DOI: doi.org/10.37781/vidya.v43i1.4468 VIDYA, v. 43, n. 1, p. 221-244, jan./jun., 2023 - Santa Maria, 2023. **ISSN** 2176-4603

# CLASSIFICAÇÕES, ESQUEMAS E EXPRESSÕES NUMÉRICAS: IMBRICAÇÃO ENTRE OS CAMPOS CONCEITUAIS ADITIVO E MULTIPLICATIVO EM UM PROBLEMA MISTO

## *CLASSIFICATIONS, SCHEMES AND NUMERICAL EXPRESSIONS: IMBRICATION BETWEEN ADDITIVE AND MULTIPLICATIVE CONCEPTUAL FIELDS IN A MIXED PROBLEM*

## *CLASIFICACIONES, ESQUEMAS Y EXPRESIONES NUMÉRICAS: IMBRICACIÓN ENTRE CAMPOS CONCEPTUALES ADITIVOS Y MULTIPLICATIVOS EN UN PROBLEMA MIXTO*

**RITA DE CÁSSIA DE SOUZA SOARES RAMOS**[1]
**JOÃO ALBERTO DA SILVA**[2]

**RESUMO**

As expressões numéricas são uma das representações possíveis para problemas mistos, que podem ser resolvidos utilizando uma série de sistemas de significantes e processos. A diversidade de processos de pensamento ao solucionar problemas matemáticos deve ser levada em conta pelos professores. Pensando nisso, este texto busca analisar os processos organizados por estudantes do Ensino Fundamental ao resolver uma situação de problema misto, com enfoque nas expressões numéricas. Organizamos segundo os diagramas da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud os caminhos que levaram os estudantes a propor as soluções apresentadas. O público consistiu em 25 estudantes do sexto e oitavo anos de escolas públicas do Rio Grande do Sul, entrevistados por meio do Método Clínico, cuja análise nos permitiu organizar os processos em nove casos sem ordenação hierárquica, descritos segundo a ordem das operações e a mobilização de classes dos campos conceituais aditivo e multiplicativo.

**Palavras-chave:** Teoria dos Campos Conceituais. Expressões Numéricas. Problemas Mistos. Diagramas.

***ABSTRACT***

*Numerical expressions are one of the possible representations for mixed problems, which can be solved using a variety of systems of signifiers and processes. The diversity of thought processes when solving mathematical problems should be taken into account by teachers. With this in mind, this paper aims to analyse the processes organised by primary school students when solving a mixed problem situation, with a focus on numerical expressions. We organised the paths that led the students to propose the solutions presented according to the diagrams of Vergnaud's Conceptual Fields Theory. The audience consisted of 25 sixth and eighth grade students from public schools in Rio Grande do Sul, interviewed using the Clinical Method, whose analysis allowed us to organise the processes into nine cases without hierarchical ordering, described according to the order of operations and the mobilisation of classes from the additive and multiplicative conceptual fields.*

***Keywords:*** *Conceptual Fields Theory. Numerical Expressions. Mixed Problems. Diagrams.*

***RESUMEN***

*Las expresiones numéricas son una de las posibles representaciones de los problemas mixtos, que pueden resolverse utilizando diversos sistemas de significantes y procesos. La diversidad de procesos de pensamiento a la hora de resolver problemas matemáticos debe ser tenida en cuenta por los profesores. Teniendo esto en cuenta, este texto*

1 Doutora em Educação em Ciências. Universidade Federal de Pelotas. rita.ramos@ufpel.edu.br Orcid: http://orcid.org/0000-0002-7842-4300
2 Doutor em Educação. Universidade Federal do Rio Grande. joaosilva@furg.br. Orcid: http://orcid.org/0000-0002-5259-7748

*pretende analizar los procesos organizados por los alumnos de primaria al resolver una situación problemática mixta, con especial atención a las expresiones numéricas. Organizamos los caminos que llevaron a los alumnos a proponer las soluciones presentadas según los esquemas de la Teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud. El público estuvo formado por 25 alumnos de sexto y octavo grado de escuelas públicas de Rio Grande do Sul, entrevistados mediante el Método Clínico, cuyo análisis nos permitió organizar los procesos en nueve casos sin ordenación jerárquica, descritos según el orden de las operaciones y la movilización de clases de los campos conceptuales aditivo y multiplicativo.*

***Palabras-clave**: Teoría de los campos conceptuales. Expresiones numéricas. Problemas mixtos. Diagramas.*

## INTRODUÇÃO

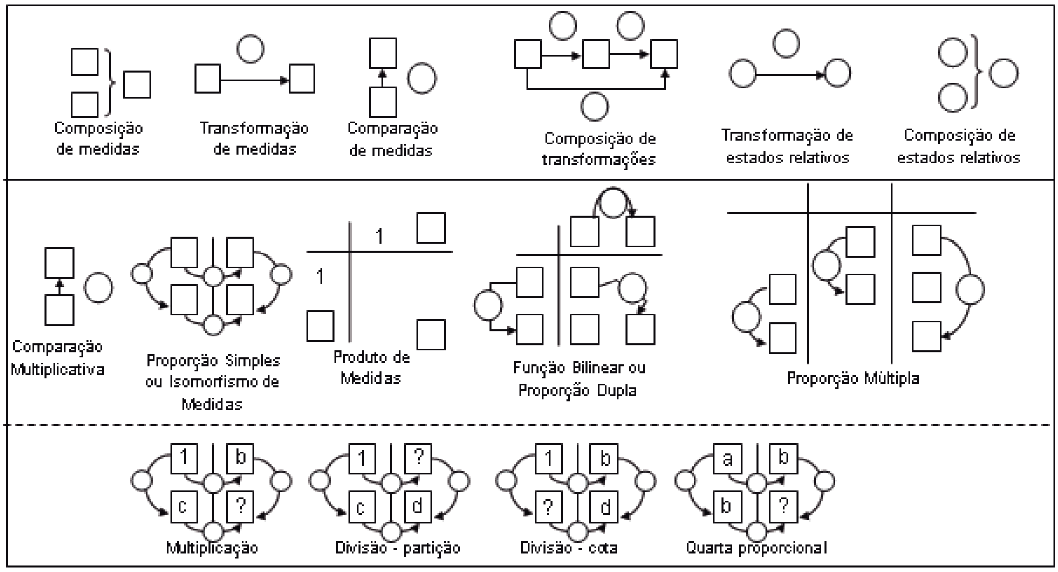
Este texto é parte de uma pesquisa que analisa as imbricações entre os campos conceituais aditivo e multiplicativo por meio da resolução de um problema misto e de sua representação como expressão numérica. Buscamos responder as seguintes perguntas: como estudantes do Ensino Fundamental resolvem um problema misto? Quais as estratégias utilizadas por estes estudantes? Quais as expressões numéricas resultam dos processos pelos quais os estudantes resolvem o problema? Quais os diagramas que descrevem as estratégias dos estudantes ao resolver um problema de composição de medidas e proporção? Para responder tais perguntas nos ancoramos na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, fizemos um breve levantamento sobre o que se entende por problemas mistos, sua classificação e diagramas, e analisamos as respostas dadas a um problema de proporção e composição de medidas.

Com o intuito de entender o desenvolvimento da aprendizagem, de forma mais específica os conhecimentos escolares, Vergnaud (1990) propõe a Teoria dos Campos Conceituais, a qual afirma que o conhecimento pode se dividir em subcampos da experiência, compostos de conjuntos estruturados de situações que o sujeito enfrente, denominado campos conceituais. Cada conceito é formado por um conjunto de situações, invariantes operatórios e representações relacionadas a ele, e cada situação movimenta um conjunto de conceitos para ser resolvida, sendo o campo conceitual composto por essa série de situações e ampliado ao longo do desenvolvimento do sujeito (VERGNAUD, 1990, 2007, 2009a).

Vergnaud (2009b) trabalha situação no sentido de tarefa a ser realizada. Toda situação que necessita de uma adição ou subtração para ser resolvida faz parte do Campo Conceitual Aditivo (CCA), da mesma forma, toda situação que depende de uma multiplicação ou divisão para sua solução, pertence ao Campo Conceitual Multiplicativo (CCM). As situações dos campos conceituais Aditivo e Multiplicativo são classificadas de forma relacional, conforme diagramas no Quadro 1, que apresentam tais classes (VERGNAUD, 2009a, MAGINA; MERLINI; SANTOS, 2016), mais as subclasses correspondentes às proporções simples.

As proporções simples são chamadas de isomorfismo de medidas, as proporções múltiplas são a composição de duas ou mais proporções simples e as proporções duplas possuem uma grandeza relacionada a outras duas, as quais não são relacionadas entre si (VERGNAUD, 1983). Os problemas aritméticos compostos ao mesmo tempo de pelo menos uma adição ou subtração e de pelo menos uma multiplicação ou divisão são chamados por Vergnaud (2009) de problemas mistos, cujos diagramas são a composição das categorias ilustradas pelo quadro 1.

**Quadro 1** - Diagramas das situações do CCA e CCM.




Fonte: Adaptado de Vergnaud (1990; 2009a), Gitirana *et al*. (2014), Magina; Merlini; Santos (2016) e Miranda (2019).

Especificamente no caso de composição de medidas do Campo Conceitual Aditivo, as relações estão entre as partes e o todo. No Campo Conceitual Multiplicativo, a comparação multiplicativa tem como elementos o referente, o referido e a relação.

