importância de uma abordagem teórica em termos dos três níveis de conhecimento esperados dos estudantes conforme definição de Robert (1997, 1998), a saber:

O *nível técnico* corresponde a um trabalho isolado, local e concreto, em geral, associado às definições e ferramentas implícitas e explícitas a serem utilizadas em determinada tarefa. O estudante encontra, na tarefa, todos os elementos necessários para sua realização. Exemplo: Os exercícios de fixação de uma definição ou propriedade como: Determinar o valor numérico da função $f(x)$ dado x .

O *nível mobilizável* corresponde a resolver uma tarefa por meio da identificação de um saber que é pedido explicitamente. Nesse caso, é preciso saber utilizar ferramentas específicas de forma correta e em alguns momentos o conhecimento a ser mobilizado já corresponde a uma determinada organização. Exemplo: Escrever as coordenadas do vértice e o eixo da parábola para uma função quadrática dada.

O *nível disponível* corresponde a responder corretamente a tarefa dada, porém não é indicado nenhum caminho ou ferramenta que possam auxiliar na sua resolução. Nesse nível é preciso dispor de meios para encontrar ou criar contraexemplos, articular diferentes noções Matemáticas fazendo as relações necessárias entre elas, efetuar mudanças de quadros utilizando as representações adequadas, aplicar métodos não previstos. Exemplo: Os diretores de um centro esportivo desejam cercar uma quadra de basquete retangular e o espaço em volta dela com uma tela de alambrado. Tendo recebido 200 metros de tela, os diretores desejam saber quais devem ser as dimensões do terreno para que a área seja a maior possível. (Dante, 2005, p. 113)

Consideramos ainda nesse estudo algumas noções associadas à Teoria Antropológica do Didático conforme trabalhos de Chevallard (1992, 1994) e Bosch e Chevallard (1999). Apresentamos uma breve descrição das noções que retivemos para as análises.

Chevallard (1991, 1992) e Bosch e Chevallard (1999) promulgam que o objetivo da Teoria Antropológica do Didático - TAD, para a qual a transposição didática é um caso particular, é articular noções que permitam pensar de maneira unificada um grande número de fenômenos didáticos encontrados no decorrer de múltiplas análises.

Chevallard (1992) introduz os termos primitivos: objeto (O), pessoas (X) e instituições (I), sendo que para ele tudo é objeto e este constitui o material de base para a teoria. A partir do termo primitivo objeto e de sua relação com os termos pessoas e instituições, Chevallard (1992) define relação pessoal e relação institucional ao objeto O, ou seja, um objeto O existe quando pelo menos uma pessoa X ou uma instituição I tem relação com esse objeto. Exemplo: A função quadrática é um objeto matemático, mas existem também os objetos “escola”, “professor”, “aprender”, “saber”, “dor de dente”, etc.

Para Chevallard (1992) conhecer um objeto O é, tanto para uma pessoa como para uma instituição, ter uma relação com O, ou seja, uma relação pessoal ou institucional respectivamente. Exemplos de instituições I: uma escola, uma classe, um tutorial, um curso, família, um documento oficial, um livro didático, um material didático. Dessa forma, a articulação entre objetos e instituições acontece quando a instituição define uma relação institucional com esse objeto.

Avançando no desenvolvimento da teoria Bosch e Chevallard (1999) colocam em evidência que o *objeto essencial de estudo da teoria* não é o aprendiz nem o professor, mas o *saber matemático* que se presume que eles irão estudar em conjunto e as atividades Matemáticas que seus projetos comuns os conduzem a realizar.

Assim ponderando que o “mistério” da didática da Matemática está na Matemática, os autores consideram que o objeto de estudo da teoria antropológica não está dentro de uma instituição de ensino, mas nas práticas Matemáticas do conjunto de instituições da sociedade.

Logo, todas as instituições, onde sob diferentes formas se pratica a Matemática, são aqui consideradas como instituições. Exemplos: os grupos específicos de matemáticos, uma orientação sobre como desenvolver a Matemática, um curso desenvolvido em um livro, uma apostila, por um professor, uma aula, entre outros.

Para isso, Bosch e Chevallard (1999) introduzem o que eles denominam modelagem antropológica da Matemática, que permite analisar se um sujeito ou uma instituição conhece um objeto e sabe o que fazer com ele.

A modelagem antropológica permite compreender as diferentes organizações Matemáticas, isto é, as escolhas sobre o próprio objeto matemático e as organizações didáticas, isto é, as práticas para trabalhar com esse objeto, por meio do que eles denominam organizações praxeológicas ou praxeologias.

Uma organização praxeológica ou praxeologia é composta de: tipos de tarefas (T), tipos de técnicas (σ), tecnologias (θ) ou discurso sobre as técnicas e teorias (Θ) ou tecnologias das tecnologias. Nessas organizações o par tipos de tarefas (T) e técnicas (σ) corresponde ao bloco prático (saber fazer) e o par tecnologias (θ) e teorias (Θ) corresponde ao bloco teórico (saber descrever, explicar, justificar e demonstrar as técnicas).

Observa-se ainda que para Bosch e Chevallard (1999) toda prática institucional pode ser analisada, de diferentes pontos de vista e de diferentes maneiras por um sistema de tarefas relativamente bem circunscrito, que se divide no fluxo da prática.

Mas, para executar diferentes tipos de tarefas (T) existem técnicas (σ) que segundo os autores são compostas de dois tipos de objetos, os objetos ostensivos e os objetos não ostensivos.

