

ELEMENTOS, DE EUCLIDES, E O ALTAR DO FALCÃO COMO FONTES DE INSPIRAÇÃO PARA O ENSINO DE GEOMETRIA NO ENSINO FUNDAMENTAL

EUCLID'S ELEMENTS AND THE FIRE-ALTAR (IN THE SHAPE OF A FALCON) AS INSPIRATION FOR TEACHING GEOMETRY: A STUDY WITH STUDENTS OF THE 8TH GRADE OF A PUBLIC SECONDARY SCHOOL IN IBIRITÉ-MG (BRAZIL)

LOS ELEMENTOS DE EUCLIDES Y EL ALTAR DEL HALCÓN COMO FUENTES DE INSPIRACIÓN PARA LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA EN LA SECUNDÁRIA

THAÍS BARBOSA GOULART¹
ANA CRISTINA FERREIRA²
JORGE LUÍS COSTA³

RESUMO

Este artigo analisa possíveis contribuições de duas tarefas matemáticas desenvolvidas com 35 estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública de Ibirité (MG). Tais tarefas se inspiraram na História da Matemática, mais especificamente em algumas proposições do “Livro I” da obra *Elementos* e na construção de altares indianos, para explorar noções de geometria plana. A produção de dados envolveu observações, diário de campo da pesquisadora, gravações de alguns momentos das aulas e registros produzidos pelos alunos ao longo dos encontros. Os resultados sugerem que as tarefas realizadas se mostraram um caminho interessante para a exploração de noções de geometria e favoreceram um maior engajamento por parte dos alunos. Além disso, observaram-se indícios de novas percepções acerca da Matemática e da construção do conhecimento matemático, um começo de compreensão das noções estudadas como conhecimentos vinculados às práticas sociais variadas, de distintas culturas.

Palavras-chave Educação matemática. *Elementos*, de Euclides. História da Matemática. Ensino de geometria. Ensino Fundamental.

ABSTRACT

This paper analyzes possible contributions of two mathematical tasks developed with 35 Secondary-School eighth graders of a public school in Ibirité (MG). Such tasks were inspired by the History of Mathematics, more specifically by some propositions in “Book I” of the Elements work and by the construction of Indian altars, to explore notions of flat geometry. The production of data involved observations, the researcher’s field diary, recordings of some moments of the classes and records produced by the students throughout them. The results suggest that the tasks performed proved to be an interesting way to explore notions of geometry and favored greater engagement by students. In addition, there were evidence of new perceptions about mathematics and the construction of mathematical knowledge, a beginning in understanding the notions studied as knowledge linked to the varied social practices of different cultures.
Keywords: Mathematics education. Euclid’s Elements. Mathematics History. Teaching geometry. Secondary School.

1 Mestra em Educação Matemática. Colégio Construir. E-mail: thaismariagoulart@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6725-2753>.

2 Doutora em Educação Matemática. Universidade Federal de Ouro Preto. E-mail: anacf@ufop.edu.br. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0953-1468>.

3 Doutor em Educação. Universidade Federal de Ouro Preto. E-mail: jorgelcosta@ufop.edu.br. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2196-5683>.

RESUMEN

Este artículo analiza los posibles aportes de dos tareas matemáticas desarrolladas con 35 alumnos de 8º grado de una escuela pública de Ibirité (MG). Tales tareas se inspiraron en la Historia de las Matemáticas, más concretamente en algunas proposiciones del “Libro I” de la obra *Elementos* y en la construcción de altares indios, para explorar nociones de geometría plana. La producción de datos implicó observaciones, diario de campo del investigador, grabaciones de algunos momentos de las clases y registros producidos por los alumnos a lo largo de las mismas. Los resultados sugieren que las tareas fueron una forma interesante de explorar nociones de geometría y favorecieron un mayor compromiso con las clases por parte de los estudiantes. Además, se observaron nuevas percepciones acerca de las matemáticas bien como de la construcción del conocimiento matemático. Los estudiantes empezaron a relacionar las nociones geométricas estudiadas diversas prácticas sociales de diferentes culturas.

Palabras-clave: Educación matemática. *Elementos* de Euclides. Historia de las Matemáticas. Enseñanza de la geometría. Secundaria.

INTRODUÇÃO

Como Miguel e Miorim (2008), entendemos que a História da Matemática como abordagem de ensino pode promover uma aprendizagem da Matemática fundamentada na compreensão e significação dos conceitos. Isso se dá ao favorecer o entendimento, por parte dos estudantes, de que a Matemática se desenvolve historicamente e está pautada por necessidades variadas de cada época e sociedade. Esta é uma das ideias centrais que norteou o estudo ora apresentado: compreender a Matemática como uma construção humana, que segue evoluindo e é passível de questionamentos.

O presente artigo contempla um recorte de uma pesquisa de mestrado (GOULART, 2020) na qual são investigadas possíveis contribuições de tarefas matemáticas historicamente situadas e desenvolvidas no ambiente GeoGebra, para a aprendizagem de noções de geometria em uma classe do Ensino Fundamental. Nesta pesquisa, a obra *Elementos*, de Euclides, e sua história foram a principal inspiração para o desenvolvimento das tarefas, devido ao seu potencial formativo e pela possibilidade de promover uma articulação entre passado e presente na qual a Matemática pode ser compreendida como construção humana, social e culturalmente desenvolvida. As tarefas⁴ partiram de proposições do “Livro I” dessa obra com a intenção de explorar algumas noções de geometria plana por meio de uma abordagem de inspiração histórica no ambiente GeoGebra.

Neste artigo, o foco está na apresentação e análise das duas primeiras tarefas, que não foram desenvolvidas no ambiente GeoGebra. Nelas, procuramos situar o momento histórico no qual a obra foi produzida, bem como destacar o fato de que ela sistematiza conhecimentos disponíveis em várias culturas distintas, ainda que não formalizados da mesma maneira. Buscamos aproximar os estudantes de algumas proposições do “Livro I”, mas não manipulamos exemplares de *Elementos*. A obra (seu autor e sua produção) nos proporcionou o contexto histórico para “viajarmos no tempo” com os estudantes. Também serviu de base para uma primeira tentativa de formalização das noções matemáticas envolvidas.

Este artigo está estruturado da seguinte forma: iniciamos situando brevemente as ideias que fundamentaram o estudo. Em seguida, descrevemos e justificamos os procedimentos metodológicos adotados. Passamos, então, à descrição e à análise de duas tarefas e finalizamos com algumas considerações sobre o processo.

4 Construímos um total de oito tarefas inspiradas nos *Elementos*, de Euclides, e relacionadas aos seguintes conteúdos matemáticos: noções básicas de geometria, quadrados, circunferências e algumas de suas propriedades, e triângulos e algumas de suas propriedades.

ELEMENTOS, DE EUCLIDES, E O ENSINO DE GEOMETRIA

Segundo vários pesquisadores (VILELA; DEUS, 2014; FUJITA, 2001), os *Elementos*, de Euclides, ainda podem ser considerados como a base da geometria estudada nas escolas. Essa obra, uma das mais importantes da História da Matemática, por muitos anos foi usada como principal referência para muitas outras produções e como livro-texto no ensino de geometria (FUJITA, 2001).