## PROBLEMAS MISTOS

Em função da situação construída para compor o instrumento ser do tipo problema misto, sentimos a necessidade de compreender como os problemas mistos se organizam em textos acadêmicos, assim, realizamos um levantamento em duas fases, sendo a primeira uma busca no catálogo de periódicos da CAPES, na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações, no Portal de Periódicos da CAPES, no portal Scielo, na Edubase, nas últimas cinco edições do Encontro Nacional de Educação Matemática e Seminário Internacional de Educação Matemática e no Google Acadêmico. O descritor utilizado foi "problemas mistos", conseguindo a seguinte quantidade de trabalhos:

**Tabela 1 -** Trabalhos sobre problemas mistos nos portais pesquisados.

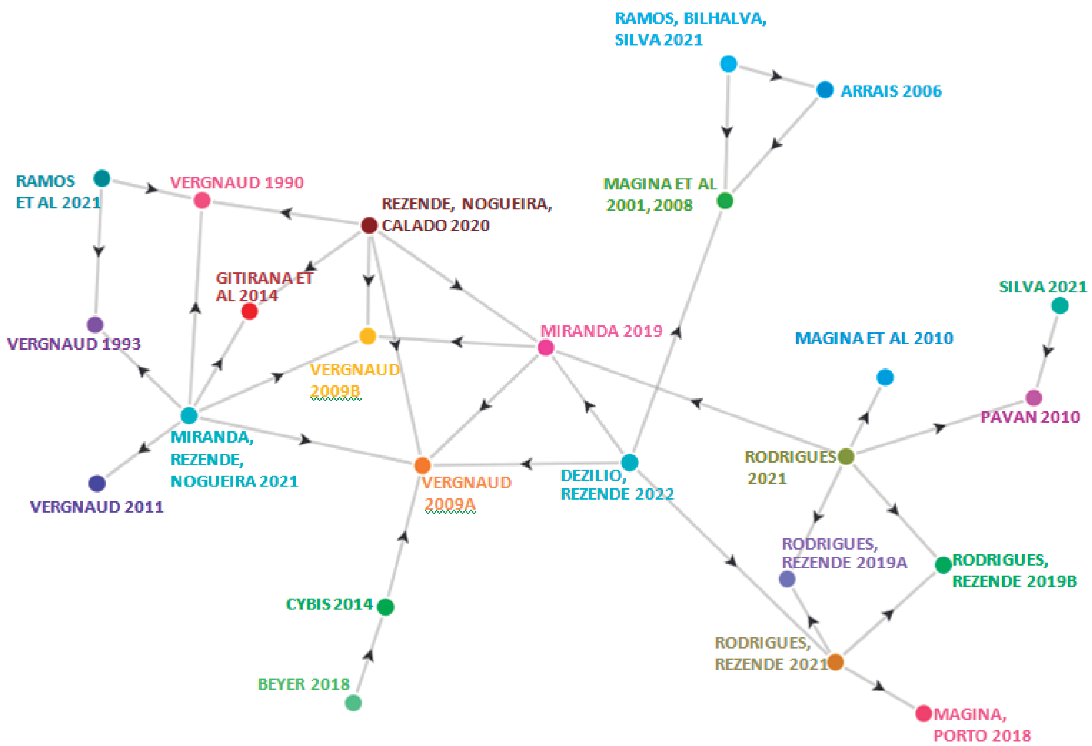
| Portal | Total de trabalhos | Utilizados | Tese | Dissertação | Artigos | Evento |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Catálogo CAPES | 5 | **2** | 0 | 2 | 0 | |
| BDTD | 16 | **2/0** | 0 | 2/0 | 0 | |
| Periódicos CAPES | 8 | **4** | 0 | 0 | 4 | |
| Google Acadêmico | 195 | **8/4** | 1 | 3/2 | 3/1 | 1 |
| TOTAL | | **10** | 1 | 3 | 5 | 1 |

Fonte: construção dos autores.

Nos portais Scielo e Edubase e nos eventos ENEM e SIPEM a busca não retornou artigos. A barra na tabela 1 indica número de trabalhos selecionados/número de trabalhos que não estão nas linhas anteriores. No Google Acadêmico, dos 195 trabalhos, 30 versavam sobre o tema, mas 17 compreendiam os números mistos como classe de estruturas aditivas e 4 tiveram uma compreensão indefinida, restando 8 trabalhos que apresentaram problemas mistos como situações que contemplam a multiplicação ou divisão e a subtração ou adição, conforme nossa filiação à Teoria dos Campos Conceituais. Portanto, na primeira etapa, foram selecionados 10 trabalhos, sendo eles: as dissertações de Beyer (2018), Miranda (2019) e Rodrigues (2021), a tese de Silva (2021), os artigos de Rodrigues e Rezende (2021), Rezende, Nogueira e Calado (2020), Miranda, Rezende e Nogueira (2021), Dezilio e Rezende (2022), Ramos *et al.* (2021), e a comunicação em evento de Ramos, Bilhalva e Silva (2021).

A segunda etapa consistiu na coleta das referências que sustentaram os trabalhos da primeira etapa em relação aos números mistos, encontrando outros 15 textos, perfazendo o total de 25 textos, conforme Figura 1. A rede apresentada indica os textos e as referências que embasaram exclusivamente o capítulo ou item referente à noção de problemas mistos.

**Figura 1** - Rede de textos acadêmicos que mencionam problemas mistos.




Fonte: construção dos autores.

Gitirana *et al.* (2014) e Magina *et al*. (2001; 2008) não abordam especificamente problemas mistos, mas categorizam e pormenorizam as classificações propostas por Vergnaud (2009) para as classes de situações do Campo Conceitual Multiplicativo e do Campo Conceitual Aditivo, por meio de esquemas sagitais, organização das situações e exemplos. São livros que guiam boa parte dos estudos sobre Teoria dos Campos Conceituais, Estruturas Aditivas e Estruturas Multiplicativas no Brasil.

Magina *et al*. (2010) trabalham com problemas, cálculos relacionais, estratégias e respostas de alunos de primeiro ao quarto ano a respeito de problemas aditivos, concluindo que quanto mais complexo o problema aditivo, menor o número de acertos, e da necessidade de reconsiderar o ensino de Matemática e o papel da pesquisa na formação do professor dos anos iniciais. Magina e Porto (2018) estudam estratégias utilizadas por estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental ao resolverem três situações-problema que envolvem o conceito de função, das quais duas são problemas mistos. Os estudantes resolvem os problemas tanto da forma aditiva quanto multiplicativa. As autoras concluem que com professores conhecedores dos teoremas em ação subjacentes, é possível a formação conceitual de função neste nível de ensino.

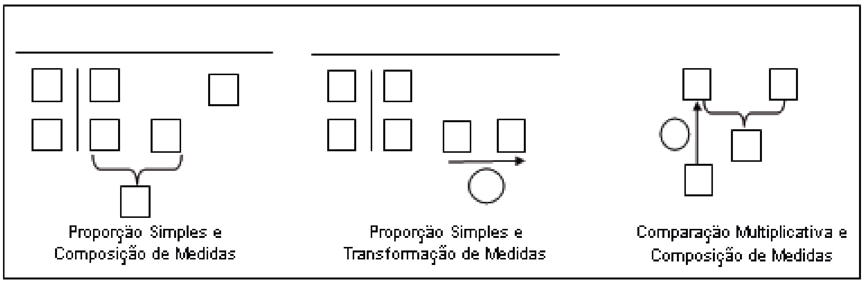
É razoável que ao menos indiretamente, todos os trabalhos que versam sobre a Teoria dos Campos Conceituais estejam embasados por textos de Vergnaud. No artigo de 1990, publicado na RDM, em francês, o autor apresenta a Teoria dos Campos Conceituais, definindo esquemas, conceitos em ação, teoremas em ação, conceito, significantes, situações, as relações aditivas e multiplicativas de base e relaciona tais elementos entre si. Em 1993 Vergnaud participa de um seminário no Rio de Janeiro, e seu texto, em língua portuguesa, aborda os elementos do artigo de 1990. Na edição de 1996 do livro de Jean Brun, Vergnaud publica um capítulo no qual pormenoriza as ideias de situação, e aprofunda as relações entre os sentidos, os simbolismos e como a Teoria dos Campos Conceituais os compreende.

O livro publicado originalmente em 1981 e traduzido para a Língua Portuguesa em 2009, chamado a Criança, a Matemática e a Realidade, organiza, sistematiza e apresenta detalhadamente a Teoria dos Campos Conceituais, suas relações, elementos, representações, procedimentos e elementos que dela fazem parte. Além de abordar os Campos Conceituais aditivo e multiplicativo, como nos textos anteriores, Vergnaud (2009a) explicita o que entende por problemas mistos: problemas que compreendem ao mesmo tempo operações dos campos aditivo e multiplicativo; além disso, exemplifica e organiza um diagrama cuja estrutura utilizamos neste texto. No mesmo ano, o autor publica um capítulo no livro de Cristiano Muniz e Barbara Bittar, denominado o que é aprender, e explicita o que entende por aprendizagem, trazendo as ideias de adaptação e esquema de Piaget, evidenciando a aprendizagem em situação e a partir das relações entre esquemas, invariantes operatórios, sistemas de significantes, representação, conceito e transposição, Vergnaud (2009b) define a aprendizagem por meio da Teoria dos Campos Conceituais. Já nos textos anteriores, Vergnaud estabelece que a aprendizagem se dá ao longo da vida, por meio do enfrentamento de situações, e em 2011 diferencia a aprendizagem a longo prazo, com uma perspectiva de desenvolvimento, e a de curto prazo, pela resolução de situações propostas em sala de aula.

Dos trabalhos analisados, dois têm como tema as expressões numéricas e a imbricação entre os campos conceituais aditivo e multiplicativo sob a forma da resolução de situações do tipo problemas mistos, sendo que Ramos *et al*. (2021) analisa livros didáticos contendo situações envolvendo expressões numéricas, e as classifica em aditivas ou multiplicativas puras ou problemas mistos, e Ramos, Bilhalva e Silva (2021) apresentam a pré-análise de um instrumento de pesquisa que consiste em um problema misto de proporção simples e transformação de medidas, a ser estudado sob o Método Clínico Piagetiano.

O grupo de pesquisa GEPEDiMa - Grupo de Pesquisa em Didática da Matemática, da Universidade do Oeste do Paraná, investiga a função afim e os campos conceituais (REZENDE; NOGUEIRA; CALADO, 2020), firmados nesta proposta, os problemas mistos são vistos sob uma ótica funcional. A maior parte dos trabalhos versa sobre função afim e analisa os problemas mistos sob essa ótica. Miranda (2019) estuda problemas mistos em livros didáticos, descrevendo uma classificação de problemas mistos segundo seu papel funcional em funções afins, a partir das classes de estruturas aditivas e multiplicativas de Vergnaud (2009), compondo 30 possibilidades de problemas mistos, sendo que nas coleções estudadas, no Ensino Fundamental, dos 34 problemas, 17 são de Proporção Simples e Composição de Medidas, e no ensino Médio, dos 44 problemas, 15 são de Proporção Simples e Composição de Medidas, excedendo problemas puramente multiplicativos ou aditivos. No Quadro 2 podemos observar os diagramas produzidos por Miranda (2019) para as classes de problemas mistos presentes nos livros que fizeram parte do seu corpus de estudo.

**Quadro 2** - Diagramas de problemas mistos.




Fonte: Adaptado de Miranda (2019).

Miranda, Rezende e Nogueira (2021) analisam estruturas de problemas de função afim encontrados em uma coleção de livros didáticos, e estabelecem sua classificação, em problemas mistos ou puramente multiplicativos. Das cinco situações, três são mistas, sendo uma do tipo proporção simples e composição de medidas e duas de proporção simples e transformação de medidas. Rezende, Nogueira e Calado (2020) identificaram como as ideias base de função são mobilizadas por estudantes brasileiros dos anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. Analisaram as respostas de três problemas, dois de problemas mistos, sob o olhar das ideias de função, concluindo que há necessidade de trabalhar generalização com os estudantes.