Os objetos ostensivos são aqueles que têm para nós uma forma material sensível, isto é, são aqueles que permitem manipular as técnicas. Como exemplo, temos os ostensivos gestuais, discursivos, gráficos e escriturais. Os não ostensivos, que habitualmente denominamos noções, conceitos e ideias, não podem ser manipulados apenas evocados durante a manipulação dos ostensivos. No caso do objeto matemático de nosso estudo, o objeto não ostensivo é a noção de função quadrática que pode ser enunciada, por exemplo, por meio dos ostensivos oral, algébrico, gráfico e permite sua utilização para resolver diferentes problemas que lhe são associados.

Os autores observam ainda que existe uma dialética necessária entre ostensivos e não ostensivos, pois os ostensivos são manipulados por meio de regras cuja distinção é feita pelos não ostensivos, enquanto os não ostensivos são evocados por meio da manipulação dos ostensivos.

Consideramos também outro aporte teórico introduzido por Chevallard (2002, 2002a) relacionado à TAD, a saber: a noção de ecologia que segundo o autor foi introduzida para advertir sobre a necessidade de adaptações dos saberes às restrições que lhe são impostas, de modo que eles tenham condições de sobreviver nas instituições, referindo-se a Biologia o autor define *habitat* como os lugares onde vivem os objetos matemáticos, *nicho* correspondendo à função que esses objetos ocupam em cada um de seus habitats e *milieu* como o conjunto dos objetos para os quais a relação institucional é estável e não problemática.

Como exemplo para a noção de função quadrática, observamos que no Brasil, durante a vigência dos PCNs, ela vivia no nono ano do EF no quadro da álgebra elementar e seu nicho era servir de ferramenta explícita para aplicações nos quadros de grandezas e medidas e geometria, sendo ampliada no primeiro ano do EM, ampliando assim seu nicho enquanto ferramenta explícita para a introdução da noção extramatemática de movimento uniformemente variado no quadro da Física e para as aplicações intramatemáticas nos quadros dos números e operações e geometria nessa mesma etapa escolar.

Com a homologação da BNCC em 2018, observamos que a noção de função para o EF continua no 9º ano, na unidade temática álgebra, dando ênfase aos objetos de conhecimento representação numérica, algébrica e gráfica e razão entre grandezas de espécies diferentes de forma a contemplar as competências:

(EF09MA06) Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis. (EF09MA07) Resolver problemas que envolvam a razão entre duas grandezas de espécies diferentes, como velocidade e densidade demográfica. (BRASIL, 2018, p. 316-317)

Desse modo, a noção de função quadrática não aparece explicitamente na BNCC, o que não permite a identificação de seus respectivos habitat, nicho e *milieu*.

Em relação ao EM ressaltamos que o currículo será composto pela Base Nacional Comum Curricular e por itinerários formativos, o que conduz a organizações diferentes em função do contexto local e das possibilidades de ensino.

Em relação às orientações da BNCC para a área de Matemática e suas Tecnologias a proposta é consolidação, ampliação e aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas no EFaf, o que nos conduz a considerar que a noção de função quadrática será desenvolvida por meio

de suas representações e considerando suas propriedades e seu papel de ferramenta explícita para solução de possíveis aplicações, o que corrobora com as competências e relativas habilidades sobre o estudo das funções indicadas explicitamente no documento, e mais particularmente aquelas que explanam o papel da noção de função quadrática, como é possível identificar nos extratos apresentados a seguir.

A competência 1 trata das aplicações da Matemática em diversos contextos, observamos que seu habitat está associado à sua vida na sociedade e nas outras Ciências, seu nicho sendo a solução de questões relativas a esses habitats por meio de representações e estratégias matemáticas e seu *milieu* são as noções matemáticas e suas representações em língua natural e simbólicas associadas às possíveis aplicações consideradas.

Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral. (BRASIL, p. 532)

Para a competência 1 identificamos a habilidade (EM13MAT101) que indica a importância do estudo de diferentes funções por meio de sua representação gráfica em aplicações das diversas áreas do conhecimento, sendo que essas funções e suas representações precisam servir de instrumento para interpretar as situações estudadas, e quando possível é indicado utilizar representações computacionais por meio das tecnologias digitais.

(EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais. (BRASIL, p. 533)

Ao considerarmos a competência 3 observamos que a ênfase é dada a construção de modelos matemáticos para resolver problemas de diversos contextos, esses modelos devem servir para interpretar e propor soluções para situações reais, o que reforça a associação de seu habitat à vida na sociedade e nas outras Ciências, seu nicho às questões relativas a esses habitats por meio de estratégias matemáticas e seu *milieu* às noções matemáticas e suas representações em língua natural e simbólicas associadas às possíveis aplicações consideradas

Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. (BRASIL, p. 535).

Em relação a essa competência encontramos a habilidade (EM13MAT302) que trata especificamente da noção de função polinomial do 2º grau ou função quadrática e ressalta a importância das aplicações extramatemáticas quando do estudo desta função.

(EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais. (BRASIL, p. 536).

A competência 4 trata da importância de utilizar o conhecimento matemático de forma flexível, o que mostra a importância das diferentes representações e que fortalece a descrição do habitat, nicho e *milieu* apresentadas anteriormente.

Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas. (BRASIL, p. 538).

Para a competência 4, a habilidade associada à noção de funções polinomiais do 2º grau trata especificamente da conversão de representações, que é uma atividade necessária para a escolha da representação mais adequada para a resolução e interpretação de diferentes problemas intra e extramatemáticos.

(EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais. (BRASIL, p. 539).

A competência 5 trata mais especificamente do estudo das propriedades das noções matemática a partir de conjecturas realizadas por diferentes meios, o que fortalece o habitat, nicho e *milieu* apresentados anteriormente.

Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (BRASIL, p. 540).

Para a competência 5 identificamos duas habilidades específicas para as funções quadráticas que enfatizam a importância das diferentes representações e suas conversões, a conjectura e a generalização da função quadrática, considerando ainda a importância das aplicações intra e extramatemáticas.

(EM13MAT502) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$. (BRASIL, p. 541).

(EM13MAT503) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais. (BRASIL, p. 541).

Ressaltamos que a identificação das competências e respectivas habilidades para o estudo dos conceitos de função, mais particularmente de função quadrática no EM, indica que seu habitat está associado às possíveis situações da vida real e das outras Ciências, seu nicho está relacionado à possibilidade de conjecturar, generalizar, argumentar por meio de representações e estratégias matemáticas, cujo objetivo é propor soluções para as situações encontradas e seu *milieu* está associado aos conceitos e noções matemáticas, suas representações e propriedades associadas às aplicações consideradas.

No primeiro ano do ES o habitat da noção de função quadrática é o mesmo do EM, mas seu nicho será o de servir de ferramenta explícita para introdução da noção de derivada de uma função e suas propriedades na disciplina de Cálculo Integral, ou seja, os conhecimentos prévios adquiridos no quadro algébrico na etapa anterior servem de ferramenta explícita para a introdução de novos conhecimentos no quadro analítico, logo no se EF seu *milieu* está associado ao estudo e aprendizagem dos objetos ostensivos algébricos (fórmula) e gráfico e da conversão entre eles, no EM a ênfase é dada a utilização dos objetos ostensivos algébricos e gráficos e de novos objetos ostensivo necessários para o estudo de diferentes aplicações relacionadas à outras Ciências, no ES o *milieu* relacionada ao estudo da função quadrática é o de mostrar a importância e motivar o estudo das propriedades das funções reais a valores reais por meio da noção de derivada de uma função.

Outro constructo teórico que utilizado como ferramenta para nossas análises é a noção de níveis de co-determinação, que segundo Chevallard (2007) corresponde a uma escala de diferentes níveis que permite situar as condições e restrições que determinam o processo de difusão praxeológico, uma vez que as praxeologias são os componentes dos diferentes habitats.

O pesquisador define os níveis de co-determinação por meio da escala: tópicos ↔ temas ↔ setores ↔ domínios ↔ disciplinas ↔ pedagogia ↔ escola ↔ sociedade ↔ civilização ↔ humanidade, ressaltando que esses níveis descrevem as relações recíprocas entre os níveis mais específicos e os mais gerais do sistema didático.

Assim, para as praxeologias podemos considerar o tema, por exemplo: representação gráfica da função quadrática, cujos tópicos podem estar associados a um tipo de tarefa (T) e ligado a um setor que corresponde a uma teoria, por exemplo, o estudo das propriedades algébricas dessa função por meio de seu gráfico. Esse setor podendo estar mergulhado em um domínio, como o da álgebra que, por sua vez, faz parte de uma disciplina, a Matemática, para a qual existem indicações de estratégias e técnicas (σ) para desenvolvê-la, isto é, a pedagogia a ser considerada, que pode ser escolhida pelo grupo de professores de uma determinada escola que segue as orientações de documentos construídos pela sociedade que, por sua vez, está mergulhada em determinada civilização, cujo funcionamento está associado às escolhas políticas e econômicas nacionais e internacionais

Chevallard (2007) ao introduz a escala com os diferentes níveis, os denomina níveis de co-determinação porque seus efeitos são sentidos nos dois sentidos, como podemos evidenciar por meio do exemplo citado e do esquema: tópicos ↔ temas ↔ setores ↔ domínios ↔ disciplinas ↔ pedagogia ↔ escola ↔ sociedade ↔ civilização ↔ humanidade, na qual tópicos, temas, setores, domínios e disciplinas são os níveis inferiores e pedagogia, escola, sociedade, civilização e humanidade são os níveis superiores. Desse modo, o que podemos fazer em determinado nível depende das condições e restrições criadas pelas escalas superiores que iniciam por humanidade. Além disso, ao modificar as condições e restrições de um nível inferior, teremos repercussões sobre os níveis superiores e vice versa.

Após essa breve descrição das ferramentas de análise utilizadas na pesquisa apresentamos a metodologia utilizada na pesquisa.

METODOLOGIA

Trata-se de uma pesquisa qualitativa segundo Godoy (1995), pois procuramos compreender o fenômeno no contexto em que ele ocorre e é parte, buscando por meio do método da pesquisa documental coletar dados e analisá-los de forma a responder às questões de pesquisa que apresentamos na introdução. A autora observa ainda que a pesquisa qualitativa permite que o pesquisador utilize a imaginação e a criatividade para explorar novos enfoques, o que dá a pesquisa documental um caráter inovador que contribui para o estudo de alguns temas.