Euclides trabalhou na Biblioteca de Alexandria, cidade do Egito fundada por Alexandre, o Grande. Nessa época, a cidade de Alexandria passou a ser a capital do Egito, governada por Ptolomeu. Com a abertura da Universidade de Alexandria, que já possuía a sua grande biblioteca, a cidade passou a receber vários intelectuais, entre eles Euclides, chamado para comandar o Departamento de Matemática (EVES, 2011). Segundo esse autor, “é desapontador, mas muito pouco se sabe sobre a vida e a personalidade de Euclides, salvo que foi ele, segundo parece, o criador da famosa e duradoura escola de Matemática de Alexandria da qual, sem dúvida, foi professor” (EVES, 2011, p. 167).

Euclides desenvolveu outros trabalhos relacionados a lugares geométricos e cônicas. Alguns sobreviveram até os tempos atuais devido às traduções, enquanto outros se perderam. Sua obra *Elementos*, porém, é a mais lembrada. Considerada uma das mais importantes da História da Matemática, ela representa um grande esforço de organização e sistematização dos conhecimentos matemáticos da época, mas também propõe uma estrutura lógica (STEWART, 2004) que viria a se tornar referência para a Matemática e para outras ciências (VILELA; DEUS, 2014). Assim:

Não há dúvida de que Euclides teve de dar muitas demonstrações e aperfeiçoar outras tantas, mas o grande mérito de seu trabalho reside na seleção feliz de proposições e no seu arranjo numa sequência lógica, presumivelmente a partir de umas poucas suposições iniciais (EVES, 2011, p. 169).

Os *Elementos* são na verdade a junção de 13 pergaminhos denominados livros e numerados de I a XIII. O “Livro I” inicia com 23 definições, seguidas de cinco postulados e nove noções comuns. Após esses primeiros princípios, são apresentadas as proposições. Tudo isso faz parte da lógica interna da obra e é uma de suas principais características.

Escolhemos o “Livro I” como referência para a elaboração das tarefas aqui analisadas. Isso se justifica pelo fato de algumas de suas proposições se aproximarem dos conteúdos estudados no Ensino Fundamental, uma vez que aborda os “primeiros princípios e geometria plana de figuras retilíneas: construção e propriedades de triângulos, paralelismo, equivalência de áreas e teorema ‘de Pitágoras’” (ROQUE, 2012, p. 163).

A obra de Euclides não foi criada para ser um instrumento de ensino direto para a Educação Básica, entretanto, é possível utilizá-la como um recurso didático. Sua estrutura e a sistematização dos conhecimentos seguiram uma lógica cuidadosa para alcançar as validações; além disso, foram subsídios para a Matemática e para outras ciências.

No que diz respeito ao ensino de geometria, embora a obra apresente uma organização mais lógica do que científica, pode-se encontrar recursos para trabalhar com esse campo, a álgebra e a teoria dos números (SÁNCHEZ, 2012). Estes estão relacionadas ao caráter demonstrativo, que pode ser desenvolvido nos estudantes com a formação do raciocínio dedutivo, com a argumentação e a justificação. O rigor demonstrativo no contexto escolar pode ser pedagogicamente trabalhado e estruturado - talvez não diretamente, mas a partir de um caminho que permita ao estudante chegar a

essa formalidade em algum momento. Segundo Angulo (2009), para um professor ensinar a demonstrar, é necessário que o estudante esteja em um ambiente propício para a descoberta de propriedades. Essas propriedades servirão posteriormente como auxílio para provar seus argumentos. Dessa forma, haverá uma melhor compreensão do conceito e a busca mais convincente de uma demonstração.

A utilização da régua e do compasso é central nos livros de Euclides, uma vez que são os instrumentos de desenho privilegiados em todo o trabalho. Para Schubring e Roque (2014), existem muitas justificativas equivocadas e imprecisões sobre o real motivo do uso desses instrumentos. Mesmo não chegando a uma resposta conclusiva, esses autores verificaram que, para alguns matemáticos, o uso da régua e do compasso era uma estratégia pedagógica para tornar as construções mais simples. A nosso ver, o uso da régua e do compasso nas aulas de geometria na Educação Básica é fundamental. O processo de realizar construções geométricas com o apoio de tais instrumentos (físicos ou virtuais) pode favorecer a visualização das figuras, a compreensão de suas propriedades e, eventualmente, pode facilitar a compreensão das demonstrações.

As duas tarefas que apresentaremos aqui não focalizam a demonstração, mas a busca por uma compreensão menos mecânica e pautada na memorização das construções geométricas, suas relações e propriedades. Tal caminho nos parece adequado ao desenvolvimento da argumentação e da demonstração. Dessa forma, ao promover um trabalho com os *Elementos*, os estudantes podem se beneficiar da lógica da obra por meio do processo de construções geométricas. As proposições do “Livro I” oferecem tanto um pretexto para aproximarmos nossos alunos do processo histórico de desenvolvimento da Matemática, quanto um contexto interessante para a aprendizagem de conceitos geométricos.

METODOLOGIA

Este estudo se caracteriza como pesquisa qualitativa cujo propósito é analisar possíveis contribuições de duas tarefas matemáticas elaboradas a partir de algumas proposições do “Livro I” de *Elementos*, de Euclides, e do contexto histórico de produção dessa obra, para a compreensão de noções de geometria plana em uma classe do 8º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública de Ibirité (Minas Gerais).

Além de nos interessar estabelecer uma compreensão dos significados atribuídos pelos participantes do estudo às tarefas realizadas, o trabalho se deu no contexto natural (sala de aula de Matemática) e demandou um contato prolongado com o campo (MINAYO, 1999).⁵

Participaram deste estudo 35 estudantes de uma classe do 8º ano do Ensino Fundamental com idades entre 13 e 15 anos, sendo 21 meninas e 14 meninos. A escola pública, localizada na zona urbana de Ibirité (na região metropolitana de Belo Horizonte/MG), possui cerca de 2.600 alunos matriculados e atende, em três turnos, ao Ensino Fundamental e ao Ensino Médio, além da Educação para Jovens e Adultos.

As tarefas⁶ foram desenvolvidas pela autora principal durante as aulas de Matemática e contaram com a participação do professor da classe. Nelas, os estudantes foram organizados em duplas e um trio.

5 O projeto de pesquisa foi aprovado pelo Comitê de Ética em Pesquisa da Universidade Federal de Ouro Preto. CAAE: 95816318.8.0000.5150.

6 A noção de tarefa matemática (ou tarefa, como usaremos no texto) é entendida em um sentido próximo ao proposto por Stein e Smith (2009). Uma tarefa matemática é uma parte da aula desta disciplina que tem como objetivo desenvolver uma determinada ideia matemática, que pode estar relacionada a um ou mais problemas (complexos ou não). Buscamos elaborar tarefas matemáticas “que exigem que os alunos pensem conceitualmente e que os estimulem a fazer conexões que representam um tipo diferente de oportunidade para os alunos pensarem” (STEIN; SMITH, 2009, p. 22).

A produção de dados ocorreu por meio de observações das aulas (registradas no diário de campo da pesquisadora e ampliadas pela transcrição das gravações em áudio e vídeo), registros produzidos pelos estudantes em um caderno e uma avaliação.