Rodrigues (2021) analisou invariantes operatórios, associados ao conceito de função, mobilizados por alunos do 5º ano do Ensino Fundamental, na resolução de problemas mistos do tipo proporção simples e transformação de medidas. Os invariantes operatórios foram modelados na forma de teoremas em ação e explicitados como conceitos em ação. As ideias base de função foram mobilizadas como conceitos em ação, e percebeu-se que o mesmo teorema em ação pode ser manifestado em esquemas diferentes da mesma classe de problemas ou de classe diferente. Rodrigues e Rezende (2021) analisaram problemas mistos propostos em uma coleção de livros didáticos de matemática do 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental, na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais, pelas possibilidades de classes de problemas mistos divulgadas por Miranda (2019). Dos 46 problemas mistos analisados, classificados em sete classes, desenvolvidas com os esquemas relacionais propostos por Miranda (2019) e Vergnaud (2009). A classe mais frequente foi a proporção simples e composição de medidas, com 19 questões.

Dezilio e Rezende (2022) analisam quais as ideias de função estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental mobilizam ao resolverem problemas mistos envolvendo composição de medidas e proporção simples. As autoras discutem sobre os invariantes operatórios relacionados à função apresentados pelos estudantes em cada resolução, e identificam as ideias de correspondência, dependência, regularidade, variável, proporcionalidade, generalização e a modelação da função afim, concluindo com a defesa do trabalho de problemas mistos nos anos iniciais para a construção da ideia de função durante o período escolar.

Silva (2021) investigou quais contribuições a implementação de uma sequência de problemas de estruturas multiplicativas proporciona para a compreensão das ideias base de função por alunos de quinto ano, por meio de vinte e dois problemas de estruturas multiplicativas e problemas mistos. Os grupos tiveram maior facilidade em manifestar a forma operatória do que a forma predicativa do conhecimento. Conclui que quanto mais consciente o aluno estiver de sua forma operatória, mais condição terá para manifestar a forma predicativa, seja oralmente ou por escrito.

Beyer (2018) mapeou as pesquisas sobre Campo Conceitual Multiplicativo no Brasil. A autora produziu resenhas sobre 32 trabalhos, dentre os quais encontramos Cybis (2014), a qual trabalhou problemas multiplicativos e mistos com os estudantes, avaliando se os diagramas de barras e os processos heurísticos contribuiriam na aprendizagem de Matemática.

Embora Arrais (2006) assinale como problema misto um problema puramente aditivo, diferentemente de nossa compreensão, o autor propôs o duplo campo conceitual das estruturas mistas, para expressões aritméticas com as quatro operações, indicando os invariantes operatórios, situações e representações das mesmas. Vergnaud (1993) afirma que um Campo Conceitual é formado pelo conjunto de Situações, Invariantes Operatórios e Representações ligadas a um conceito. Arrais (2006) define o Campo Conceitual das Estruturas Mistas afirmando que a) as situações referentes ao conceito são enunciadas na linguagem oral ou na linguagem escrita. As Expressões Aritméticas resultantes destas situações são construídas para modelar situações do cotidiano, de jogos ou em programas (*Software*); b) Os invariantes operatórios para as expressões aritméticas são: as propriedades aritméticas, a Estrutura Aditiva, a Estrutura Multiplicativa e a prevalência operatória; e c) as representações possíveis são algorítmicas, esquemáticas, de sintaxe usando sinais de associação, ou ainda em linguagem materna oral ou escrita. Assim, as expressões aritméticas seriam uma representação do duplo campo conceitual das Estruturas Mistas.

Não compreendemos as expressões aritméticas ou expressões numéricas como duplo campo conceitual, mas como possibilidade de imbricação entre os campos conceituais aditivo e multiplicativo, ao trabalhar com problemas mistos (MIRANDA, 2019; REZENDE; NOGUEIRA; CALADO, 2020). O caso de maior frequência nas pesquisas sobre problemas mistos evidenciadas anteriormente é o de proporção simples e composição de medidas. Apresentamos neste texto um caso que inicialmente foi pensado ser desta categoria, mas que os processos realizados pelos estudantes mostraram outras possibilidades de classificação.

## MÉTODO

Este estudo faz parte de uma pesquisa sobre expressões numéricas como imbricação entre os campos conceituais aditivo e multiplicativo, na qual buscamos responder as seguintes perguntas: como estudantes do Ensino Fundamental resolvem um problema misto? Quais as estratégias utilizadas por estes estudantes? Quais as expressões numéricas resultam dos processos pelos quais os estudantes resolvem o problema? Quais os diagramas que descrevem as estratégias dos estudantes ao resolver um problema de composição de medidas e proporção?

Para tal, analisamos os processos utilizados pelos alunos na resolução de um problema misto, realizado por 25 estudantes do sexto e do oitavo anos de escolas públicas da região Sul do Brasil.

Inicialmente o instrumento visou compreender como as expressões numéricas sintetizam um problema misto, e se há imbricação nesta síntese. No entanto, para além das operações e representações, vislumbramos os processos que levaram os estudantes a resolver o problema, ainda que suas representações fossem variadas. A escolha dos caminhos se definiu em três casos.

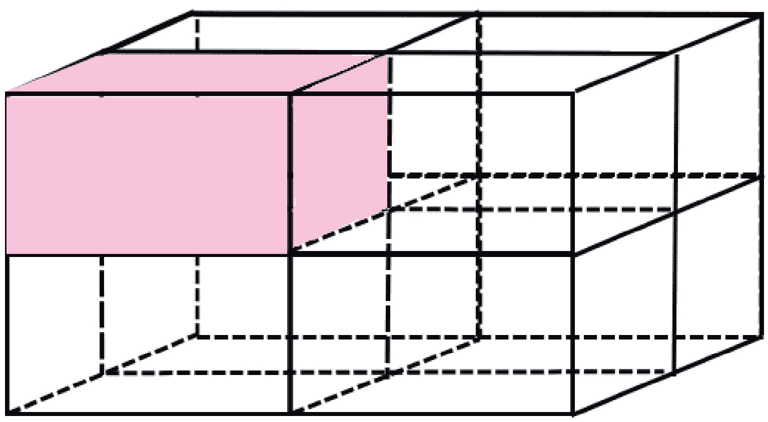
Os processos de pensamento da resolução de uma situação do Campo Aditivo ou Multiplicativo podem ser descritos por meio dos diagramas expostos na Figura 1, e ao tratar de problemas mistos, Vergnaud (2019) sugere uma análise por meio de um quadro, contendo as grandezas que fazem parte do problema e seus atributos. Esta parte da pesquisa trata da análise das respostas dos estudantes, tanto nos trajetos escolhidos e expostos no quadro de problemas mistos, quanto nos diagramas de síntese das classes dos campos conceituais.

Por meio do Método Clínico Piagetiano, o qual consiste na observação do sujeito em ação, em entrevista clínica, com critérios rígidos que evitam o enviesamento da pesquisa. Tal método emprega a generalização por exaustão (DELVAL, 2002). Entrevistamos vinte e cinco crianças de duas escolas públicas do Sul do Brasil, com idade média de 12,25 anos, sendo quatorze estudantes do sexto ano e onze do oitavo ano. O estudo consistiu em apresentar oralmente uma situação na forma de problema misto, com suporte visual.

Em uma caixa cabem oito embalagens, em cada embalagem está um conjunto com seis estojos azuis, e dez estojos amarelos. Em cada estojo azul estão três canetas azuis, duas canetas pretas, duas canetas vermelhas e uma caneta verde. Em cada estojo amarelo estão duas canetas roxas e uma caneta cor de rosa. Qual a quantidade de canetas na caixa?

O material manipulável: uma caixa contendo 8 embalagens, e em uma das embalagens 6 estojos azuis e 10 estojos amarelos. Em um dos estojos azuis continha as canetas mencionadas no problema, o mesmo valendo para o estojo amarelo, conforme imagem esquematizada na Figura 2. Cada estudante, individualmente, deveria responder e registrar como calcular a quantidade de canetas na caixa, podendo manipular livremente o material. Conforme o mesmo montava seus cálculos, nós questionávamos seus passos, em uma entrevista.

**Figura 2** - Esquema do material manipulado no dia da entrevista.



Fonte: construção dos autores.

A situação consistiu em um problema misto contendo adições e multiplicações, respondido individualmente. Os registros foram os protocolos de resolução do problema e a transcrição das filmagens das resoluções, cujo detalhamento dos processos foi realizado a partir de Vergnaud (2009), que propõe que um problema misto possa ser analisado via quadro de grandezas, conforme Quadro 3.

**Quadro 3** - Quadro de análise para um problema misto.

<table>
<tr><th></th><th>Estojo azul</th><th>Estojo amarelo</th><th>Estojo azul na embalagem (6)</th><th>Estojo amarelo na embalagem (10)</th><th>Embalagem</th><th>Embalagem na Caixa (8)</th><th>Canetas por estojo</th></tr>
<tr><td>Caneta vermelha</td><td>A</td><td></td><td>I</td><td></td><td>Q</td><td>Z</td><td rowspan="4">Γ</td></tr>
<tr><td>Caneta azul</td><td>B</td><td></td><td>J</td><td></td><td>R</td><td>Δ</td></tr>
<tr><td>Caneta verde</td><td>C</td><td></td><td>K</td><td></td><td>S</td><td>Π</td></tr>
<tr><td>Caneta preta</td><td>D</td><td></td><td>L</td><td></td><td>T</td><td>Σ</td></tr>
<tr><td>Caneta rosa</td><td></td><td>E</td><td></td><td>N</td><td>U</td><td>Φ</td><td rowspan="2">Λ</td></tr>
<tr><td>Caneta roxa</td><td></td><td>F</td><td></td><td>O</td><td>V</td><td>Ψ</td></tr>
<tr><td>Total de canetas</td><td>G</td><td>H</td><td>M</td><td>P</td><td>X</td><td></td><td>Ω</td></tr>
</table>

Fonte: Adaptado de Vergnaud (2009a).

A análise compreendeu três grandes casos não ordenados, conforme os caminhos eleitos pelos participantes na resolução da situação. Os caminhos que os estudantes tomam para chegar ao resultado são diversos, mas necessariamente passam pelas relações presentes no quadro 3 e devem chegar ao resultado Ω, como podemos ver no quadro 4.

Como os processos se diferenciam pelos caminhos e não pelo nível de conhecimento matemático dos estudantes, nem pelas operações mais avançadas, não foi possível uma classificação ordenada dos casos, portanto os descrevemos de forma a compreender as possibilidades de escolha encontradas pelos estudantes ao resolver o problema. Os estudantes escolheram diversos caminhos. O quadro 4 indica as quantidades de canetas, embalagens e estojos, e serve para analisar as possibilidades dos caminhos escolhidos pelos participantes.