Considerando que as propostas institucionais representadas pelos documentos oficiais e livros e materiais didáticos correspondem aos instrumentos orientadores de educadores, professores e estudantes, nos pareceu importante utilizar a pesquisa documental para compreender as mudanças na passagem da abordagem por objetivos para a abordagem por competências e habilidades com a finalidade de responder nossas questões de pesquisa e colocar em evidência para a noção de função quadrática que conhecimentos podem ser considerados disponíveis e assim serem utilizados corretamente e adequadamente pelos estudantes que iniciam o Ensino Superior.

Sendo assim, para desenvolver a pesquisa documental utilizamos os seguintes recursos:

1. Análise das propostas de ensino nos documentos oficiais: Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL, 1998), Parâmetros Curriculares Nacionais + - PCN+, (BRASIL, 2002), Orientações Curriculares para o Ensino Médio - OCEM, (BRASIL, 2006) para a Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL, 2018) para melhor compreender as mudanças propostas e a sobrevivência da noção de função quadrática na Educação Básica.
2. Construção de uma grade de análise, inspirada na grade de Dias (1998), que serviu de instrumento para identificar as praxeologias Matemáticas e didáticas que correspondem a ecologia da noção de função quadrática nos períodos considerados. Essa grade foi construída considerando o referencial teórico escolhido para a pesquisa.
3. Análise das praxeologias Matemáticas e didáticas existentes via livros didáticos, para identificar as relações institucionais que atualmente sobrevivem no processo de ensino e aprendizagem da noção de função quadrática na Educação Básica e no Ensino Superior. Os livros analisados foram Dante (2008, 2013, 2016, 2018) para o EF anos finais, Dante (2005, 2011, 2013) e Souza (2021) para o Ensino Médio e Stewart (2000, 2011) para o Ensino Superior. Optamos por Dante para o EFaf e o EM por serem obras do mesmo autor seguindo uma mesma lógica de construção. Para o ano de 2021 o livro de Dante não foi indicado pelo PNL D, o que nos conduziu a considerar a obra de Souza, que parece mais adequada a nova proposta do EM, trata-se de uma coleção de 6 volumes que contemplam conteúdos e habilidades indicadas na BNCC, entre eles, o volume 2 trata especificamente das Funções e suas Aplicações, sendo o livro analisado. Ressaltamos ainda que os livros da Educação Básica foram selecionados porque ressaltam a diversidade de representações Matemáticas tanto em língua materna como em relação aos simbolismos matemáticos como os gráficos, diagramas, tabelas, isto é, os ostensivos de representação escrita. Destacam as inúmeras atividades de revisão como um ponto positivo para a articulação dos novos conhecimentos com os já abordados.

Para o Ensino Superior, escolhemos analisar o livro de Cálculo de Stewart (2000, 2011), escolhido por ser uma obra, em geral, adotada na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I tanto para os cursos de Licenciatura como para os outros cursos de exatas. Identificamos a recorrência dessa obra nos diferentes cursos por meio da bibliografia básica ou na complementar.

4. Identificação das tarefas privilegiadas para serem consideradas como novas formulações nas diferentes etapas escolares, isto é, as diferentes técnicas que permitem trabalhar as novas formulações, em particular aquelas que servem de base para introdução e desenvolvimento de novas noções no Ensino Superior.

Na sequência apresentamos alguns resultados de nossas análises.

ALGUNS RESULTADOS

A análise dos documentos oficiais mostra a importância de cursos de formação de professores que auxiliem a compreender a passagem da abordagem por objetivos propostas nos PCNs e OCEM para o currículo por competências e habilidades de forma normativa pela BNCC, lembrando que passamos de objetivos de ensino para desenvolvimento de competências e habilidades, o que nos conduz a questão de preparar o professor de forma que o mesmo possa avaliar o desenvolvimento de seus estudantes, para tanto o professor precisa construir situações que permitam identificar se cada estudante desenvolveu as habilidades esperadas para as respectivas competências. Daí a importância da avaliação formativa, que é tratada explicitamente nos PCNs e OCEM, mas a BNCC não retoma a questão da avaliação.

Observamos aqui, que segundo Vergnaud (2013) a definição de competências precisa estar relacionada às diferentes situações que um estudante ou um profissional pode encontrar em determinada disciplina ou em uma situação profissional, o que conduz a uma nova forma de avaliação que exige um acompanhamento, mais específico, do desenvolvimento do estudante.

Desse modo, consideramos ser necessário reestruturar e refazer os materiais escolares, no caso do Brasil, mais particularmente, os livros didáticos, que são os materiais mais utilizados nas escolas, o que mostra que a nova organização do ensino precisa também desse trabalho como forma de auxiliar a comunidade acadêmica na implementação do novo currículo fundamentado em competências e habilidades, pois esses livros podem servir de guia quando da transição de uma etapa escolar a outra.

Assim, para análise dos livros didáticos cujo objetivo é identificar as mudanças desde 2008 para o EFaf e 2005 para o Ensino Médio até 2021 respectivamente, desenvolvemos uma grade de análise, cujos resultados apresentamos na sequência. Para o Ensino Superior não houve mudanças o que justifica considerar as obras de Stewart (2000) e Stewart (2010) que utilizam o mesmo tipo de tarefa já desenvolvida no EM para motivar o estudo da noção de derivada de funções reais a valores reais. Além disso, ressaltamos que as obras de Stewart de diferentes datas são indicadas na bibliografia básica da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral de diversos cursos da área de exatas.