A observação das aulas foi um dos principais instrumentos e se deu de modo participante⁷ ao longo do desenvolvimento das duas tarefas com os alunos. Essas observações foram registradas no diário de campo da pesquisadora. De acordo com Minayo (1999, p. 63), é no diário de campo que “podemos colocar nossas percepções, angústias, questionamentos e informações que não são obtidas através da utilização de outras técnicas”. Sendo assim, esse instrumento permitiu o registro de reflexões acerca das tarefas desenvolvidas pelos participantes do estudo e de todas as situações ocorridas durante o trabalho de campo. As gravações de áudio e vídeo permitiram que as observações registradas fossem confirmadas e/ou expandidas. Além disso, como Powell, Francisco e Maher (2004, p. 91), acreditamos que seu uso não apenas “permite múltiplas visões, mas também possibilita visões sob múltiplos pontos de vista” e ainda favorece o trabalho do pesquisador, pois “assistir repetidamente aos vídeos potencializa o melhoramento da triangulação na análise dos dados”. Com isso, procuramos aprimorar as interpretações geradas a partir da análise dos demais instrumentos.

Os registros produzidos pelos estudantes foram organizados em um caderno. No início do trabalho, cada dupla recebeu um caderno no qual registrou/realizou cada uma das duas tarefas aqui estudadas.

Quadro 1 - Nomes fictícios das duplas de estudantes.

CÓDIGO DA DUPLA	NOME FICTÍCIO	CÓDIGO DA DUPLA	NOME FICTÍCIO
D1	André e Artur	D10	Mary e Melissa
D2	Bia e Bruna	D11	Paulo e Pedro
D3	Leo e Luiz	D12	Dara e Duda
D4	Camila e Carol	D13	Elias e Ester
D5	Lara e Luna	D14	Davi e Diego
D6	João e Joaquim	D15	Naty e Nicole
D7	Renata e Rose	D16	Alice e Alice
D8	Tadeu, Tales e Tiago	D17	Camila e Cassia
D9	Lívia e Lúcia	-	-

Fonte: Goulart (2020).

Um instrumento avaliativo foi aplicado após a realização das duas primeiras tarefas. Seu propósito foi procurar identificar possíveis mobilizações de saberes em relação à compreensão das noções de geometria em estudo e em relação à própria percepção acerca da Matemática como ciência. Esta atividade foi realizada individualmente e a não identificação não era obrigatória.

As duas primeiras tarefas aconteceram entre abril e maio de 2019 (Quadro 2) e foram desenvolvidas em sala de aula, com a presença do professor de Matemática responsável pela classe. Seu propósito era estabelecer um primeiro contato com a História da Matemática e explorar noções de geometria por meio de construções com régua e compasso. Para isso, foram situados Alexandria, sua biblioteca, Euclides e algumas fontes de conhecimento matemático (egípcios, hindus etc.).

⁷ Segundo Yin (2001, p. 116), “a observação participante é uma modalidade especial de observação na qual você não é apenas um observador passivo”.

Quadro 2 - Tarefas realizadas em sala de aula.

DATA	NÚMERO DE AULAS	TAREFA	TEMA	TÓPICOS ESTUDADOS
30/04/19	01	Tarefa 1	A biblioteca de Alexandria, Euclides e os <i>Elementos</i>	- A importância de uma biblioteca - Instrumentos de desenho: régua não graduada e compasso - Figuras geométricas planas - Localização no mapa
07/05/19	07	Tarefa 2	A construção de altares indianos e as primeiras definições de Euclides	- Noções primitivas da geometria (plano, ponto, reta, segmento)
10/05/19				- Retas: perpendicular, mediatriz e paralelas
14/05/19				- Ponto médio
17/05/19				- Ângulo reto
24/05/19				- Quadrado
28/05/19				- Construções geométricas com régua não graduada, compasso e esquadro
31/05/19				- Construção do Altar do Falcão pelos hindus (Índia) - Surgimento da geometria e do esquadro (Egito) - Definições dos <i>Elementos</i>

Fonte: Goulart (2020).

A partir da leitura e organização de todos os dados produzidos, estruturamos a análise à luz dos referenciais teóricos adotados.

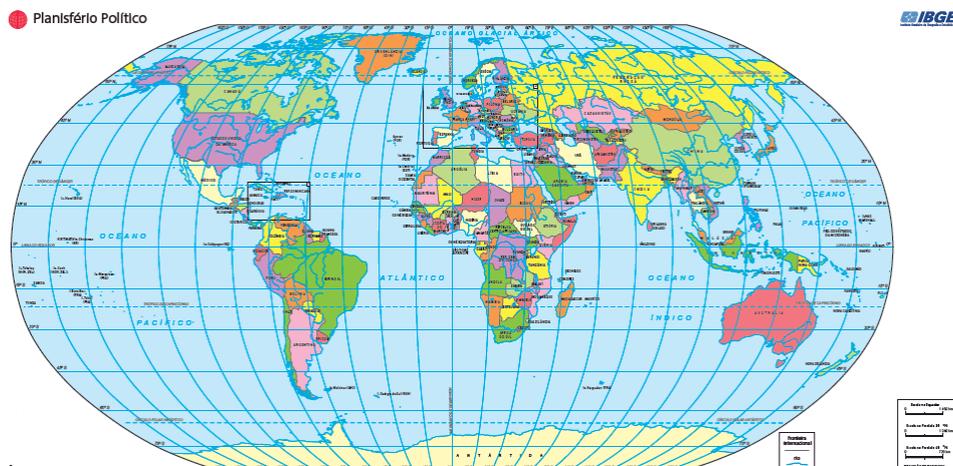
Tarefa 1: “Iniciando a viagem no tempo”

Esta tarefa, primeira do estudo, durou cerca de 40 minutos. Nela, os alunos foram convidados a imaginar uma “viagem no tempo”, na qual iríamos para uma época anterior ao nascimento de Cristo. Esta viagem teria como propósito saber de onde vêm muitas das ideias que eles estudaram e/ou que ainda estudarão na disciplina de Matemática.

A princípio, ao observar as expressões faciais, parecia que a proposta soava um pouco estranha para eles. Entretanto, após ter início a “viagem”, os alunos se envolveram com a proposta e participaram ativamente. O principal objetivo dessa tarefa foi promover uma primeira aproximação com a história de Euclides e os *Elementos* e o contexto de sua época. Também pretendíamos proporcionar conhecimentos que, somados a outros que viriam nas tarefas seguintes, favorecessem uma compreensão, por parte dos alunos, da Matemática enquanto prática social existente em todas as culturas em todas as épocas.

Cada dupla recebeu um planisfério, conforme a Figura 1, do tamanho de duas folhas de ofício para que, a cada destino visitado, visualizasse a sua localização.

Figura 1 - Planisfério entregue às duplas.



Fonte: IBGE (s/d, disponível em <https://portaldemapas.ibge.gov.br/porta1.php#mapa1>).