**Quadro 4** - Dados do problema na análise do problema misto.

<table>
<tr><th></th><th>Estojo azul (1)</th><th>Estojo amarelo (1)</th><th>Estojo azul na embalagem (6)</th><th>Estojo amarelo na embalagem (10)</th><th>Embalagem (1)</th><th>Embalagem na Caixa (8)</th><th>Canetas na caixa por estojo</th></tr>
<tr><td>Caneta vermelha</td><td>2</td><td></td><td>12</td><td></td><td>12</td><td>96</td><td rowspan="4">384</td></tr>
<tr><td>Caneta azul</td><td>3</td><td></td><td>18</td><td></td><td>18</td><td>144</td></tr>
<tr><td>Caneta verde</td><td>1</td><td></td><td>6</td><td></td><td>6</td><td>48</td></tr>
<tr><td>Caneta preta</td><td>2</td><td></td><td>12</td><td></td><td>12</td><td>96</td></tr>
<tr><td>Caneta rosa</td><td></td><td>1</td><td></td><td>10</td><td>10</td><td>80</td><td rowspan="2">240</td></tr>
<tr><td>Caneta roxa</td><td></td><td>2</td><td></td><td>20</td><td>20</td><td>160</td></tr>
<tr><td>Total de canetas</td><td>8</td><td>3</td><td>48</td><td>30</td><td>78</td><td></td><td>624</td></tr>
</table>

Fonte: Construção dos autores.

O que está em negrito são os dados do problema, os demais números correspondem às medidas das grandezas presentes na situação, conforme cabeçalho do quadro 4. O manejo dos dados da questão tem diversos caminhos, como por exemplo, aqueles que somam a quantidade de canetas de cada estojo, obtendo 8 e 3, multiplicam pela quantidade de estojos em uma embalagem, obtendo 48 e 30, juntam essas quantidades, obtendo 78 canetas em uma embalagem, e multiplicam pelo número de embalagens, obtendo 624 canetas em uma caixa. Este caminho segue GHMPX$\Omega$. Outro caminho possível é somar a quantidade de canetas de cada estojo, obtendo 8 e 3, multiplicar pela quantidade de estojos, obtendo 48 e 30, multiplicar pela quantidade de embalagens, obtendo 324 e 240, e obter, mediante adição, a quantidade de canetas da caixa. Este caminho segue GHM$\Gamma\Lambda\Omega$.

Os processos foram analisados segundo os diagramas dos quadros 1 e 2, bem como os operadores utilizados na construção do desenvolvimento da questão e as classes dos campos conceituais Aditivo e Multiplicativo, utilizando os protocolos e as entrevistas gravadas. Refletem os caminhos e as estratégias desenvolvidas pelos sujeitos, não necessariamente as representações escritas pelos mesmos. Foram divididos em três casos, conforme as relações entre as grandezas e as classes de situações utilizadas para a resolução do problema misto.

**RESULTADOS**

A partir da fala dos estudantes e da representação da resolução, descrevemos os processos utilizados pelos estudantes, suas estratégias e organizamos os diagramas que possivelmente descrevem o caminho por eles utilizado. As classes são as descritas por Vergnaud (2009a) e Gitirana *et al*. (2014). As respostas idiossincráticas, cujas representações não eram homomorfas à situação, por procedimentos desconexos, não foram analisadas segundo seus procedimentos, mas foram contabilizadas. Do total de respostas, 20% foram consideradas idiossincráticas, 36% do caso 1, 28% do caso 2 e 16% do caso 3.

O primeiro caso se referiu ao agrupamento de canetas nos estojos, na composição desses agrupamentos e na proporção entre o número de canetas e embalagens, em outras palavras: juntou a quantidade de canetas dos estojos e multiplicou pelo número de embalagens. O segundo disse respeito ao agrupamento de forma separada entre a quantidade de canetas em cada tipo de estojo e embalagens, ou seja, calculou a quantidade de canetas para cada tipo de estojo nas embalagens e juntou os diferentes tipos. O terceiro caso agrupou as canetas por cor, após por estojo e embalagem.

Os sistemas de representação para cada caso foram diversos, variando entre contas armadas, organogramas e escritas lineares, e o que avaliamos foram as formas de percepção das operações em cada situação. Para o primeiro e o segundo casos consideramos a quantidade de canetas no estojo amarelo ($C_{am}$) e no estojo azul ($C_{az}$), a quantidade de estojos amarelos em uma embalagem ($Est_{am}$) ou de estojos azuis em uma embalagem ($Est_{az}$) e a quantidade de embalagens (Emb). Para o terceiro caso, além das variáveis anteriores, encontramos as que correspondem às cores das canetas nos estojos: para caneta vermelha (cvm), caneta verde (cvd), caneta preta (cpt), caneta azul (caz), caneta rosa (crs) e caneta roxa (crx).

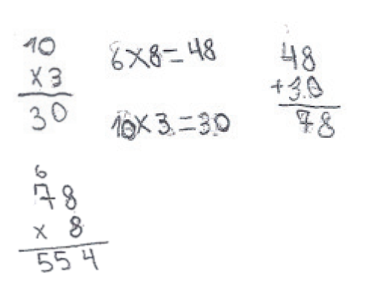
**Primeiro Caso - Proporção Simples, Composição De Medidas, Proporção Simples**

O primeiro conjunto de processos diz respeito à compreensão do problema como duas proporções simples, cujos resultados são operados como composição de medidas, e após novamente operados como proporção simples. Nove dos vinte e cinco estudantes optaram por esse caminho.

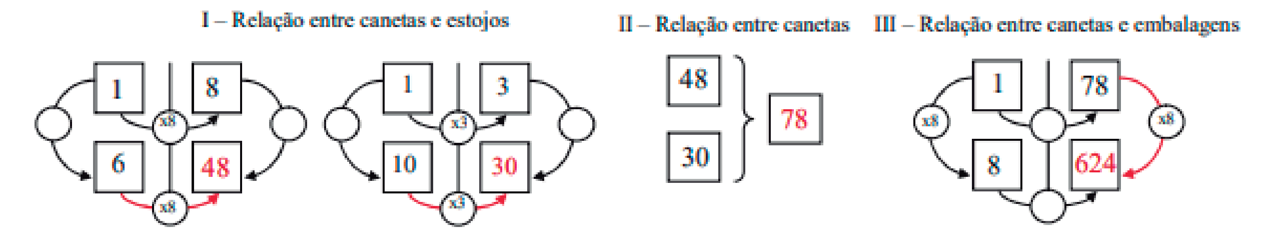
A) Primeiro processo - $[(Est_{az} \times C_{az}) + (Est_{am} \times C_{am})] \times Emb$

O procedimento de multiplicar a quantidade de canetas do estojo amarelo pela quantidade de estojos amarelos que havia em uma embalagem, fazer o mesmo com os estojos azuis, juntar a quantidade de canetas resultante e multiplicar pelo número de embalagens.As falas expostas nos excertos foram transcritas na forma que foram ditas.

**Figura 3** - Excerto do Protocolo de Laís.




Laís - A gente vamo pegar todos os estojos amarelo, vamo contar cada um que têm no estojo amarelo e vamo contar o que tem no azul também, aí depois a gente vai pegar esses dois, somar tudo junto e fazer a resposta em toda a caixa pra ver quanto que dá todas as caixas
Pesquisadora - Como é que a gente faz isso?
Laís - Aí eu botei 48+30
Pesquisadora - Tá
Laís - Que aí eu somei todos
Pesquisadora - Somou todos, então tu somou todos aqui, beleza, e agora, tu já sabe quanto que têm nessa caixa, que que tu vai precisar fazer pra saber quanto que têm na caixa lá?
Laís - Eu vou fazer o 78, oito vezes




Fonte: dados da pesquisa.

Não levamos em conta o erro de tabuada, no qual a estudante fez sete dezenas vezes oito unidades igual a 49 dezenas, mas sim a estratégia de juntar as canetas dos dois tipos de estojo antes de calcular o total nas embalagens. Embora Laís utilize o termo somar como sinônimo de efetuar, a estudante realizou multiplicações e adições. A expressão numérica que representa os cálculos de Laís é $[(6 . 8) + (10 .3)] . 8$.

As representações tanto como conta armada ou expressão numérica, descrevem quais cálculos foram realizados e a ordem de realização, nos permitindo analisar os processos utilizados, em conjunto com a escuta dos vídeos gravados durante a resolução da situação.

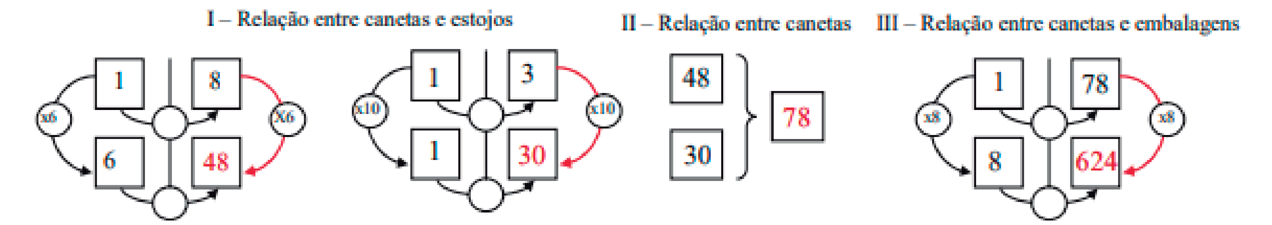
Nas duas primeiras proporções simples, a ordem das operações indica que os sujeitos deste processo utilizaram o operador funcional, em um caso de proporção simples de multiplicação, resultando em 48 canetas para seis estojos azuis e 30 canetas para 10 estojos amarelos (com a grandeza caneta por estojo). Gitirana *et al.* (2014) chamam o operador funcional de taxa de proporcionalidade ou coeficiente de dimensão, pois relacionam duas grandezas de naturezas diferentes. Os resultados foram adicionados, em uma composição de medidas, com o todo desconhecido, descobrindo, assim, o número de canetas em uma caixa. Escrevemos relação entre canetas porque tanto as partes quanto o todo tratam de canetas, e não de embalagens. A última proporção simples deste processo será recorrente nos demais deste caso. Os estudantes multiplicam o total de canetas por embalagem pelo número de embalagens, em uma proporção simples - multiplicação, obtendo o número de canetas na caixa.

B) Segundo processo - $[(C_{az} \times Est_{az}) + (C_{am} \times Est_{am})] \times Emb$

O que diferencia, à primeira vista o processo anterior deste, é ordem das operações dentro dos parênteses. Consiste na representação da situação cuja expressão numérica é [(8. 6) + (3 .10)] . 8, no entanto, ao organizarmos o diagrama, vemos que tratado uso do operador escalar 6 multiplicado pelo número de canetas do estojo azul, obtendo, assim, 48 canetas. O processo análogo foi feito para o número de canetas do estojo amarelo. A propriedade comutativa da multiplicação diferencia os dois caminhos e salvaguarda o processo como válido.