Para o EFaf identificamos que o estudo da noção de função quadrática entre 2008 e 2016, que corresponde ao período de vigência dos PCNs, manteve praxeologias usuais centradas: na definição de função quadrática por meio do objeto ostensivo algébrico, na determinação do valor numérico de uma função quadrática em um ponto e dos zeros da função quadrática para na sequência utilizar esses saberes para a introdução de novos saberes: estudo das equações do segundo grau e passagem ao objeto ostensivo gráfico.

Nos livros didáticos do EFaf para o 9º ano de Dante (2008), Dante (2013) e Dante (2016) encontramos o exemplo do tipo de tarefa analisada na figura 1 relativo a conexões com outros contextos para os quais se articulam saberes intramatemáticos. Avançando para o livro de Dante (2018) em relação ao EFaf ressaltamos que a noção de função quadrática é apresentada apenas por meio do objeto ostensivo gráfico de $y = x^2 - 4$, para o qual se identificam os coeficientes a e c e o eixo de simetria, observando que se trata de uma parábola. Encontramos ainda o exemplo da tarefa do

figura 2, cuja resolução do item c) supõe que os estudantes disponham de conhecimentos sobre a noção de área de um quadrado de forma encontrar a função que a associa ao comprimento de seus lados, para na sequência verificar que não se trata de uma função linear, ou seja, é preciso dispor de conhecimentos sobre função linear e quadrática para diferenciá-las. Assim, no livro do ano de 2018 o estudo da noção de função quadrática está implícito na tarefa proposta pelo autor, o que pode conduzir professores e estudantes a um estudo mais aprofundado dessa noção.

Figura 1 - Exemplo de uma tarefa para o EFaf.

Tipo de tarefa: Articular saberes intramatemáticos, no caso função quadrática e área de figuras planas.

Tarefa: De uma folha retangular de 30 cm por 20 cm são retirados, de seus quatro cantos, quadrados de lados medindo x cm. Com isso, a área que sobrou da folha é de 404 cm^2 . Qual é o valor de x ? (Dante, 2008, p. 55)



Quadro em que a tarefa é enunciada: geométrico

Técnica1: Dividir a figura em retângulos cujos lados são conhecidos, calcular as áreas cuja soma deve ser igual ao valor dado. Determinar o valor de x por meio de uma técnica para resolver equações do segundo grau.

Técnica2: Compor o retângulo com as figuras retiradas e calcular a área do retângulo e subtrair do cálculo da área dos quadrados retirados da figura, que após a subtração deve ser igual ao valor da área dada.

Objetos ostensivos em jogo: figural (figura dada no enunciado) e escritural algébrico e numérico (lados de quadrados e retângulos e cálculo da área)

Objetos não ostensivos: noção de área de retângulo e raízes de uma equação do segundo grau.

Quadro em que a tarefa é resolvida: geométrico e algébrico.

Nível de conhecimento: mobilizável em relação a noção de área e disponível em relação ao conceito de equação do segundo grau.

Aplicações extramatemáticas: Esse tipo de tarefa pode ser utilizado e ampliado para aplicações em construção civil e logística, por exemplo.

Fonte: Os autores.

Figura 2 - Exemplo de uma tarefa para o EFaf.

Tipo de tarefa: Articular saberes intramatemáticos, no caso função quadrática e área de figuras planas.

Tarefa: Sejam x a medida de comprimento do lado de uma região quadrada, P a medida de perímetro e A a medida de área. a) Verifique no caderno se a lei que associa a medida de perímetro P da região quadrada em função da medida de comprimento x do lado dela é de uma função linear. b) A medida de perímetro de uma região quadrada é diretamente proporcional à medida de comprimento do lado dela? Se sim, diga qual é o coeficiente de proporcionalidade. c) Verifique no caderno se a lei que associa a medida de área A da região quadrada em função da medida de comprimento x do lado dela é de uma função linear. d) A medida de área de uma região quadrada é diretamente proporcional à medida de comprimento do lado dela? Se sim, diga qual é o coeficiente de proporcionalidade. (DANTE, 2018, p. 136)

Quadro em que a tarefa é enunciada: geométrico.

Técnica: Determinar a área e o perímetro de um quadrado em função do comprimento de seu lado x . Verificar se perímetro em relação ao lado do quadrado x representa grandezas diretamente proporcionais e determinar o coeficiente de proporcionalidade. Articular conhecimento entre função linear e função quadrática. Justificar que a área da região quadrada não é diretamente proporcional a medida do comprimento de seu lado.

Objetos ostensivos em jogo: escritural algébrico (lados de figuras planas e cálculo de perímetro e área)

Objetos não ostensivos: noções de perímetro e área de quadrado enquanto relação entre grandezas, função linear, função quadrática, grandezas diretamente proporcionais e relação com a noção de função, diferença entre função linear e quadrática.

Quadro em que a tarefa é resolvida: geométrico e algébrico.

Nível de conhecimento: mobilizável em relação a noção de área, perímetro, função linear, grandezas diretamente proporcionais e disponível em relação função quadrática, distinção entre função linear e quadrática.

Aplicações extramatemáticas: Esse tipo de tarefa pode ser utilizado e ampliado para aplicações em construção civil e logística, por exemplo.

Fonte: Os autores.

O estudo das praxeologias usuais por meio dos livros didáticos de Dante para o EFaf, permite identificar nas tarefas contextualizadas propostas pelo autor novas aplicações, que podem ser utilizadas pelos professores e estudantes em projetos interdisciplinares e/ou para participação em concursos escolares, como ressaltamos por meio das aplicações intramatemáticas identificadas nos exemplos das figuras 1 e 2, pois é possível encontrar uma situação real associada aos exemplos apresentados, ou seja este trabalho fica a cargo do professor e depende das possibilidades encontradas no nível escola, se nos referimos aos níveis de co-determinação.

