

O ENSINO DE CÁLCULO NAS UNIVERSIDADES BRASILEIRAS E A COMPREENSÃO DO CONCEITO DE LIMITE

THE CALCULUS TEACHING IN BRAZILIAN UNIVERSITIES AND THE UNDERSTANDING OF THE CONCEPT LIMIT

LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO EN LAS UNIVERSIDADES BRASILEÑAS Y LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO LÍMITE.

LÍVIAM SANTANA FONTES¹
CLEYTON HÉRCULES GONTIJO²

RESUMO

A disciplina Cálculo Diferencial e Integral é componente curricular obrigatório em diversos cursos universitários ofertados no Brasil. Historicamente, essa disciplina tem apresentado elevados índices de reprovação. Considerando essa situação, desenvolvemos uma pesquisa com o objetivo de analisar as concepções de estudantes dessa disciplina acerca do conceito de Limite a fim de identificar possíveis obstáculos para a sua aprendizagem. A pesquisa foi concebida sob os princípios da Engenharia Didática e, decorrente dessa opção metodológica, o artigo apresenta resultados de algumas etapas de sua realização, especialmente um breve histórico do Cálculo e do seu ensino no Brasil. Apresenta ainda análises das informações produzidas pelos estudantes acerca do conceito de Limites, que identificou problemas que decorrem do ensino dessa disciplina. A pesquisa nos levou a concluir que são necessárias mudanças metodológicas no ensino de Cálculo, a exemplo do uso de metodologias ativas.

Palavras-chave: Ensino de Cálculo no Brasil. Engenharia Didática. Metodologias ativas.

ABSTRACT

The Differential and Integral Calculus course is a compulsory curricular component in several university courses offered in Brazil. Historically, this discipline has shown high failure rates. Considering this situation, we developed this research to assay the student's conceptions of this discipline about the concept of Limit, to identify possible obstacles to their learning. The article presents the results of some stages of Didactic Engineering, which was the methodological option adopted, especially a brief history of Calculus and its teaching in Brazil. It also presents the analysis of what was produced by the students about the concept of Limits. We identify problems arising from the teaching of this discipline. The research led us to conclude that methodological changes are necessary for the Calculus's teaching, such as the active learning methodologies.

Keywords: Teaching Calculus in Brazil. Didactic Engineering. Active Learning Methodologies.

RESUMEN

El curso de Cálculo Diferencial e Integral es un componente curricular obligatorio en varios cursos universitarios ofrecidos en Brasil. Históricamente, esta disciplina ha mostrado altas tasas de fracaso. Ante esta situación, desarrollamos una investigación con el objetivo de analizar las concepciones de los estudiantes de esta disciplina sobre el concepto de Límite con el fin de identificar posibles obstáculos para su aprendizaje. La investigación fue concebida bajo los principios de la Ingeniería Didáctica y, como resultado de esta opción metodológica, el artículo presenta resultados

1 Doutora em Educação. Universidade Estadual de Goiás. liviam.fontes@ueg.br. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1245-1813>.

2 Doutor em Psicologia. Universidade de Brasília. cleyton@unb.br. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6730-8243>

de algunas etapas de su realización, especialmente una breve historia del Cálculo y su enseñanza en Brasil. También presenta análisis de la información producida por los estudiantes sobre el concepto de Límites, que identificó problemas derivados de la enseñanza de esta disciplina. La investigación nos llevó a concluir que son necesarios cambios metodológicos en la enseñanza del Cálculo, como el uso de metodologías activas.