**Figura 4** - Excerto dos Protocolos de Olga e Luiz.

| | |
|---|---|
| 8.[(8.6)+(3.10)]<br>8.[48 + 30]<br>8. 78 = 624 | Pesquisadora - 48 mais 30?<br>Olga - (Pensando) essa daqui eu somei 48+30<br>Pesquisadora - Tá<br>Olga - 78<br>Pesquisadora - E aqui?<br>Olga - 8x78 |
| 8x6=48<br>3x10=30<br>48+30=78<br>78<br>x8<br>614 | Luiz - Eu, a minha estratégia eu pensei em contar quantas canetas têm em estojos azuis e… amarelos e, depois fazer uma conta de vezes ou de soma, e depois pegar tudo isso e multiplicar por…8 aqui…por 8 |




Fonte: dados da pesquisa.

Olga organiza sua representação a partir de uma expressão numérica, enquanto Luiz utiliza também um sinal associativo para 48 e 30, e a conta armada, com um pequeno erro de tabuada. Duas representações diferentes apontam para o mesmo processo, descrito na forma de diagramas na Figura 4.

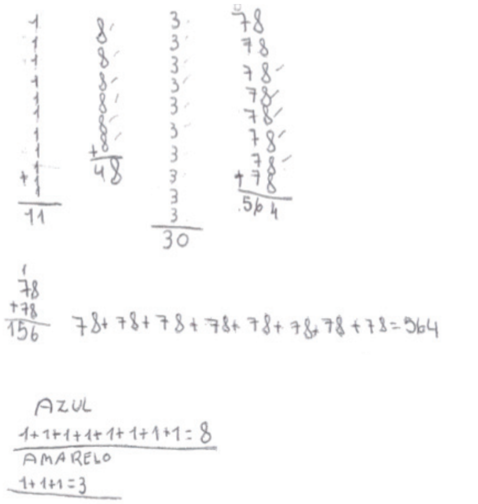
O ato de replicar é o significadodo operador escalar, o qual não trabalha com grandezas diferentes, mas com a ideia de que existe um a constante pela qual ao se multiplicar uma grandeza, a outra deve ser igualmente multiplicada. Este sentido de número diferencia da parte todo da adição e subtração, causando uma ruptura, e sendo necessário para operar no campo conceitual multiplicativo (NUNES; BRYANT, 1997).

C) Terceiro processo - $[(Est_{am} \times C_{am}) + (Est_{az} \times C_{az})] \times Emb$

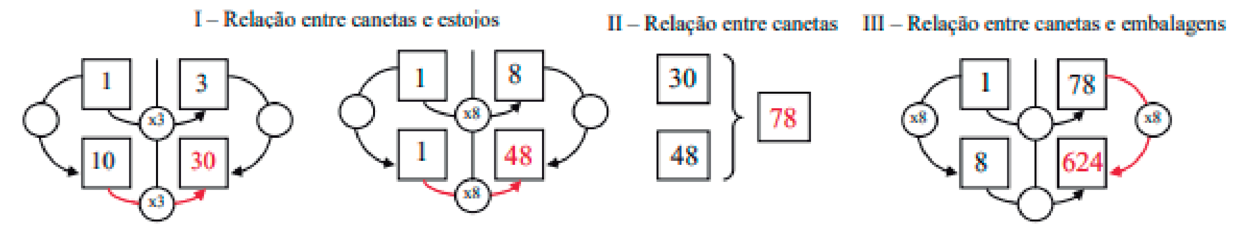
Este caminho se diferencia do primeiro por mudar a ordem dos fatores contidos nos colchetes, o que é lícito pela propriedade comutativa da adição. Sua expressão numérica representativa é [(10 .3)+(6 .8)] .8. Entretanto, a representação do processo no diagrama de campos conceituais se diferencia do segundo processo, pois as estratégias de relação entre as grandezas mudam. Enquanto no segundo processo os alunos utilizam o operador escalar, cujo significado é a quantidade de replicações, no primeiro e no terceiro processos o operador funcional é posto em ação. Por exemplo, no diagrama que diz respeito à quantidade de canetas nos estojos amarelos, o uso do operador funcional exige que a grandeza que representa a operação esteja na ideia de 3 "canetas por estojo" no estojo amarelo, ou y=3.x, sendo x o número de estojos e y o número de canetas; "quantidade de canetas por estojo" é a grandeza. Em contrapartida, o operador escalar apresenta que a cada replicação de estojos, haverá a mesma quantidade de replicações para as10 canetas de cada estojo, pela propriedade das proporções. Neste caso, a grandeza "quantidade de estojos" e a grandeza "quantidade de canetas" são tomadas separadamente.

**Figura 5** - Excerto do Protocolo de Alex.

Alex




Alex - Pode contar assim, de uma em uma? A gente pode botar de um mais um mais um e vai calculando, depois bota o dos azul e depois o amarelo embaixo.
Pesquisadora - Tah
Alex - [vai montando as contas armadas e calculando com o suporte de contagem nos dedos]. 30 nos amarelos e 48 nos azuis.
Pesquisadora - e quanto é que tem na caixona?
Alex - tem que somar tudo. Tem 78 na caixinha. É, e eu vou fazer a mesma coisa aqui (apontando para o cálculo de conta armada).




Fonte: dados da pesquisa.

O caso de Alex é representado pelo uso de adições. Embora a ruptura entre o campo aditivo e multiplicativo ainda esteja em progresso, as escolhas dos passos elencada por Alex, principalmente na fala, nos revelam sua estratégia para calcular a quantidade de canetas na caixa grande. O processo de adições repetidas trata com as partes que formam o todo, e a proporção trata do sentido de replicar quando o operador escalar é utilizado, ou ainda de uma razão entre as grandezas do problema, gerando uma nova grandeza (GITIRANA *et al.*, 2014). No entanto, o procedimento adotado por Alex relaciona mediante o uso de fator funcional as quantidades de canetas e estojos, conforme Figura 5, e de forma escalar as canetas (nos estojos) e embalagens.

A representação da situação cuja expressão numérica é [(10 . 3) + (6 .8)] . 8, trata do uso do operador funcional 3 multiplicado ao número de estojos amarelos, obtendo, assim, 30 canetas por estojo amarelo. O processo análogo foi feito para o número de canetas do estojo azul. Há, aqui, uma inversão no sentido do operador. Não se trata mais de um raciocínio de replicação, mas de um operador que relaciona duas grandezas (NUNES; BRYANT, 1997, VERGNAUD, 2009).

No estudo de Lautert, Schliemann e Spinillo (2017) a respeito do uso da regra de três para problemas de proporção múltipla, nenhum dos estudantes do Ensino Médio que responderam a questão fez uso de regra de três composta, ao invés disso, decompuseram o problema em duas partes, trabalhando com uma ou duas regras de três. Ora, os estudantes que entrevistamos não utilizaram regra de três, mas da mesma forma criaram o caso um, aqui especificado, no qual os dados foram analisados segundo proporções simples, e depois amalgamados pela composição de medidas.

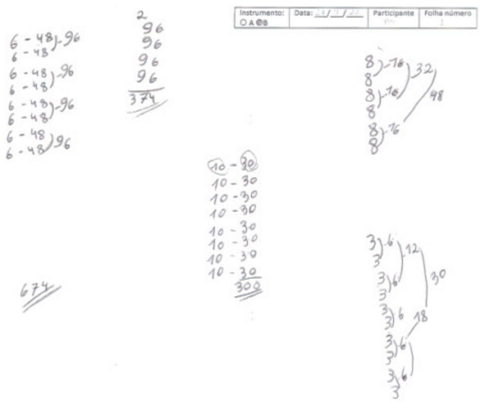
**Segundo caso - proporção múltipla, composição de medidas**

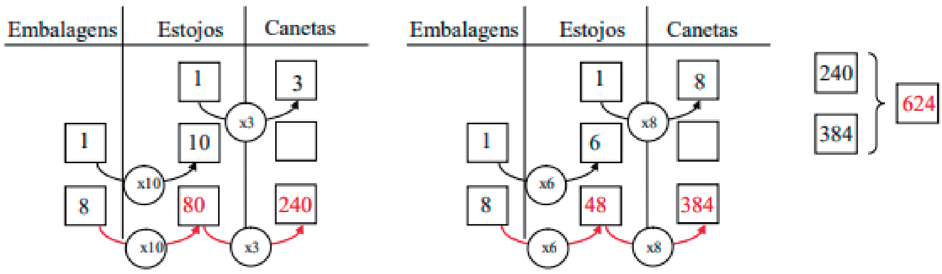
Diferentemente do primeiro caso, que tratou de diversas proporções simples, o segundo caso aborda proporções múltiplas. A proporção múltipla é compreendida como duas proporções simples ou ainda como a concatenação de duas proporções simples, sendo chamada de proporção simples composta (LEVAIN; VERGNAUD, 1994-1995, GITIRANA *et al.,* 2014, LEITE, 2016). Em razão desse entendimento, é compreensível que os estudantes possam desenvolver o problema tanto como proporções simples separadas como em uma única proporção múltipla. Os dados encontrados no segundo caso refletem tal definição, e são classificados como composição de proporções múltiplas.

D) Quarto processo - $Emb \times Est_{am} \times C_{am} + Emb \times Est_{az} \times C_{az}$

A representação da situação cuja expressão numérica é 8 .10 . 3 + 8 .6 . 8, pode ser obtida da expressão do terceiro caso com o uso da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, à exceção da posição do 8, que deve ser comutado para a frente do colchete. A ordem do processo, neste caso, não é de descobrir quantas canetas há nas embalagens e depois multiplicar pelo número de embalagens, mas já descobrir quantas canetas há nos estojos azuis e nos estojos amarelos nas embalagens, e depois somar.

**Figura 6** - Excerto do Protocolo de Lino.

| Lino | Lino - 6 é os estojos e 48 é o que tem dentro dos 6 estojos, são as 8 canetas que tem dentro dos 6 estojos.<br>Pesquisadora - Entendi.<br>Lino - É o que tem dentro da caixa grande<br>Pesquisadora - Tá, e o outro que tu fez? daí deu 374?Tá e aí, quanto que deu o total de canetas na caixa toda?<br>Lino - Bah, tinha que fazer isso?<br>Pesquisadora - É, é o que a gente quer saber, o total de canetas.<br>Lino - [escreveu 674]<br>Pesquisadora - Tah, 674. Tah bom. |
|---|---|
|  | |



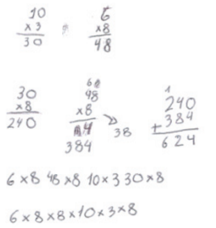

Fonte: dados da pesquisa.