À medida que distribuíamos as imagens para as duplas, comentávamos sobre a viagem que faríamos. As duplas começaram a explorar o planisfério com interesse, conversando entre si e apontando para as suas regiões. Localizamos o Brasil, Minas Gerais, Belo Horizonte e a cidade de Ibirité. Em seguida, os alunos localizaram o Egito e a cidade de Alexandria. Algumas duplas encontraram o Egito rapidamente, mas outras tiveram dificuldade para fazê-lo. Além disso, ao perguntar sobre qual seria o continente ao qual o país pertencia, rapidamente responderam “África” e “no continente africano”. Procuramos, como destacam Miguel e Miorim (2008, p. 155), “retirar a Matemática do seu sempre questionado isolamento”, fazendo com que ela possa contribuir para o alcance de metas pedagógicas que “vise[m] à formação crítica do cidadão”.

Em seguida, projetamos em uma tela o Google Earth⁸ e localizamos os mesmos lugares mencionados anteriormente. A gravação dessa aula evidencia expressões de surpresa, entusiasmo e envolvimento manifestadas pelas duplas.

Iniciamos nossa “viagem no tempo” na cidade de Alexandria, no Egito, no século III a.C. Apresentamos, em seguida, um pequeno vídeo⁹ sobre a Biblioteca de Alexandria e Euclides. Infelizmente, como o vídeo é antigo e legendado, a qualidade da imagem não é muito boa. Durante sua apresentação, algumas duplas se dispersaram e podem ter perdido alguma informação. Mesmo assim, ele foi o ponto de partida de todo o trabalho desenvolvido e promoveu algumas discussões sobre o conhecimento contido na biblioteca.

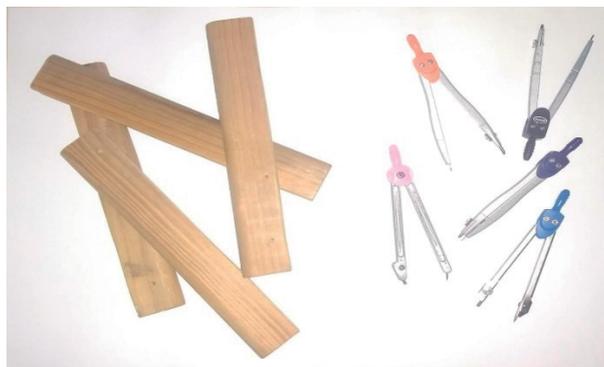
Em seguida, comentamos que um importante matemático que havia trabalhado na Biblioteca de Alexandria se chamava Euclides e que ele havia organizado os conhecimentos matemáticos da época em uma obra chamada *Elementos*. Convidamos as duplas a imaginarem que éramos todos estudantes da biblioteca, alunos de Euclides, e que estávamos em Alexandria para estudar as ideias matemáticas contidas em *Elementos*.

⁸ Programa de computador da empresa Google que apresenta um modelo tridimensional do globo terrestre. Disponível em: <https://www.google.com.br/intl/pt-BR/earth/>.

⁹ Utilizamos alguns trechos de dois vídeos. O primeiro é *A Biblioteca de Alexandria - Carl Sagan* (disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=5A9B1rwwg-D4>. Acesso em: 9 set. 2022) e o segundo é *A Biblioteca de Alexandria - documentário (1996)* (disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=TK5zppZzUy4&t=105s>. Acesso em: 10 out 2022).

Nossa primeira tarefa, como estudantes de Euclides, seria aprender a utilizar dois instrumentos básicos: régua e compasso. Nesse instante, ao iniciarmos a distribuição dos instrumentos, o aluno Davi comentou: “Ah! Um pedaço de pau e um compasso” (houve risos dos colegas).

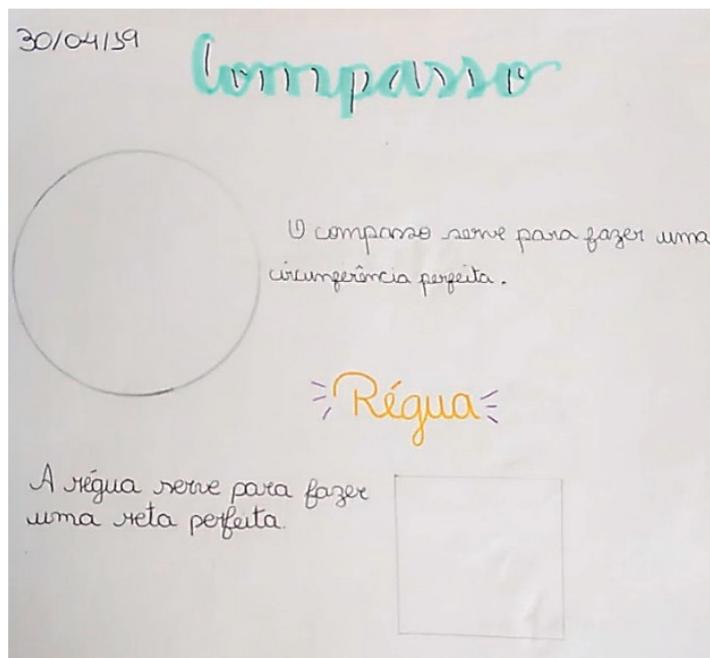
Figura 2 - Instrumentos distribuídos para as duplas: régua não graduada e compasso.



Fonte: Goulart (2020).

Além dos instrumentos mencionados, cada dupla recebeu um caderno de registro no qual deveria registrar informações e/ou a resolução das tarefas propostas. Para finalizar, propusemos que os alunos construíssem livremente alguns desenhos utilizando a régua não graduada e o compasso e que registrassem as possibilidades em frases.

Figura 3 - Construções com régua e compasso da dupla D2.

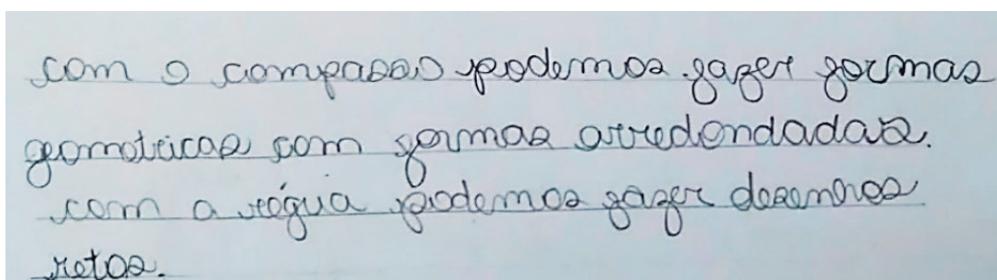


Fonte: Goulart (2020).

A dupla D2 (Figura 3) menciona os termos “circunferência” e “reta”. Isso evidencia que seus membros já conheciam os nomes e a representação de algumas figuras planas. Ressaltamos que, das 17 duplas, apenas quatro fizeram registros somente com desenhos. As demais citaram figuras planas (ex., círculos, circunferência, quadrados, retângulos, retas e triângulos) e figuras espaciais e/ou físicas, como planetas, rodas, pneu, cone e cubo.

Na Figura 4, observamos que a dupla D15, ao escrever sobre o que era possível desenhar com o compasso, não menciona círculo ou circunferência, mas sim “formas arredondadas” e, em relação à régua, escreve que ela permite “fazer desenhos retos”. Das 17 duplas, uma delas menciona a palavra “circunferência” e oito, a palavra “círculo”.

Figura 4 - Registro da dupla D15 sobre construções com régua e compasso.