Para a análise de livros didáticos para o Ensino Médio utilizamos os livros didáticos de Dante (2005, 2011, 2013) e Souza (2021).

Na obra de Dante (2005), o autor ao introduzir a noção de função quadrática utiliza um exemplo de cerca de uma quadra de basquete retangular a partir da quantidade de tela disponível, ou seja, ao articular a noção de área de um retângulo com o comprimento de seus lados encontramos uma função quadrática, que na sequência será definida por meio do objeto ostensivo algébrico que permite calcular os possíveis valores da função em um ponto, os zeros da função e estudar sua forma canônica e introduzir o objeto ostensivo gráfico e assim visualizar as propriedades da função quadrática. Nas praxeologias de aplicação encontramos diferentes tarefas que como as já identificadas para o EFaf podem auxiliar na construção de projetos interdisciplinares, em particular, para o desenvolvimento dos itinerários formativos indicados na BNCC.

A seguir escolhemos apresentar o exemplo da figura 3, que corresponde ao mesmo tipo de tarefa encontrada para o EFaf e que demanda a identificação da área do retângulo enquanto uma função quadrática de seus lados. A opção por esse exemplo se deve ao fato desse tipo de tarefa ter sido utilizado nas obras de Dante para o Ensino Médio entre 2005 até 2013.

Figura 3 - Exemplo da tarefa para o EM.

Tipo de tarefa: Articular saberes intramatemáticos, no caso função quadrática e área de figuras planas.
Tarefa: Deseja-se construir uma casa térrea de forma retangular. O retângulo onde a casa será construída tem 80 m de perímetro. Calcule as dimensões desse retângulo sabendo que a área de sua região deve ser a maior possível. (Dante, 2005, p. 143)
Quadro em que a tarefa é enunciada: geométrico
Técnica: Construir o retângulo e identificar seus lados utilizando o perímetro dado. Determinar a área do retângulo e considerá-la como uma função. Utilizar a noção de vértice para maximizar a função.
Objetos ostensivos em jogo: figural (representado pelo estudante), escritural algébrico e/ou gráfico.
Objetos não ostensivos: perímetro, área, função quadrática, gráfico da função quadrática e vértice da função quadrática.
Quadro em que a tarefa é resolvida: geométrico e algébrico ou geométrico e gráfico.
Nível de conhecimento: mobilizável para as noções de perímetro e área e disponível para a noção de função quadrática, seu gráfico e suas propriedades.
Aplicações extramatemáticas: Como nos exemplos anteriores pode ser utilizado em aplicações de logística e construção civil como é o caso.

Fonte: Os autores.

Ainda para o EM nas obras de Dante (2011) e Dante (2013) observamos que os saberes associados à noção de função quadrática são introduzidos na mesma ordem que os do ano de 2005, com exemplos de praxeologias identificadas na obra desse mesmo ano. Ressaltamos que na obra de 2013, o autor introduz uma nova praxeologia por meio de um tipo de tarefa que articula o objeto ostensivo algébrico com o objeto ostensivo gráfico por meio do *software* Geogebra, o que corresponde a um diferencial, pois permite visualizar e conjecturar sobre as propriedades das função quadráticas por meio de diversos exemplos. Assim, para as obras de Dante (2016) e Dante (2018) encontramos uma nova

praxeologia que corresponde a utilização da Geogebra, o que indica a adequação a uma nova demanda da sociedade, mostrando assim a necessidade de mudança nos outros níveis se nos referimos a escala de níveis de co-determinação introduzida por Chevallard (2007), em particular, nos níveis inferiores, o que conduz a importância de considerar essa nova demanda social nos cursos de formação inicial e continuada, pois os professores precisam conhecer o *software* e suas potencialidades em relação às diferentes aplicações sobre conceitos e noções a serem trabalhados em sala de aula.

Analisamos ainda a obra de Souza (2021) para o EM, observando inicialmente que devido a mudança organizacional do EM, o autor apresenta no volume 2 de sua coleção de 6 livros o estudo de “Funções e suas aplicações”, ou seja, ele vai adequar sua obra às exigências de nível superior: os níveis político e pedagógico se nós referimos aos níveis de co-determinação.

Na obra de Souza (2021), o autor introduz a noção de função quadrática por meio de uma situação contextualizada relacionada ao lançamento oblíquo, tratando particularmente da situação real de salto em distância.

Na sequência, o autor define parábola e função quadrática, utilizando como exemplo a área de um campo de futebol, isto é, o tipo de tarefa “Articulação entre saberes intramatemáticos, no caso função quadrática e área de figuras planas” para a qual são apresentados exemplos nas figuras 1, 2, 3, e 4, analisados por meio da grade de análise, o que mostra a aplicabilidade da função quadrática e permite defini-la formalmente e utilizar sua representação por meio do objeto ostensivo algébrico em diversas situações matemáticas e contextualizadas.

São exibidos e estudados ainda: zeros de uma função quadrática, revisita ao estudo das equações do segundo grau, gráfico de uma função quadrática e suas propriedades, conjunto imagem, valor máximo e mínimo, estudo do sinal e equação da parábola.

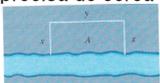
O estudo proposto articula álgebra e geometria, revisita conhecimentos prévios e utiliza o Geogebra como apoio a visualização e conjectura das propriedades da função quadrática e dá ênfase às situações contextualizadas apresentando diversas situações nas tarefas propostas aos estudantes.