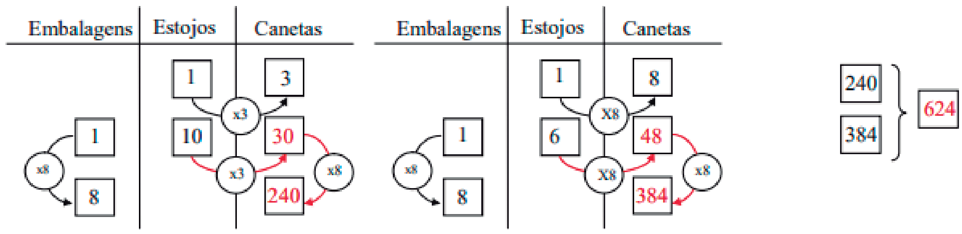
Embora os resultados obtidos por Luiz não estejam corretos, seu procedimento é coerente: multiplica a quantidade de embalagens pela quantidade de cada tipo de estojos e depois o resultado pela quantidade de canetas dentro de cada tipo de estojo. Neste processo, o operador funcional é presente na proporção entre o número de canetas nos estojos, e números de canetas nos estojos nas embalagens. Onde antes tínhamos o “calcular as canetas do estojo azul e juntar com do amarelo em uma embalagem, e multiplicar pelo número de embalagens”, agora temos “calcular as canetas do estojo azul e multiplicar pelo número de embalagens, fazer o mesmo para as canetas do estojo amarelo, e juntar”. São condutas diferentes para a mesma situação. A composição de medidas é a finalização do problema, unindo as classes de canetas dos estojos azuis e canetas dos estojos amarelos em 8 embalagens.

E) Quinto processo - $Est_{am}$ x $C_{am}$ x Emb + $Est_{az}$ x $C_{az}$ x Emb

Este caminho se diferencia do anterior pela mudança na ordem das operações, respeitando propriedade comutativa da multiplicação. A representação da situação cuja expressão numérica é 10 .3 . 8 + 6 .8 . 8, se deu por um fator funcional e um fator escalar, apresentando uma complexidade para o pensamento dos participantes.

**Figura 7** - Excerto do Protocolo de Jane.

| | |
|---|---|
| Jane  | Jane - Eu ia colocar tipo, [INAUDÍVEL] ficar colocando 8 até tipo dar o número de canetas, em cada caixa tem estojo… 6, acho que eu ia colocar o 6 oitos mais 6, em cada caixa<br>Pesquisadora - Tipo, os resultados dos amarelos deu quanto?<br>Jane - 240<br>Pesquisadora - E o dos azuis?<br>Jane - 384<br>Pesquisadora - O que que tu fez com esses dois resultados pra conseguir o 624?<br>Jane - Pode ser 240 mais 384 |




Fonte: dados da pesquisa.

O procedimento deste caso prevê um agrupamento padrão: 10 vezes 3, para 10 estojos com 3 canetas cada, oriundo da primeira classe de proporção um para muitos: multiplicação. No mesmo problema os estudantes utilizam o operador funcional e o operador escalar, conforme o caminho escolhido para o desenvolvimento. A composição de medidas deste caso tem as partes conhecidas e o todo desconhecido.

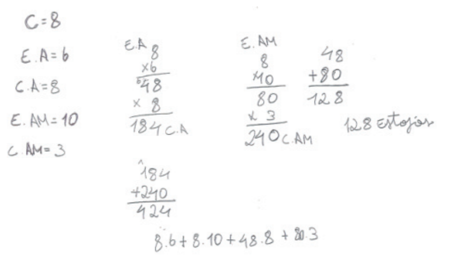
Leite (2016) estudou as proporções duplas e múltiplas, concluindo que a maior parte das resoluções para proporções múltiplas utilizam o operador escalar. Neste estudo encontramos tanto o operador escalar, quanto o operador funcional como ainda a conFigura ção dos dois operadores na mesma resolução. A ampla gama de processos associados a uma situação corrobora a ideia de o professor conhecer diferentes caminhos e trabalhar a partir de situações (MAGINA, SPINILLO, LAUTERT, 2020).

F) Sexto Processo - Emb x $Est_{az}$ x $C_{az}$ + Emb x $Est_{am}$ x $C_{am}$

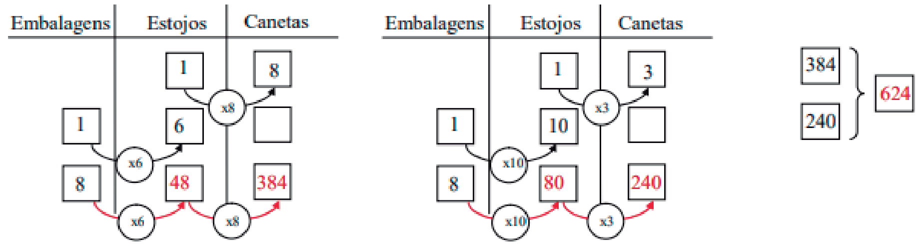
A expressão numérica representativa deste processo é 8.6.8+8.10.3, e as representações realizadas pelos estudantes se diferenciam, mas se organizam de forma a contemplar a mesma ordem.

**Figura 8** - Excerto do Protocolo de Sara.

Sara




Sara - Eu, primeiro eu fiz quantas canetas tinham em cada estojo azul, que eram 8 caixas, com 6 estojos azuis em cada, então fiz 8x6 que deu 48 e aí eu fiz quantos estojos amarelos tinha, que tinham 10 em cada caixa, então, são 8 caixas, então 8x10 que deu 80, depois eu somei o 48 mais 80 que deu o número de quantos estojos tinha na caixa, que era 128, aí depois eu fiz o número de…de estojo em caixa fiz vezes o número de cada caneta que tinha na caixa, de cada caneta que tinha em cada estojo, que 48 estojos, cada…cada estojo tinha 8 canetas, e aí deu 184 e aí aqui deu 240, mesma coisa, depois eu só somei, deu 200…e deu 424




Fonte: dados da pesquisa.

O sexto processo parte da grandeza mais ampla (embalagens) para a mais específica, de ordem menor (canetas). É idêntico ao quarto processo à exceção da cor de estojos escolhida para ser calculada primeiro.

Como uma proporção múltipla é a composição de duas ou mais proporções simples, os estudantes puderam realizar as proporções simples separadamente, juntar os resultados e depois realizar a outra proporção, ou fazer uso de suas proporções múltiplas. Trabalhar com relações entre quantidades em problemas de proporcionalidade múltipla pode colaborar para a compreensão de conceitos e representações matemáticas (LAUTERT, SCHLIEMANN; SPINILLO, 2017).

**Terceiro caso - proporções simples, composição de medidas, e um processo utilizando comparação multiplicativa**

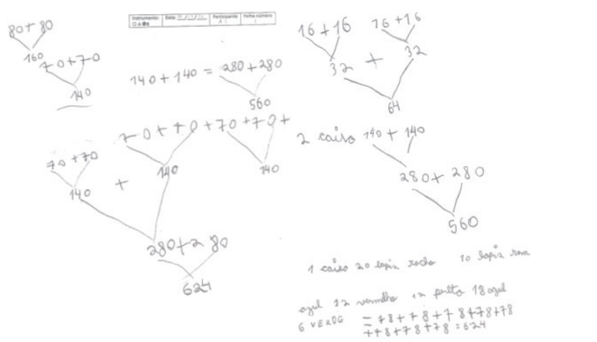
O problema tinha como dado que dentro de cada estojo azul havia 3 canetas azuis, 2 canetas vermelhas, 2 canetas pretas e 1 caneta verde, e dentro de cada estojo amarelo havia uma caneta cor de rosa e duas canetas roxas. O terceiro caso consiste em agrupamentos ordenados pela quantidade e cor de canetas em cada estojo, separadamente.

G) Sétimo processo - ($Est_{az}$x cvm+ $Est_{az}$x cvd+ $Est_{az}$x cpt+ $Est_{az}$x caz+ $Est_{am}$x crx+ $Est_{am}$x crs) x Emb

Neste processo o estudante ordenou cada cor de caneta com o estojo do qual a mesma pertencia, obtendo, com a soma de todos os tipos de caneta do problema, a quantidade de canetas em uma embalagem. Isso feito, multiplicou o total pela quantidade de embalagens. A expressão numérica que representa este processo é (6.2+6.1+6.2+6.3+10.2+10.1).8. Esperávamos que os estudantes chegassem em 8.[6.(2+1+2+3)+10.(2+1)], o que se assemelha a esta expressão numérica pela propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, mas cujo processo diverge no sentido de quais elementos agrupar (RAMOS; SILVA, 2021).

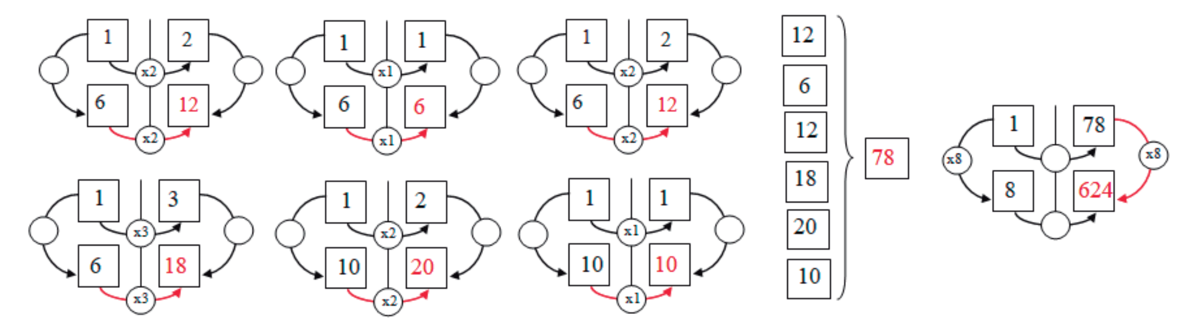
**Figura 9** - Excerto do Protocolo de Caio.

Caio



Caio - a quantidade de canetas eu vou contando essa história e que tu já tirou aqui o roxo e rosa e aqui tem 20 não não então eu venho contando e aqui eu vou colocando rosa roxa então a quantidade que deu em cada em cada estojo não em cada caixa então vou colocar eu vou colocar 200 e 80, por mais 280 aqui com mais 280 aqui, aqui eu coloco mais 200 e 80 que aí eu formei todas as caixinhas aí vai dar 500 e 60 então aí então já foi todas com trinta Agora eu só vou 70 né então é complicado agora né. Não agora eu vou só contar minha 88

Pesquisadora- tem mais oito em cada uma dessas aqui né contou 70



Fonte: dados da pesquisa.