Fonte: Goulart (2020).

Dessa forma, verificamos que muitos estudantes não estavam habituados com o uso do compasso, mesmo já tendo sido utilizado na aula de Artes no ano anterior.

Tarefa 2: A construção do Altar do Falcão: primeiras definições de Euclides

A segunda tarefa demandou sete aulas de 50 minutos para ser desenvolvida. Seus propósitos eram: a) proporcionar informações históricas e geográficas que permitissem uma associação da Matemática com práticas sociais variadas e de evidenciar como pessoas distintas de variadas culturas construíram conhecimentos matemáticos que posteriormente seriam utilizados por Euclides em sua obra; e b) desenvolver a habilidade de manusear e realizar construções com os instrumentos geométricos (régua não graduada e compasso), bem como rever ou ter contato com algumas noções básicas de geometria (ex., segmentos, retas perpendiculares e paralelas, ângulo reto, dentre outros).

Na tarefa 2, “viajamos” para um período anterior à época de Euclides, buscando compreender como outra cultura utilizava a Matemática em suas práticas sociais. Desta vez, a Índia foi o destino. Novamente, as duplas foram convidadas a localizar o país, identificar o continente a qual pertence e observar a distância entre a Índia e o Egito. Essas observações também ocorreram com a animação do Google Earth. Além disso, cada dupla recebeu um planisfério preto e branco para que pintasse cada região visitada no mundo.

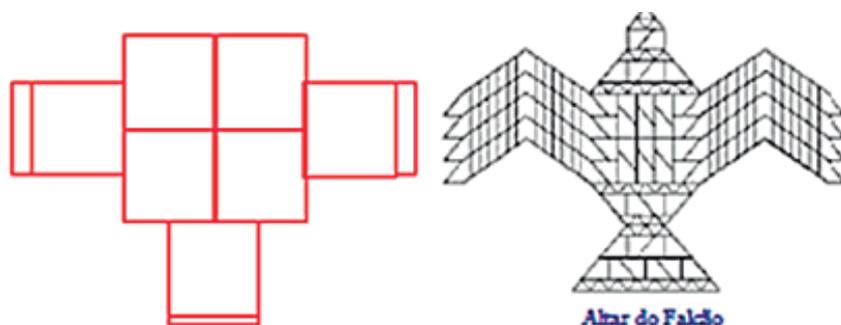
Procuramos conhecer os Sulbasutras¹⁰ e a Matemática envolvida na construção de altares na civilização védica (GASPAR, 2003). Nessa civilização, a construção dos altares era algo de extrema importância e deveria ser muito rigorosa para merecer que os deuses atendessem ao desejo de quem

¹⁰ Os Sulbasutras são textos que possuem instruções para a construção de altares sagrados (GASPAR, 2003).

os construía. Para que os rituais fossem bem-sucedidos, os altares deveriam ser construídos de forma muito precisa, ou seja, a Matemática era muito importante para eles (GASPAR, 2003). Buscamos, com essa tarefa, mostrar aos alunos algumas “necessidades práticas, sociais, econômicas e físicas que servem de estímulo ao desenvolvimento das ideias matemáticas” (MIGUEL; MIORIM, 2008, p. 53).

Para essa tarefa, escolhemos o Altar do Falcão, um dos mais famosos altares indianos, para uma problematização histórica atrelada. Em seu modelo de construção mais simples, sua base era formada por sete quadrados e meio (ver Figura 5): o corpo do altar tinha quatro quadrados; asas e cauda tinham um quadrado cada. Para que a construção se aproximasse mais de um falcão, nesse modelo, as asas e a cauda eram alongadas: as asas tinham um quinto de um quadrado a mais, e a cauda mais um décimo de um quadrado.

Figura 5 - Altar do Falcão.



Fonte: Gaspar (2003, p. 105).

A figura acima representa dois modelos de construção de um Altar do Falcão: à direita, um modelo mais complexo e mais semelhante ao pássaro, constituído por triângulos e quadriláteros; à esquerda, um modelo mais simples constituído por quadrados e retângulos.

Propusemos a construção da base do modelo mais simples. Para construí-la, inicialmente realizamos uma pequena discussão sobre as características¹¹ de um quadrado para posteriormente realizar a sua construção. Simultaneamente, iniciamos nossa aproximação ao “Livro I” dos *Elementos*, pois, à cada etapa da construção do quadrado, procuramos associar os entes geométricos com as definições de Euclides (ditas aos alunos como ideias de Euclides¹²), evidenciando também a necessidade da padronização de nomenclatura dos pontos, retas e segmentos.

A construção do quadrado foi realizada em conjunto com os alunos, ou seja, as duplas construíam o quadrado no caderno enquanto a professora fazia os desenhos no quadro. Iniciamos com a explicação de que as figuras planas são construídas em uma região que Euclides chamou de “superfície” e definiu como “aquilo que tem somente comprimento e largura” (BICUDO, 2009, p. 97). A Figura 6 mostra a construção final de um quadrado da dupla D2.

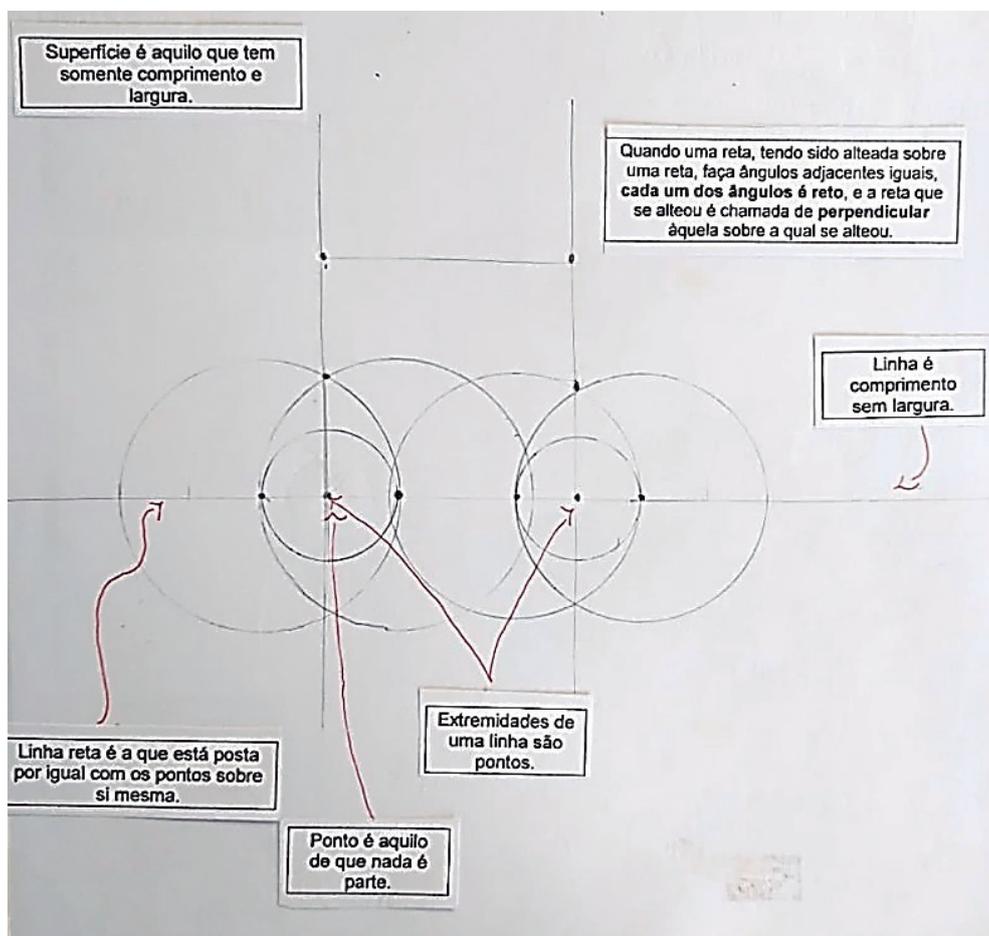
As duplas receberam várias “plaquinhas” com algumas definições de Euclides extraídas da obra *Elementos* por Irineu Bicudo. Assim, à medida que mencionávamos alguma definição de Euclides,