Palavras-chave: *Enseñanza del Cálculo en Brasil. Ingeniería Didáctica. Metodologías activas.*

INTRODUÇÃO

O presente artigo apresenta considerações a respeito do Cálculo Diferencial e Integral, sua história e seu ensino na educação superior brasileira e traz uma breve análise sobre a compreensão dos estudantes de uma universidade pública sobre o conceito de Limite³. O interesse pelo tema deve-se aos altos índices de reprovação e evasão desta disciplina no Brasil, como indicam diversos estudos (BEZERRA, 2019; JESUS; LUCAS; MAPA, 2011; LOPEZ; SEGADAS, 2014; REZENDE, 2003; SOUZA JÚNIOR, 2000; WROBEL; ZEFERINO; CARNEIRO, 2013), e as possibilidades vislumbradas nas metodologias ativas de ensino em contribuir com a aprendizagem dos estudantes. Diversos fatores são indicados como responsáveis pelas dificuldades no ensino e na aprendizagem de Cálculo, como a relação entre aprovação e a boa qualidade do curso (OLIVEIRA; RAAD, 2012), o ensino insuficiente na educação básica, a falta de motivação por parte do aluno devido ao pouco tempo para estudo, interação professor-aluno insatisfatória e tipo de metodologia utilizada inadequada (SANTOS; BORGES NETO, 2005). Este último fator refere-se à metodologia tradicional, ou tecnicista de ensino, definida pelos autores como aquela em que predomina a aula expositiva seguida de resolução de exercícios, com valorização na acumulação de informações e na reprodução de fórmulas e conceitos. Como destaca Moretto (2007, p. 133), a escola tradicional teve o seu valor em determinado momento histórico, mas “[...] essa mesma escola parece não responder mais às exigências de um novo contexto social e educacional”.

Quanto a metodologia da pesquisa, a abordagem foi a qualitativa, que parte de questões amplas que vão se definindo ao longo da investigação, e fornece dados descritivos para compreender os fenômenos, de acordo com a perspectiva dos sujeitos da situação em estudo (GODOY, 1995). O método adotado foi a fenomenologia, que compreende os processos de ensino e aprendizagem para além da transmissão de conteúdos, pois tem seu interesse nos sentidos e significados atribuídos pelos sujeitos. Assumir uma postura fenomenológica ao trabalhar-se com Educação Matemática significa buscar sentido daquilo que se faz ao ensinar e ao aprender matemática (BICUDO, 1999, p. 31). Para a análise das informações coletadas na fase de intervenção da pesquisa, que foram os registros dos estudantes, lançou-se mão da análise do conteúdo, que de acordo com Bardin (2011), é um conjunto de técnicas que possui duas funções, uma heurística e outra de administração de prova. Na pesquisa realizada o interesse foi pela de segunda função, que de acordo com a autora, são postas questões ou afirmações provisórias que servem como diretrizes para uma confirmação ou informação.

A investigação foi guiada pela Engenharia Didática, uma metodologia de pesquisa que agrega teoria e prática pedagógica, pois exige uma sistematização teoricamente fundamentada, denominada fases da Engenharia Didática, e a realização de atividades em sala de aula. De acordo com Almouloud (2007) a primeira fase, denominada análises preliminares, se estrutura em torno da

³ O artigo é um recorte da tese de doutorado “As metodologias ativas de aprendizagem e sua contribuição para o ensino de Cálculo Diferencial e Integral”, do primeiro autor, desenvolvida sob a orientação do segundo autor. A pesquisa foi submetida ao Comitê de Ética em Pesquisa, obtendo parecer nº 3.934.17 favorável à sua execução.

análise do funcionamento de um sistema de ensino e aprendizagem que parece pouco satisfatório, para torná-lo mais eficiente. A segunda é a de construção das situações e análise *a priori*. As situações são as atividades realizadas em sala de aula, as situações-problema que auxiliem os alunos no processo de construção do conhecimento, que favoreçam o desenvolvimento de habilidades matemáticas e do raciocínio dedutivo. A análise *a priori* tem como objetivo determinar quais variáveis, tanto as que dizem respeito ao problema em si, quanto as associadas ao meio que estrutura o fenômeno, é possível exercer algum tipo de controle, relacionando o conteúdo em estudo com as atividades a serem desenvolvidas, para apreensão dos conceitos. A terceira fase é a experimentação, que é a aplicação da sequência didática definida na fase teórica da pesquisa, e a última é denominada análise *a posteriori* e validação, que consiste no tratamento das informações obtidas na sequência didática. Com as informações adquiridas na experimentação, constrói-se o protocolo de pesquisa para a análise, que pode ser complementada com outros instrumentos de coleta de dados.