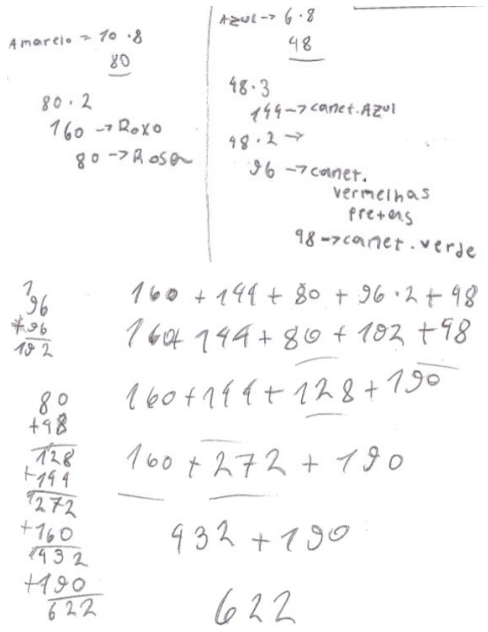
Caio agrupou as canetas por cor, e realizou as adições de forma a decompor as quantidades. Multiplicou a quantidade de canetas de cada cor pelo número de estojos, e as somou. Após obter a quantidade de 78 canetas, ainda organizou em 70+8, multiplicado por 8.

Por mais longo que pareça esse processo, ele é simples por completar cada proporção com números menores e mais simples de calcular. Durante a resolução do problema, os estudantes que utilizaram esse caminho deram nome às parcelas, como caneta verde, por exemplo, para indicar a quantidade de canetas verdes no estojo referenciado. Este gesto se traduz pelo teorema de relação da proporcionalidade , que em ação representa um tipo de estratégia usada por alunos pequenos (GITIRANA at al., 2014). Neste caso, os alunos são do sexto ou oitavo ano, mas vale lembrar realizamos as entrevistas em 2022, ano no qual os estudantes retornaram ao ensino presencial, ficando dois anos em ensino remoto.

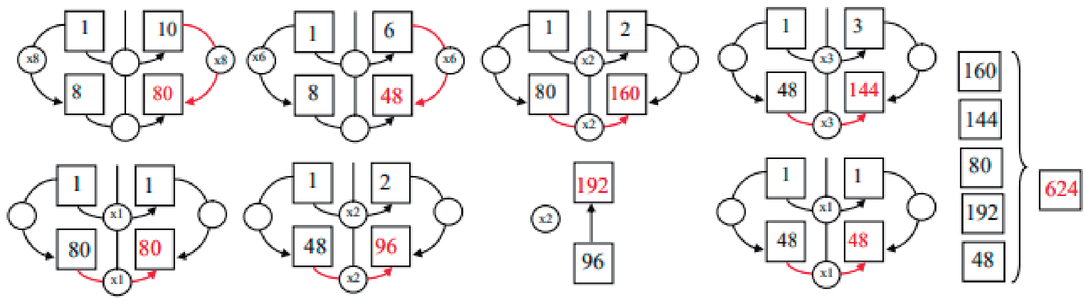
H) Oitavo processo - $(Est_{am}$x Emb)x crx+ $(Est_{az}$x Emb)x caz + $(Est_{am}$x Emb)x crs + 2 x $(Est_{az}$x Emb) x cvm + $(Est_{az}$x Emb)x cvd

A expressão numérica resultante deste processo é (10.8).2+(6.8).3+(10.8).1+2.(6.8).2+(6.8).1, e foi o caminho escolhido por um dos estudantes, que inicialmente calculou o valor fixo estojo por embalagens, e após fez a proporção para cada uma das classes de canetas contidas nos estojos.

**Figura 10 -** Excerto do Protocolo de Mara.




Mara - Aqui? Eu fiz o número de estojos vezes o número de caixas
Pesquisadora - Tá!
Mara - E aí deu 80
Pesquisadora - Deu 80 estojos?
Mara - Isso!
Pesquisadora - Tá!
Mara - Que…nos 80 estojos tinham 2 canetas roxas
Pesquisadora - Tinha… 2 roxas
Mara - Isso, então em cada 80 estojos têm 2 roxas
Pesquisadora - Tá!
Mara - E aí eu fiz a conta de multiplicação e deu 160
Pesquisadora - Tá!
Mara - Que daí são 160 canetas roxas e 80 rosas, já que é só 1 em cada
Mara - São 160 roxas, 80 rosas, ahn…144 azuis, 96 vermelhas e pretas e 48 verdes
Mara - Aí eu fiz primeiro a conta de multiplicação e depois eu fui somando… somando devagar assim, dos números menores pros maiores



Fonte: dados da pesquisa.

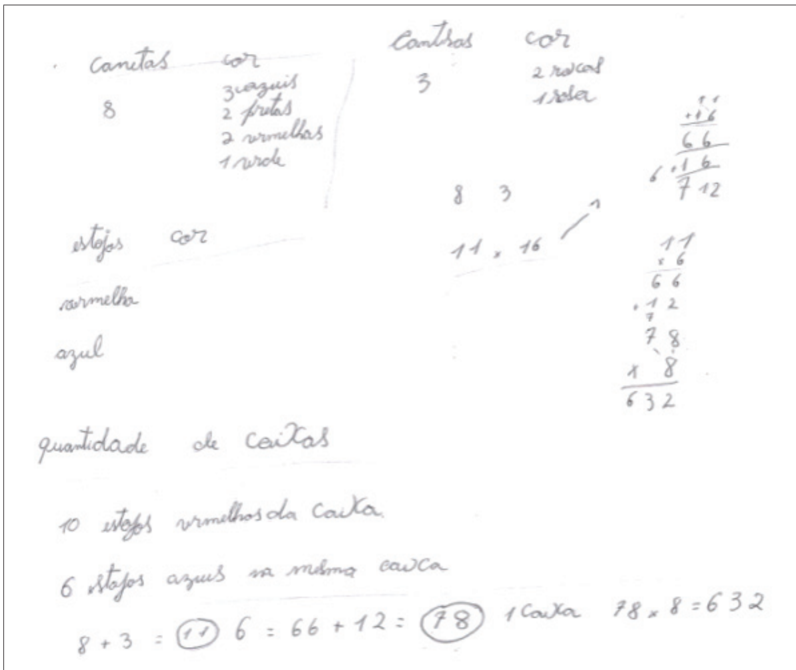
Embora a escrita da multiplicação lembre o sexto processo, não se trata de uma proporção múltipla, pelo fato de o número resultante da operação contida nos parênteses ter sido calculado em separado, como proporção simples, e utilizado como quantidade nas outras proporções. Cabe aqui assinalar que o 2 presente no termo 2 x ($\text{Est}_{az}$x Emb)x cvm se deve ao participante perceber que a quantidade de canetas pretas é a mesma de canetas vermelhas, portanto poderia dobrar o número.

Este caminho se diferencia do anterior em virtude da propriedade comutativa da multiplicação. A representação da situação cuja expressão numérica é 10 .3 . 8 + 6 .8 . 8, se deu por um fator funcional e um fator escalar, apresentando uma complexidade para o pensamento dos participantes. Tanto o 80 quanto o 48 serviram como taxa de variação de estojos por embalagem neste caso. As quantidades de canetas foram multiplicadas pela grandeza estojo por embalagem, resultando em canetas nos estojos nas embalagens (GITIRANA *et al*., 2014).

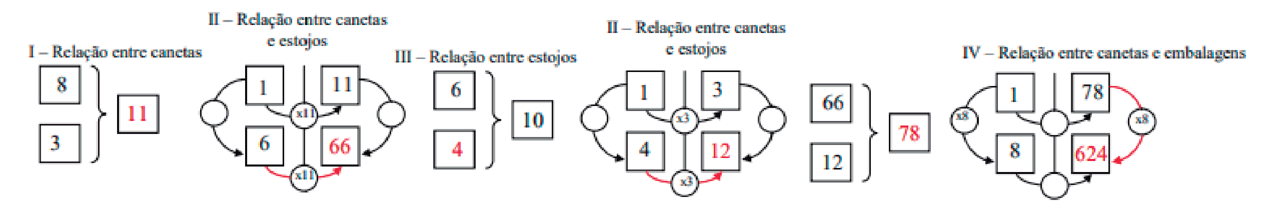
I) Nono processo - $\{[Est_{az} x\ (C_{az} + C_{am})] + [(Est_{am} - Est_{az}) x\ C_{am}]\} xEmb$

Este é o único processo no qual há subtração. O estudante primeiro adicionou as quantidades de canetas dos estojos amarelos e azuis, mas como havia mais estojos amarelos que azuis, sentiu a necessidade de completar com as canetas presentes nos estojos extras. Assim, há uma composição com todo conhecido e uma parte desconhecida, descrita por {[6.(8+3)]+[(10-6).3]}.8

**Figura 11 -** Excerto do Protocolo de Joel.



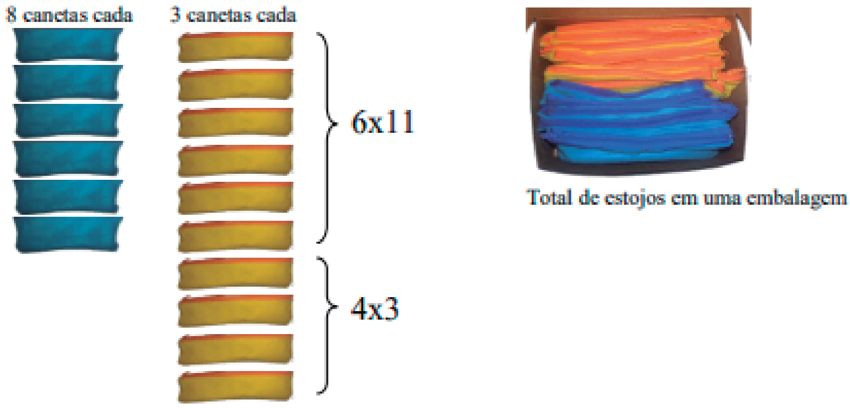
Joel - Eu pensei em… somar as duas quantidades e…exemplo dá 16, então, os estojos, 16, aí eu ia fazer a conta por partes, primeiro a quantidade total de cada caixa, depois multiplicar essa quantidade total por 8
Pesquisadora - Tá!
Joel - (Pensando) eu sei que aqui tem 8 caixas, em cada caixa, eu tenho que saber…eu sei quanto que tem cada caixa, e, tenho que fazer essa…essa Matemática, aí depois eu tenho que saber quantas canetas tem em cada estojo, já sei, e depois tem que somar




Fonte: dados da pesquisa.

Joel inicia seu procedimento anotando quantas canetas de cada cor estão nos estojos, organizando os dados de forma a compreender o problema, em classes que não compreendem as canetas dos estojos azuis ou dos estojos amarelos, mas dos dois estojos, em um procedimento incorreto. No entanto, durante o desenvolvimento da questão deu-se conta que a quantidade de canetas nos estojos amarelos e nos estojos azuis não era a mesma, então elaborou procedimentos para chegar a um resultado coerente. A ideia de juntar as canetas de um estojo azul e um amarelo, obtendo onze canetas, para depois multiplicar pelo número de estojos, foi bastante frequente, mas em geral era posta de lado ao ver que havia número diferente de canetas em cada estojo. Joel, no entanto, permaneceu com a ideia inicial e modificou a estratégia, conforme Figura 12.