11 Utilizamos aqui o termo “características”, e não “propriedades”, por considerar que a discussão proposta nesse momento não focou exclusivamente nos aspectos formais nem os esgotou, apenas procurou despertar o olhar dos alunos para determinadas características que diferenciam uma figura geométrica de outra e que seriam necessárias e suficientes para sua existência.

12 Algumas ideias de Euclides que foram articuladas durante cada etapa da construção: “Ponto é aquilo que nada é parte”; “Extremidades de uma linha são pontos”; dentre outras.

as plaquinhas eram coladas próximo ao desenho. A construção dos quadrados para o Altar do Falcão permitiu avançar e estudar também os conceitos de retas perpendiculares e paralelas definidos por Euclides em sua obra.

Figura 6 - Construção de um quadrado com régua não graduada e compasso (D2).



Fonte: Goulart (2020).

Em seguida, pedimos às duplas que se organizassem em grupos maiores, de duas ou três duplas, para, coletivamente, construir junto um Altar do Falcão. Para agilizar a construção, a turma foi dividida em seis grupos maiores, e cada grande grupo deveria montar um Altar do Falcão.

Essa parte da tarefa permitiu explorar o compasso como instrumento de transporte de segmento, pois os quadrados foram construídos separadamente e deveriam ter exatamente a mesma medida. Com isso, o grupo precisou definir o tamanho do quadrado, e cada aluno deveria utilizar o compasso como referência (já que a régua não era graduada). A Figura 7 mostra um grupo de quatro alunos realizando a construção dos quadrados para montar um Altar do Falcão. A Figura 8 retrata o momento em que um grupo de alunos iniciava a montagem do Altar do Falcão com sete dos oito quadrados iguais construídos.

Figura 7 - Construção de quadrados para montagem do Altar do Falcão.



Fonte: Goulart (2020).

Figura 8 - Início da montagem do Altar do Falcão.

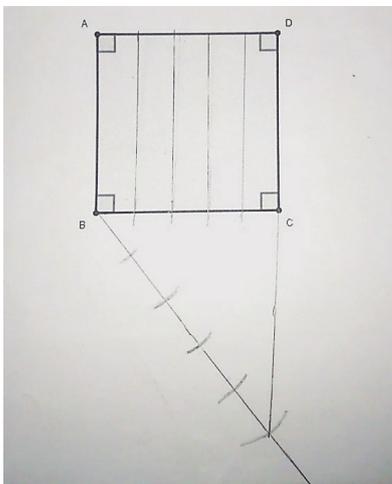


Fonte: Goulart (2020).

Esse momento demandou muito tempo, devido às dificuldades de algumas duplas para a construção do quadrado e com o manuseio do compasso. Entretanto, destacamos que foi durante essa tarefa que os alunos puderam construir quadrados com medidas congruentes utilizando uma régua sem graduação. Isso possibilitou a verificação de que realmente não era necessária a utilização de uma régua graduada, pois o compasso assumiria essa função. Dessa forma, como cada integrante do grupo precisava construir pelo menos um quadrado e estes deveriam possuir as mesmas medidas, eles deveriam utilizar o compasso para construir quadrados com as mesmas dimensões.

Para finalizar a construção do altar, devido às limitações de tempo, foi necessário utilizar o esquadro. Ainda que ele não tenha sido usado por Euclides, é um instrumento muito antigo, utilizado desde os egípcios. Para construir os retângulos que representam um quinto e um décimo de um quadrado, primeiramente, realizamos as divisões em uma folha entregue a cada dupla que já continha um desenho de um quadrado. Essa construção também foi feita no quadro enquanto as duplas desenhavam na folha. As Figuras 9 e 10 ilustram esse momento.

Figura 9 - Divisão do quadrado em cinco partes iguais pela dupla D12.



Fonte: Goulart (2020).

Figura 10 - Aprendendo a dividir um quadrado em cinco partes iguais.



Fonte: Goulart (2020).

Figura 11 - Montagem (finalização) do Altar do Falcão.



Fonte: Goulart (2020).

Durante a construção da Figura 9, algumas definições de Euclides foram mencionadas, como a definição de reta, de segmento, de ângulo reto e principalmente de retas paralelas. Por exemplo, após a divisão do quadrado, mencionamos que os segmentos (retas) construídos dentro do quadrado possuem uma característica especial e que também foram definidos por Euclides. A Figura 10 registra o momento no qual o aluno João (D6) estava dividindo um dos quadrados, construídos em conjunto, em cinco partes iguais, para finalizar o altar do seu grupo. Na Figura 11, observamos um grupo finalizando o Altar do Falcão com a colagem dos retângulos construídos anteriormente.

RESULTADOS E ANÁLISE

Os dados produzidos a partir da realização das duas tarefas foram analisados a partir de duas categorias: percepção da Matemática e compreensão de noções de geometria. Tais categorias surgiram do referencial teórico adotado e emergiram a partir dos dados obtidos à luz da História da Matemática como abordagem de ensino. Além disso, dentro de cada uma das categorias citadas, construímos subcategorias que emergiram tanto dos dados quanto do aporte teórico que fundamenta esta pesquisa.

PERCEPÇÃO ACERCA DA MATEMÁTICA

Nesta categoria, analisamos comentários e registros produzidos pelos estudantes, durante as tarefas, buscando indícios das suas percepções acerca da Matemática. Mais especificamente, investigamos se as tarefas alcançaram o propósito de promover um entendimento da Matemática enquanto construção humana presente nas práticas sociais de todas as culturas.

(a) A Matemática como construção humana

Durante todo o trabalho de campo, procuramos proporcionar uma visão acerca da Matemática: como uma construção humana; como um trabalho de muitas pessoas; e como uma ciência que ainda segue em construção. Buscamos, na História da Matemática, um apoio para que essa percepção fosse proporcionada aos alunos e os levasse a perceber, também, “as razões pelas quais as pessoas fazem Matemática” (MIGUEL; MIORIM, 2008, p. 53).

Uma análise das respostas dadas pelos alunos na primeira avaliação¹³ desvela indícios de que a Matemática pode ter passado a ser compreendida como uma ciência que levou muito tempo para se desenvolver e se aprimorar, estando ainda em evolução, como mostram alguns registros dos alunos:

Aluno(a) C: Eu aprendi que para ter tudo que temos hoje utilizamos Matemática, graças aos povos antigos temos o conhecimento avançado sobre a Matemática, claro, com alguns avanços.