Para o Ensino Superior nossas análises se basearam nas obras de Stewart (2000, 2011) por ser uma das obras indicadas na maioria das bibliografias básicas dos cursos superiores da área de exatas e que utiliza o tipo de

Figura 4 - Exemplo da tarefa para o Ensino Superior.

Tipo de tarefa: Articular saberes intramatemáticos, no caso função quadrática e área de figuras planas.

Tarefa: Um fazendeiro tem 2400 metros de cerca e quer cercar um campo retangular que está na margem de um rio reto. Ele não precisa de cerca ao longo do rio. Quais são as dimensões do campo que tem maior área?



(Stewart, 2000, p. 330)

Quadro em que a tarefa é enunciada: Geométrico e cotidiano

Técnica: A mesma das tarefas dos quadros 1, 2 e 3 para determinar a função área, podendo utilizar a técnica associada ao cálculo do vértice já desenvolvida no Ensino Médio. Em se tratando do ensino superior espera-se que os estudantes maximizem a função utilizando a noção de derivada.

Objetos ostensivos em jogo: figural (dado no enunciado), escritural algébrico e/ou gráfico, funcional.

Objetos não ostensivos: perímetro, área, função quadrática, gráfico da função quadrática, vértice da função quadrática, derivada e suas propriedades.

Quadro em que a tarefa é resolvida: geométrico e algébrico, geométrico e gráfico e geométrico, algébrico e analítico.

Nível de conhecimento: disponível em relação aos objetos não ostensivos em jogo na tarefa e mobilizável em relação à noção de derivada de uma função real a valores reais.

Aplicações extramatemáticas: Como nos exemplos anteriores pode ser utilizado em aplicações de logística e construção civil.

Fonte: Os autores

As tarefas apresentadas nas figuras 1, 2, 3, e 4 relativas ao tipo de tarefa: Articulação de saberes intramatemáticos, no caso função quadrática e área de figuras planas, colocam em evidência as diferentes possibilidades de aplicações com uma mesma praxeologia em função da técnica empregada, que supõe a aplicação de novos conhecimentos cujo nível varia de acordo com a etapa escolar em que os estudantes se encontram.

A análise dos livros didáticos não se restringiu aos aqui apresentados, nossa opção já foi justificada, mas é importante observar que os livros didáticos indicados pelo PNLD seguem as orientações e apresentam outros tipos de tarefas contextualizadas que podem servir de apoio aos professores para a construção de projetos interdisciplinares e itinerários formativos, como indicado no novo currículo, mas para tanto é preciso que os professores tenham horários específicos para estudos e reuniões interdisciplinares, podendo assim avançar na construção de materiais apropriados às diferentes necessidades de seus estudantes.

A seguir, apresentamos algumas considerações retiradas desse estudo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Observamos que existe uma coerência em relação às propostas institucionais de utilização de praxeologias usuais nos materiais didáticos sobre a noção de função quadrática analisados para as diferentes etapas escolares que podem auxiliar professores e estudantes do Ensino Médio e Superior a revisar o trabalho realizado em etapas anteriores utilizando conhecimentos prévios disponíveis para a introdução dos novos conceitos como é possível observar nos exemplos apresentados nas figuras 1, 2, 3 e 4.

As praxeologias Matemáticas identificadas para o EFaf e o EM variam pouco para os livros até 2018, mas com a ênfase dada ao desenvolvimento de competências, interdisciplinaridade e contextualização observamos que a noção de função quadrática passa ser tratada apenas no EM, e ao considerar o livro analisado, Souza (2021), verificamos que o autor apresenta exemplos contextualizados, indica como a função quadrática corresponde a uma ferramenta que permite mostrar e justificar os fenômenos descritos nos exemplo, para no final defini-la, o que corresponde a uma nova organização didática ou praxeologiadidática.

Já para o EFaf ressaltamos que a noção de função quadrática não é tratada especificamente, mas devido ao exemplo apresentado na figura 2, parece ter sido deixada a cargo dos professores em função das necessidades apresentadas pelos estudantes de suas respectivas turmas.

Em relação ao Ensino Médio, o material analisado indica que as praxeologias propostas podem representar conhecimentos prévios disponíveis para os estudantes que iniciam o Ensino Superior nas áreas e disciplinas em que a Matemática serve de ferramenta para o seu desenvolvimento.

Além disso, ressaltamos que as diferentes praxeologias intra e extramatemáticas apresentadas e discutidas nas obras analisadas podem servir de base para a construção de itinerários formativos interdisciplinares que contemplem as necessidades específicas dos estudantes.

Mas, da mesma forma que a BNCC corresponde a mudança da abordagem por objetivos para a abordagem por competências, o estudo e a compreensão dessa nova forma de desenvolvimento do ensino e aprendizagem exige uma formação específica dos educadores em geral e, mais especificamente, dos professores, em particular, dos professor do Ensino Médio, pois todos necessitam de horários de estudo e reuniões para que possam desenvolver itinerários formativos que atendam às necessidades específicas de seus estudantes conforme apregoa a BNCC.