**Figura 12 -** Material manipulado no dia da entrevista.




Fonte: dados da pesquisa.

Joel contou as 11 canetas e multiplicou por 6, obtendo 66 canetas, mas percebeu que ainda havia estojos amarelos, então do total de 10 estojos, calculou que ainda faltavam 4, com 3 canetas cada, totalizando 12 canetas. Assim, chegou às 78 canetas em uma embalagem, e às 624 na caixa. O procedimento de Joel reforça a ideia de que professores devem estar atentos às estratégias dos estudantes, pois o caminho escolhido pelo aluno inicialmente não era coerente, mas ele refletiu sobre o problema e tomou decisões que repararam a estratégia, de forma a deixá-la coerente, com uma variante da ideia da complementação (MAGINA *et al*., 2008, MAGINA, LAUTERT, SANTOS, 2020).

Diante do exposto, foram conFigura dos três casos: o primeiro caso consistiu em juntar as canetas dos estojos e multiplicar pelas embalagens. O segundo caso consistiu em calcular as canetas cujos estojos fossem da mesma cor, multiplicar pelo número de embalagens e juntar, determinando duas proporções múltiplas cujos resultados foram compostos. O terceiro caso consistiu em calcular as canetas por cor de caneta, ou realizar um procedimento semelhante ao primeiro caso, à diferença de juntar as canetas independentemente da cor de estojos, calcular o excedente, somar e multiplicar pelo número de embalagens. Estes processos variaram entre proporções com operadores escalares ou funcionais, entre proporções simples e compostas, com composição de medidas, tanto com parte desconhecida como com todo desconhecido, e ainda comparação multiplicativa com referido desconhecido.

Miranda (2019) organizou os diagramas para problemas mistos, mas o diagrama de proporção múltipla e composição de medidas não se aplicou neste estudo porque os resultados compreenderam composição de proporções múltiplas, no caso 2. Nos demais casos, tivemos uma sequência de proporções simples e composição de medidas, acrescida, em um caso, de uma comparação multiplicativa.

## CONCLUSÃO

Este texto visou responder como estudantes do Ensino Fundamental resolvem um problema misto, quais as estratégias utilizadas por estes estudantes, quais expressões numéricas resultam dos processos pelos quais os estudantes resolvem o problema e quais os diagramas que descrevem as estratégias dos estudantes ao resolver um problema de composição de medidas e proporção.

Vamos responder na ordem inversa. Os diagramas apresentados, bem como as expressões numéricas, são indícios do que os estudantes apresentaram no desenvolvimento da resolução do problema, tanto em sua representação escrita quanto gestual e falada, nas entrevistas.

A diversidade de procedimentos apresentados exprime algumas das diversas formas de raciocinar e de estabelecer relações entre os dados do problema pelos estudantes, no entanto, nada garante que um estudante pense em oito vezes 78 e escreva 78x8 na folha, em função da tradição de escrita, daí a necessidade das respostas dadas verbalmente, pois os esquemas não consistem em conduta observável, mas na organização invariante e no pensamento subjacente, desta forma, nos arriscamos a divulgar o que compreendemos dos esquemas elaborados pelos estudantes.

As expressões numéricas que traduziam o problema das caixas foram compostas de números, operações e sinais de associação. Para o primeiro caso, houve a necessidade do uso de parênteses 8(6.8+10.3), e suas versões comutativas, para o segundo caso, não necessariamente se aplicaram os parênteses, pois consistiram na aplicação da propriedade distributiva à expressão numérica do primeiro caso, 8.6.8+8.10.3 e suas versões comutativas.

O terceiro caso, embora não necessitasse dos sinais de associação nos processos sétimo e oitavo, tiveram o uso dos parênteses para ilustrar o agrupamento de embalagem e estojos realizado inicialmente para cor de estojos, (10.8).2+(6.8).3+(10.8).1+2.(6.8).2+(6.8).1, e careceu do uso de parênteses, colchetes e chaves para ao agrupar as canetas em dois estojos e depois proceder a soma das complementares, resultando em um processo com mais operações e agrupamentos {[6.(8+3)]+[(10-6).3]}.8. Descrevemos tais expressões ao relatarmos os processos dos alunos, à exceção de Olga e Mara, que as escreveram em seus protocolos. Os demais estudantes utilizaram outros sistemas de significantes para representar o desenvolvimento da questão. Não podemos afirmar que a expressão numérica que utiliza todos os sinais de associação é melhor matematicamente que as outras, pois é a menos econômica, ao mesmo tempo, todos os procedimentos realizados pelos estudantes tinham a potência de chegar ao resultado correto.

Assim, tivemos algumas boas surpresas neste trabalho. Na pré análise, classificamos a situação como proporção simples. Foi bastante motivador perceber que os participantes criaram caminhos diferentes do esperado, como proporção múltipla, e que embora os erros de tabuada tenham sido frequentes, os processos criados para a resolução do problema foram coerentes, e desta forma reafirmamos a necessidade do professor reconhecer os processos realizados pelos estudantes, partindo das suas resoluções e socializando na classe os conhecimentos postos em ação pelos mesmos.

## REFERÊNCIAS

ARAGÃO, A. B. B. L.; LAUTERT, S. L.; SCHLIEMANN, A. D. Resolução de problemas de proporção dupla e múltipla nos anos finais do Ensino Fundamental. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 24, n.4, p. 183-206, 2022. Disponível em: http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/download/6921/pdf_1. Acesso em: 31 jan. 2023.

DELVAL, J. **Introdução à Prática do Método Clínico**: descobrindo o pensamento das crianças. São Paulo: Artmed, 2002.

FREITAS, H. S. **Expressões numéricas e suas abordagens em livros didáticos de matemática do 6º ano do ensino fundamental adotados por uma escola pública de Cuiabá-MT.** 2014. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá, 2014. Disponível em: https://ri.ufmt.br/handle/1/1916. Acesso em: 10 maio 2020.

GITIRANA, V.; CAMPOS, T. M. M.; MAGINA, S. M. P. ; SPINILLO, A. G. **Repensando a multiplicação e divisão**. Contribuições da Teoria dos Campos Conceituais. São Paulo: PROEM, 2014.

LAUTERT, S. L.; SCHLIEMANN, A. D.; LEITE, A. B. B. . Uso da regra de três e a compreensão das relações em problemas de proporção múltipla. *In*: Colóquio Internacional sobre a Teoria dos Campos Conceituais, 2., 2017, Porto Alegre. **Anais [...]** Porto Alegre: GEEMPA, 2017. p. 135-142. Disponível em: https://www.geempa.com.br/wp-content/uploads/2017/08/O-USO-DA-REGRA-DE-TR%C3%8AS-E-A-COMPREENS%C3%83O-DAS-RELA%C3%87%C3%95ES.pdf. Acesso em: 22 dez. 2022.

LEITE, A. B. B. **Resolução de problemas de proporção dupla e múltipla:** um olhar para as situações que envolvem grandezas diretamente proporcionais. 2016. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Psicologia Cognitiva, Universidade Federal de Pernambuco. 2016. Disponível em: https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/20233. Acesso em: 20 dez. 2022.

LEVAIN, J. P. ; VERGNAUD, G. ProportionnalitéSimple, ProportionnalitéMultiple. **Grant**, n. 56, p. 55-66, 1994-1995. Disponível em: https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/56n5_1562850226137-pdf. Acesso em: 23 dez. 2022.

MAGINA, S. M. P. ; LAUTERT, S. L.; SANTOS, E. M. Estratégias Exitosas de Alunos dos Anos Iniciais em Situações de Proporção. **Educação & Realidade**, Porto Alegre, v. 45, n. 4, p 1-24, 2020. Disponível em http://dx.doi.org/10.1590/2175-623696023. Acesso em: 17 jan. 2023.

MAGINA, S. M. P. ; MERLINI, V. L.; SANTOS, A. A estrutura multiplicativa à luz da Teoria dos Campos Conceituais: uma visão com foco na aprendizagem. *In*: CASTRO FILHO; J. A.; BARRETO, M. C.; BARGUIL, P. M.; MAIA, D. L.; PINHEIRO, J. L. **Matemática, cultura e tecnologia:** perspectivas internacionais. Curitiba: Editora CRV, 2016, p. 66-82.

MAGINA, S. M. P. ; SPINILLO, A. G.; LAUTERT, S. L. Raciocínio multiplicativo discutido a partir da resolução e formulação de problemas. **REMATEC: Revista de Matemática**, **Ensino e Cultura**, v 15, n. 36, p. 78-94, 2020. Disponível em: http://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/83. Acesso em: 30 jan. 2023.

MIRANDA, C. A. **Situações-problema que envolvem o conceito de função a-fim:** uma análise à luz da Teoria dos Campos Conceituais. 2019. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Educação) - Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Cascavel, 2019. Disponível em: https://tede.unioeste.br/handle/tede/4671. Acesso em: 9 dez. 2022.

VERGNAUD, G. **A criança, a matemática e a realidade:** problemas do ensino da matemática na escola elementar. Curitiba: Editora da UFPR, 2009a.

VERGNAUD, G. A Teoria dos Campos Conceituais. In: BRUN, Jean (org.). **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996, p. 155 - 191.

VERGNAUD, G. Forma operatoria y forma predicativa delconocimiento. In: Encuentro Nacional sobre Enseñanza de la Matemática, 1. , 2007, Tandil. **Actas [...]** Argentina, Tandil, 2007.

VERGNAUD, G. La théorie des champsconceptuels. **Recherches en Didáctique des Mathématiques**, v. 10, n. 2, p. 133-170, 1990.

VERGNAUD, G. O longo e o curto prazo na aprendizagem da matemática. **Educar em Revista** [online], Curitiba, v. 27, Edição Especial, n.1, p. 15-27, 2011. [Acessado 24 Julho 2021]. Disponível em: https://doi.org/10.1590/S0104-40602011000400002

VERGNAUD, G. O que é aprender? *In:* BITTAR, M.; MUNIZ, C. A. (Org.). **A aprendizagem matemática na perspectiva da teoria dos campos conceituais.** Curitiba: Editora CRV, 2009b. p. 13-36.

VERGNAUD, G. Teoria dos campos conceituais. In NASSER, L. (Ed.) *In:* Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro, 1., 1993, Rio de Janeiro. **Anais [...].** Rio de Janeiro, 1993. p. 1-26.

---

**RECEBIDO EM:** 15 fev. 2023
**CONCLUÍDO EM:** 18 set. 2023