Aluno(a) F: Aprendi que lá as pessoas se baseavam em outras pessoas e que tinham grandes pensadores que serviram de inspiração para a época, mas que construíram um legado que marca a matemática até hoje.

Aluno(a) K: Diferente da nossa época. Mas era uma forma bem legal de aprender e uma experiência. Que eles utilizavam as formas em tudo.

Aluno(a) Y: A Matemática que temos hoje em dia é derivada da Matemática primitiva de antigamente.

(Registros dos alunos durante a primeira avaliação do trabalho, 11/07/19, extraído de Goulart (2020)).

As respostas evidenciam o interesse pelos fatos históricos das tarefas relacionadas à Matemática dos povos antigos. Em relação à obra *Elementos*, observamos que alguns alunos entenderam que o título da obra estaria relacionado aos instrumentos de desenho: régua de madeira e compasso.

¹³ Todos os 30 estudantes presentes responderam a uma avaliação do trabalho desenvolvido até aquele momento. Seu intuito era levantar as opiniões dos alunos sobre as tarefas desenvolvidas e identificar conhecimentos aprendidos. A identificação da avaliação não era obrigatória.

Outros alunos associaram a obra ao contexto histórico da sua construção e ao conteúdo de geometria, pois, além de destacarem o que foi a Biblioteca de Alexandria, registraram que Euclides “teve a ideia de juntar tudo que outras pessoas tinham descoberto em apenas um livro *Elementos*” para “passar o conhecimento daquela época para as pessoas de hoje” e, ainda, os *Elementos* “ajudaram no aprendizado das formas das construções geométricas”.

Jahnke *et al.* (2002), ao discutirem sobre o uso de fontes primárias na aula de Matemática (como os *Elementos*), mencionam que os alunos podem refletir sobre suas próprias visões do assunto ao pensarem em outras pessoas a partir do contato com fontes originais. Sendo assim, a obra de Euclides, nossa principal inspiração neste estudo, foi um caminho para proporcionar a percepção da Matemática como construção humana. Temos indícios dessa percepção a partir de alguns registros dos alunos na primeira avaliação do trabalho, pois, ao solicitarmos a opinião deles sobre a importância do livro de Euclides, alguns responderam que:

Aluno(a) C: Foi a base para o reconhecimento da Matemática.

Aluno(a) E: Minha opinião que o livro de Euclides nos ajudou e nos ensinou várias coisas sobre a matemática e no livro dele tem várias coisas bem legais para nos ajudar na matemática.

Aluno(a) F: Eles foram um grande avanço na matemática e na criação de muitas figuras e materiais geométricos, ele foi um grande matemático e pensador e seus livros foram uma marca do que ele deixou.

Aluno(a) T: Para passar para outras pessoas o mesmo aprendizado que ele teve.

Aluno(a) Y: Para a nossa evolução e aprendizado matemático para as próximas eras. (Registros dos alunos durante a avaliação do trabalho, 11/07/19).

De modo geral, a Matemática dos povos hindus, na Índia, e todo o contexto apresentado sobre Euclides, sua época e os *Elementos*, de certa forma, marcaram os alunos. Observamos que a construção do Altar do Falcão, uma prática social que envolvia muitos conhecimentos matemáticos por pessoas comuns (ou não matemáticos), ganhou destaque quanto à compreensão das necessidades práticas que podem ter inspirado Euclides, e muitos matemáticos, à formalização matemática contida nos *Elementos*.

Ao compreender a Matemática como parte importante de práticas sociais e ao promover tarefas para alcançar esse objetivo com os alunos do Ensino Fundamental, enfatizamos que “todas as práticas sociais produzem conhecimento e/ou ressignificam saberes e conhecimentos apropriados de outras práticas que lhes são contemporâneas ou não, que participam do mesmo contexto ou não” (MIGUEL; MIORIM, 2008, p. 166).

COMPREENSÃO DE NOÇÕES DE GEOMETRIA

Nesta categoria, guiamo-nos pelo desenvolvimento de algumas noções geométricas durante as tarefas, observadas tanto em sala de aula quanto no laboratório.

Em sala de aula, com os instrumentos físicos (régua não graduada e compasso), buscamos promover a compreensão dos entes geométricos primitivos, a partir das definições do “Livro I” de *Elementos*.

Nesta categoria, construímos três subcategorias a priori e a posteriori: o compasso como um medidor; a construção de figuras; e a manipulação de figuras. Essas subcategorias emergiram tanto a partir dos estudos de Gravina (1996, 2001, 2015), quanto ao longo do desenvolvimento das tarefas.

É por essa razão que buscamos criar um ambiente onde pudéssemos promover a compreensão de noções primitivas da geometria. Diante disso, inspirados na obra *Elementos*, verificamos que o trabalho com o compasso físico e a régua não graduada foi um caminho promissor para alcançar esse objetivo. Além disso, a régua não graduada (de madeira), utilizada nas tarefas iniciais, não estaria presente no GeoGebra, e sim todas as figuras que foram construídas com o seu apoio: retas e segmentos de retas.

Ambas as tarefas foram um caminho para que os estudantes pudessem alcançar a fluência tecnomatemática (JACINTO; CARREIRA, 2017) e, assim, realizar as tarefas com as proposições do “Livro I”. Para Jacinto e Carreira (2017, p. 272), a fluência tecnomatemática é a “ideia de ser capaz de produzir pensamento matemático mediante a utilização de ferramentas para reformular ou criar conhecimento e expressar pensamento”.

A partir da análise descritiva dos resultados, apresentadas anteriormente, percebemos indícios de (ou um caminho para a) fluência tecnomatemática. Alguns alunos, quando atingiram a fluência tecnomatemática, realizavam as construções de forma muito mais rápida.

Em síntese, concluímos que as tarefas permitiram que os alunos aprimorassem habilidades técnicas e matemáticas para construções mais ágeis se comparadas àquelas realizadas com régua e compasso físicos, e isso gera mais tempo para testes, ensaios e manipulações que, por sua vez, geram a criação de hipóteses e conjecturas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apresentamos aqui um recorte de uma pesquisa de mestrado. Nele, privilegiamos o momento inicial do desenvolvimento da proposta, no qual estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental, com pouca (ou nenhuma) familiaridade com instrumentos de desenho geométrico e com noções de geometria plana, entram em contato com os *Elementos* de Euclides e exploram algumas situações da vida cotidiana de povos antigos nos quais tais conhecimentos eram empregados.

Buscamos apresentar a Matemática aos estudantes como uma construção humana, realizada por muitas pessoas de distintas culturas ao longo da história. A partir dessa perspectiva, aprender geometria pode ganhar mais sentido na medida em que os estudantes compreendam o seu desenvolvimento e os diversos propósitos de acordo com cada sociedade e cultura. Para isso, optamos por desenvolver um trabalho a partir do uso de uma fonte primária e, então, escolhemos a obra *Elementos*, de Euclides, especialmente o seu “Livro I”, por acreditar no seu potencial pedagógico nos anos finais do Ensino Fundamental.