Para compreender o fenômeno educativo é preciso a observação em diferentes aspectos para um bom planejamento das ações de melhoria do ensino. Assim, na fase de análises preliminares foi realizado um levantamento bibliográfico a respeito do Cálculo, buscando pesquisas que tratam da organização dos conteúdos dos livros didáticos e as que dizem a respeito dos problemas enfrentados no ensino dessa disciplina. Na análise *a priori* estabelecemos como variáveis o ensino com foco em conceitos, a mudança do quadro algébrico para o geométrico e vice-versa, trabalho em grupo e o uso da tecnologia. Para a fase de experimentação, no que se refere às atividades escolhidas para trabalhar o conceito Limite, o apoio teórico foi de Artigue (1995), Reis (2001) e Rezende (2003) para que as tarefas não considerassem apenas a aplicação de fórmulas e memorização, mas apreensão de conceitos, que precisariam ser introduzidos de forma intuitiva.

Considerando os aspectos motivadores dessa pesquisa e os aportes da metodologia utilizada em seu desenvolvimento, nesse artigo nos propomos a apresentar um breve histórico do surgimento da disciplina Cálculo e como se dá seu ensino nas universidades brasileiras, com base em pesquisas que analisaram livros de Cálculo. Além disso, apresentamos uma atividade de intervenção em sala de aula relacionada ao conceito de Limite, a fim de conhecer qual o conceito atribuído pelos estudantes. A pesquisa foi desenvolvida em uma universidade pública localizada no estado de Goiás/Brasil, com a participação de 16 estudantes do curso de Física, ao longo do ano 2020. As atividades foram realizadas na modalidade de aulas remotas⁴, ou seja, ministradas de forma não presencial, mediadas por tecnologias, de modo a permitir atividades coletivas síncronas, e que pudessem ser repassadas para os discentes com dificuldades de acesso síncrono.

UM BREVE HISTÓRICO DO SURGIMENTO DO CÁLCULO

É atribuído ao inglês Isaac Newton (1643-1727) e ao alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) a origem do Cálculo, mas seu desenvolvimento teve início séculos antes, com questões levantadas por filósofos, como as do paradoxo de Zenão, que “[...] incluem um conjunto de problemas que criam dúvidas sobre o movimento. Existe algum movimento? E se sim, como? Nós chegamos ao nosso destino?” (FIGUEROA; ALMOULOUD, 2018, p. 149). A necessidade de resolver problemas práticos, também contribuíram para uma mudança de pensamento que, no decorrer do desenvolvimento matemático, culminou em conceitos como Limites, Integrais e Derivadas. De acordo com Eves (1989),

⁴ No ano 2020 houve a suspensão das aulas presenciais no Brasil, devido à pandemia causada pela Covid-19, e as instituições de ensino adotaram a modalidade de aulas remotas.

a fim de resolver o problema da quadratura do círculo, Antifon, o Sofista (430 a.C.) propunha sucessivas duplicações do número de lados de um polígono inscrito em um círculo, até que a área do polígono se aproximasse da área do círculo. Essa seria uma antecipação ao método de exaustão de Eudoxo de Cnido (408 a.C.- 355 a.C.), que tornou esse processo rigoroso. Boyer (1996) denomina esse método de equivalente grego do Cálculo Integral, que antecede historicamente ao Cálculo Diferencial.