Destacamos ainda que apesar de nosso estudo ser fundamentado no modo instituição apresentado no trabalho de Gueudet, o mesmo possibilitou compreender novos modos de pensamento, que ao mesmo tempo conduzem a uma nova organização dos saberes e ao emprego de um novo modo de linguagem, o que parece mostrar a importância de preparar os professores de forma que os mesmos possam dispor de conhecimentos sobre os saberes matemáticos sobre um mesmo conceito ou noção desenvolvidos na etapa escolar em que atuam, o que mostra a dificuldade da profissão e a necessidade de formações contínuas constantes.

Ressaltamos que a análise da ecologia de conceitos e noções Matemáticas centrada na identificação de praxeologias que sobrevivem ou desaparecem, dependendo das demandas dos níveis superiores de co-determinação (humanidade, civilização, sociedade, escola, pedagogia, disciplina) e para o caso particular da noção de função quadrática, suas propriedades, suas representações e suas aplicações, mostra a importância de considerar o estudo dos documentos oficiais, materiais didáticos e macro avaliações, considerando o estudo da transição entre as diferentes etapas escolares para os conceitos e noções que correspondem à conhecimentos prévios de uma nova etapa.

Esses estudos podem servir para alimentar reflexões e discussões de professores de todas as etapas escolares por meio de reuniões interdisciplinares constantes, uma vez que a profissão “professor” exige que ele esteja sempre se atualizando.

REFERÊNCIAS

- BOCH, M.; CHEVALLARD Y. La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, nº 19, 1999.
- BOSCH, M.; FONSECA, C.; GASCÓN, J. Incompletitud de las organizaciones matemática locales en las instituciones escolares. **Recherche en Didactique des Mathématiques**, v. 23, n. 2-3, p. 205-250, 2004.
- BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais, Matemática: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental**. 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/introducao.pdf>. Acesso em: 22 de abr. 2023.
- BRASIL. **Parâmetros Curriculares nacionais+: ensino médio**. 2002. Disponível em: <http://www.basenacionalcomum.mec.gov.br/images/pcn/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 22 de abr. 2023.
- BRASIL. **Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio: Ciências da Natureza Matemática e suas tecnologias**. 2006. Disponível em: <http://dominiopublico.mec.gov.br/download/texto/me004769.pdf>. Acesso em: 22 de abr. 2023.
- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. 201. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 22 abr. 2023.
- CHEVALLARD, Y. **La Transposition Didactique: Du Savoir Savant au Savoir Enseigné**. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1991.
- CHEVALLARD, Y. Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique, **Recherches en didactique des mathématiques**, v. 12, n.1, p. 73-112, 1992.
- CHEVALLARD, Y. **Ostensifs et non-ostensifs dans l'activité mathématique**. 1994. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=125. Acesso em: 21 abr. 2023.

- CHEVALLARD, Y. **Organiser l'étude: 1. Structures & fonctions**. 2002. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=52. Acesso em: 22 abr. 2023
- CHEVALLARD, Y. **Organiser l'étude: 3. Ecologie & regulation**. 2002a. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=53. Acesso em: 22 abr. 2023
- CHEVALLARD, Y. **Le développement actuel de la TAD : pistes et jalons**. 2007. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=150. Acesso em: 22 abr. 2023.
- DANTE, L.R. **Tudo é Matemática**. São Paulo: Ática. 2008.
- DANTE, L.R. **Projeto Teláris: Matemática**. São Paulo: Ática. 2013.
- DANTE, L.R. **Projeto Teláris: Matemática**. São Paulo: Ática. 2016.
- DANTE, L.R. **Projeto Teláris: Matemática**. São Paulo: Ática. 2018.
- DANTE, L. R. **Matemática**. São Paulo: Ática, 2005.
- DANTE, L.R. **Matemática: Contexto & Aplicações**. São Paulo: Ática. 2011.
- DANTE, L.R. **Matemática: Contexto & Aplicações**. São Paulo: Ática. 2013.
- DIAS M. A. **Problèmes d'articulation entre points de vue "cartésien" et "paramétrique" dans l'enseignement de l'algèbre linéaire**. Thèse de Doctorat. Université Paris Cité, 1998.
- DOUADY, R. **Jeux de cadre et dialectique outil objet dans l'enseignement des mathématiques**. Thèse de Doctorat. Université Paris Cité, 1984.
- DOUADY, R. Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. **Repères IREM**, v. 6, p. 132-158, 1992.
- GODOY, A. S. **Introdução à pesquisa qualitativa e suas possibilidades**. 1995. Disponível em: <https://bibliotecadigital.fgv.br/ojs/index.php/rae/article/view/38183/36927>. Acesso em: 20 abr. 2023.
- GUEUDET, G. Investigating the secondary-tertiary transition. **Educational Studies in Mathematics**, v. 67, n. 3, p. 237-254, 2008.
- GUEUDET, G. **La transition secondaire-supérieur: différents regards, différentes vues**. In: Intervention au Centre de Didactique Supérieur. Liège, 2008a, p. 1-12.
- ROBERT, A. **Niveaux de conceptualisation dans l'enseignement secondaire**. In: DORIER, J. L. (org.). L'enseignement de l'algèbre linéaire en question. Grenoble, 1997. p. 149-157.
- ROBERT, A. Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v.18, n. 2, p. 139-190, 1998.
- SOUZA, J. **Multiversos Matemática: Funções e suas Aplicações**. São Paulo: FTD. 2021.

STEWART, J. **Cálculo**. São Paulo: Thomson Pioneira, 2000.

STEWART, J. **Cálculo**. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

VERGNAUD, G. **Compétence, activité et conceptualisation**. In: CIEAEM65, Turin, 2013. p. 1-17.