Um dos nossos objetivos era identificar indícios de envolvimento e interesse por parte dos alunos em relação às tarefas e às questões históricas relacionadas ao desenvolvimento da Matemática ao longo dos tempos. Esses indícios foram identificados a partir de falas, comportamentos e registros produzidos pelos alunos, os quais, por sua vez, foram organizados, analisados e interpretados.

Percebemos que algumas das contribuições das tarefas matemáticas desenvolvidas para o ensino de noções de Geometria plana, no 8º ano do Ensino Fundamental, se relacionam com alguns dos objetivos pedagógicos destacados por Miguel e Miorim (2008, p. 53):

- (1) A Matemática como uma criação humana;
- (2) As razões pelas quais as pessoas fazem matemática;

- (3) As necessidades práticas, sociais, econômicas e físicas que servem de estímulo ao desenvolvimento das ideias matemáticas;
- (4) As conexões existentes entre matemática e filosofia, matemática e religião, matemática e lógica, etc.;
- (5) A curiosidade estritamente intelectual que pode levar à generalização e extensão de ideias e teorias;
- (6) As percepções que os matemáticos têm do próprio objeto da matemática, as quais mudam e se desenvolvem ao longo do tempo;

A História da Matemática foi fundamental para que os alunos pudessem ter novas percepções e diferentes posturas acerca da Matemática e da obtenção do conhecimento matemático. O “Livro I” de *Elementos* possui proposições que, a partir de um planejamento apropriado, puderam “visitar” os anos finais do Ensino Fundamental, permitindo um trabalho com construções de figuras geométricas a partir de propriedades que as definem. Nesse processo, percebemos que o aluno pode desenvolver habilidades técnicas e matemáticas que contribuam, posteriormente, para o desenvolvimento da capacidade de argumentar e demonstrar.

Em síntese, observamos que as duas tarefas analisadas contribuíram para uma compreensão dos entes primitivos (ponto, reta, plano) como base para as construções geométricas - construção do quadrado e do triângulo -, conforme os *Elementos*. Além disso, a abordagem pautada na História da Matemática favoreceu uma ampliação da percepção dos alunos acerca da Matemática e dos processos de desenvolvimento de conceitos matemáticos, como práticas sociais de todas as culturas.

REFERÊNCIAS

- ANGULO, F. De la geometría de Euclides a la geometría “a la Euclides”: procesos demostrativos mediados por Cabri Géomètre. *In: ENCUESTRO COLOMBIANO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA*, 10., Pasto, Colômbia, 2009. **Anais** [...]. Pasto, Colômbia: Universidad de los Andes, 2009. p. 1-14. Disponível em: <http://funes.uniandes.edu.co/745/>. Acesso em: 25 abr. 2018.
- BICUDO, I. **Os Elementos**: Euclides. São Paulo: Editora UNESP, 2009.
- EVES, H. **Introdução à história da Matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. 5. ed. Campinas, São Paulo: Editora da Unicamp, 2011.
- FUJITA, T. The order of theorems in the teaching of Euclidean geometry: Learning from developments in textbooks in the early 20th Century. **ZDM - Mathematics Education**, [s. l.], v. 33, n. 6, p. 196-203, 2001.
- GASPAR, M. T. J. **Aspectos do desenvolvimento do pensamento geométrico em algumas civilizações e povos e a formação de professores**. 318 f. 2003. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2003.
- GOULART, T. A. B. **Os “Elementos” de Euclides visitam o Ensino Fundamental**: análise de tarefas matemáticas pautadas na história da matemática e desenvolvidas no software GeoGebra. 198 f. 2020. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2020.
- GRAVINA, M. A. Geometria Dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado da Geometria. *In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO*, 7., Belo Horizonte, 1996. **Anais** [...]. Belo Horizonte: [s. n.], v. 1, 1996. p. 1-13.

- GRAVINA, M. A. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo**. 2001. Tese (Doutorado em Informática na Educação) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.
- GRAVINA, M. A. O potencial semiótico do Geogebra na aprendizagem da Geometria: uma experiência ilustrativa. **Revista Eletrônica VIDYA**, Santa Maria, v. 35, n. 2, p. 237-253, 2015. Disponível em: <https://bit.ly/3DO8iFu>. Acesso em: 27 maio 2018.
- JACINTO, H.; CARREIRA, S. Diferentes Modos de Utilização do GeoGebra na Resolução de Problemas de Matemática para Além da Sala de Aula: evidências de fluência tecno-matemática. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 31, n. 57, p. 266-288, abr. 2017. Disponível em: <https://bit.ly/3Nu32tS>. Acesso em: 16 jan. 2020.
- JAHNKE, H. N. *et al.* The use of original sources in the mathematics classroom. *In*: FAUVEL, J.; VAN MAANEN, J. (Org.). **History in Mathematics Education: The ICMI Study**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002. V. 6, p. 291-328.
- MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. **História na Educação Matemática: propostas e desafios**. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.
- MINAYO, M. C. S. **Pesquisa social: teoria, método e criatividade**. 28. ed. Petrópolis, RJ: Editora Vozes, 1999.
- POWELL, A. B.; FRANCISCO, J. M.; MAHER, C. A. Uma abordagem à análise de dados de vídeo para investigar o desenvolvimento das idéias matemáticas e do raciocínio de estudantes. Tradução de Antonio Olimpio Junior. **Bolema**, Rio Claro, v. 17, n. 21, p. 81-14, 2004. Disponível em: <https://bit.ly/3UzbZNF>. Acesso em: 31 mar. 2019.
- ROQUE, T. **História da Matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2012
- SÁNCHEZ, C. H. S. La historia como recurso didáctico: el caso de los Elementos de Euclides. **Revista de la Facultad de Ciencia y Tecnología**, Bogotá, n. 32, p. 71-92, 2012. Disponível em: <https://bit.ly/2Xvj5Nx>. Acesso em: 25 abr. 2018.
- SCHUBRING, G.; ROQUE, T. O papel da régua e do compasso nos Elementos de Euclides: uma prática interpretada como regra. **História Unisinos**, São Leopoldo (RS), v. 18, n. 1, p. 91-103, 2014. Disponível em: <https://bit.ly/3gMmfKP>. Acesso em: 7 nov. 2018.
- STEIN, M. K.; SMITH, M. S. Tarefas matemáticas como quadro para a reflexão: da investigação à prática. **Educação e Matemática: Associação de Professores de Matemática**, Portugal, n. 105, p. 22-28, 2009. Disponível em: <https://bit.ly/3fm5BkV>. Acesso em: 7 nov. 2019.
- STEWART, I. **Em Busca do Infinito: Uma História da Matemática dos Primeiros Números à Teoria do Caos**. Rio de Janeiro: Editora Zahar, 2004.
- VILELA, D. S.; DEUS, K. A. Matemática, adjetivo: a demonstração pela ótica da cultura. **Revista Horizontes**, Itatiba (SP), v. 32, n. 2, p. 63-76, jul/dez. 2014. Disponível em: <https://bit.ly/3TUohXZ>. Acesso em: 25 abr. 2018.
- YIN, R. K. **Estudo de caso: planejamento e métodos**. Tradução Daniel Grassi. 2. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

RECEBIDO EM: 31 mai. 2022

CONCLUÍDO EM: 10 out. 2022