Para Mateus (2007) o surgimento dos conceitos de Cálculo partiram da necessidade de resolver problemas práticos de quadraturas e tangentes, e foi se desenvolvendo ao longo de muito tempo. O autor destaca os estudos sobre variabilidade de quantidades de Nicole d'Oresme (1323-1382), a utilização sistemática de símbolos, como realizado por François Viète (1540-1603), a modificação do método de exaustão, por Simon Stevin (1548-1620), e sua extensão e generalização por James Gregory (1638-1675), e a discussão dos indivisíveis de Personne Gilles Roberval (1602-1675) e Blaise Pascal (1623-1662), como contribuições ao Cálculo Diferencial e Integral que conhecemos hoje. Carvalho e D'Ottaviano (2006) também destacam alguns precursores do Cálculo, como Arquimedes de Siracusa (287 a.C.-212 a.C.), Galileu Galilei (1564-1642), Johannes Kepler (1571-1630), René Descartes (1596-1650), Bonaventura Cavalieri (1598-1647), Pierre Simon de Fermat (1601-1655), Evangelista Torricelli (1608-1647), John Wallis (1616-1703) e Isaac Barrow (1630-1677). Além destes, citamos ainda Blaise Pascal (1623-1662) e James Gregory (1638-1675) cujas contribuições mencionaremos nesse tópico.

Arquimedes desenvolveu o método do equilíbrio, empregado para calcular o volume de sólidos, que foi demonstrado utilizando o método da exaustão de Eudoxo. Com esse método ele desenvolveu a fórmula para obter o volume da esfera⁵ $\frac{4\pi r^3}{3}$, sendo o raio da esfera, e de sólidos como cônicas e cunha de um cilindro circular reto (BOYER, 1996). De acordo com Eves (1989, p. 424) “[...] com o moderno método dos Limites, pode-se fazer com que o método de equilíbrio de Arquimedes se torne perfeitamente rigoroso, confundindo-se, em essência, com a moderna integração.”

Galilei e Kepler contribuíram com o desenvolvimento do Cálculo ao trabalhar com o Infinitésimo. De acordo com Carvalho e D'Ottaviano (2006), Galilei foi o primeiro a utilizar esse termo, que aparece nas propriedades do estudo de mecânica e dinâmica. Para Eves (1989), Kepler desenvolveu as ideias relativas ao Infinitésimo em trabalhos com integração, e utilizou o procedimento de Cavalieri para estabelecer a área da região limitada por uma elipse. Os princípios de Cavalieri, utilizados como ferramentas para o cálculo de áreas e volumes, também foram uma contribuição ao Cálculo moderno.

A Fermat é atribuída a origem do Cálculo Diferencial por seus trabalhos com os problemas relativos à traçado de tangentes a curvas e máximos e mínimos de funções (BOYER, 1996). Não é possível precisar sua influência, pois ele não tinha o hábito de publicar seus trabalhos, mas muitas foram suas contribuições. De acordo com Rezende (2003, p. 165) Fermat

[...] acrescenta às “propriedades específicas” (equações e definições analíticas) das curvas de sua geometria analítica o seu conhecimento acerca dos infinitesimais - obtido com o estudo das obras de Arquimedes, Kepler e Cavalieri -, criando, dessa forma, um instrumento infinitesimal analítico geral e poderoso para a resolução de problemas do Cálculo.

Torricelli também trouxe significativas contribuições ao Cálculo na demonstração da generalização do resultado do teorema de Cavalieri, em que, para n um número natural, $\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$.

⁵ A fórmula para se obter o volume da esfera é $\frac{4\pi r^3}{3}$, sendo o raio da esfera

Toricelli também esteve bem próximo ao conceito de Limite, usando métodos com uso de indivisíveis e de exaustão para diferentes provas da quadratura da parábola (BOYER, 1996). Para Rezende (2003), se Toricelli tivesse desenvolvido um tratamento analítico das curvas e figuras geométricas, poderia ter se consagrado como um dos inventores do Cálculo.

Pascal também se destaca no processo de desenvolvimento do Cálculo com seu trabalho com integração da função seno num quadrante de um círculo. Boyer (1996, p. 252) salienta que,

Se Pascal não tivesse morrido, como Toricelli, logo depois de completar trinta e nove anos, ou se tivesse se dedicado mais constantemente à matemática, ou se fosse mais atraído por métodos algorítmicos que pela geometria e pela especulação sobre a filosofia da matemática, há pouca dúvida de que poderia ter-se antecipado a Newton e Leibniz em sua maior descoberta.

O entendimento da diferenciação e integração como processos inversos surge com Barrow. Além disso, com o denominado ‘triângulo diferencial’, ele traz uma abordagem muito próxima ao atual processo de diferenciação. Seu contemporâneo, o matemático John Wallis, na tentativa de calcular $\int_0^1 (1-x^2)^{1/2} dx$, que não podia ser calculado diretamente na época, trouxe contribuições com a teoria da integração (EVES, 1989). Os resultados Wallis repercutem no trabalho de Gregory, que unifica a aritmética infinitesimal de Wallis e de Roberval, e obteve um método de tangentes semelhante ao de Fermat. Foi de Gregory a primeira publicação da demonstração do Teorema Fundamental do Cálculo (REZENDE, 2003).

Ainda que diversos personagens contribuíssem para o surgimento do Cálculo Diferencial e Integral, foram Newton e Leibniz, trabalhando de forma independente, que tornaram seus fundamentos consistentes. As descobertas de Newton são cerca de dez anos anteriores às de Leibniz, mas as primeiras publicações foram de Leibniz, em 1684, enquanto *Philosophiae naturalis principia mathematica*, em que Newton expõe suas ideias do Cálculo, foi publicado em 1687 (BOYER, 1996). Newton resolveu o problema de determinação de uma tangente à curva de uma função $f(x, y) = 0$, utilizando o método dos fluxos.

Para ele [Newton], uma curva era gerada pelo movimento contínuo de um ponto, a saber, x e y eram fluentes, isto é, quantidades que fluem com o tempo e a taxa de variação desses fluentes, chamou de fluxo dos fluentes. Fluxões eram as velocidades dos movimentos ou os acréscimos dos fluentes às quantidades geradas. Introduziu ainda o chamado momento de um fluente, que era o incremento infinitamente pequeno sofrido por um fluente em um intervalo de tempo também infinitamente pequeno. Ele próprio declara que utiliza o método dos fluxões na quadratura de curvas. Assim ele estabeleceu a questão fundamental: dada a relação das quantidades fluentes, encontrar a relação de suas fluxões e inversamente, fato esse que se traduz hoje pelo Teorema Fundamental do Cálculo, que em termos da geometria significa resolver os dois problemas, o do cálculo de áreas sob uma curva e o do traçado da tangente à curva. Ressalta-se ainda que Newton apresenta idéias embrionárias sobre a noção de Limite, ao retomar os “infinitamente pequenos”, caídos no esquecimento desde a matemática grega. (SILVA, 2011, p. 397).

Como já mencionado, Leibniz obteve as mesmas conclusões que Newton a respeito do Cálculo, mas foi ele quem desenvolveu linguagem e notações adequadas. Utilizou dx e dy para diferenciais

em x e y , e os símbolos $\int y$ e $\int x$ para o sinal de integrais. Também desenvolveu fórmulas para os produtos $dx y = x dy + y dx$, quocientes $d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y dx - x dy}{y^2}$ e potências $dx^n = nx^{n-1}$, com aplicações geométricas (BOYER, 1996). “O raciocínio de Newton estava mais perto dos modernos fundamentos do cálculo que o de Leibniz, mas a plausibilidade da atividade de Leibniz e a eficácia de sua notação diferencial produziram uma maior aceitação das diferenciais que dos fluxos.” (BOYER, 1996, p. 278).

Após Newton e Leibniz, contribuíram com o Cálculo Diferencial e Integral, dentre outros, Jean le Rond d’Alembert (1044-1122), com o conceito de Limite no qual noções de discreto e contínuo pudessem ser trabalhadas, Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), que concentrou seus estudos na teoria de Limite, apresentando resultados importantes, e Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897), a quem são creditadas a definição rigorosa de Limite, e as definições de continuidade, diferenciabilidade e outras noções afins. (CARVALHO; D’OTTAVIANO, 2006; FIGUEROA; ALMOULOU, 2018).

Cauchy deu ao Cálculo elementar o caráter que se tem hoje. Ele construiu uma definição de Limite mais clara do que se tinha na época, tornando fundamental o conceito de d’Alembert, que desconsiderava a lei do Infinitésimo. Seu conceito de Limite tinha um caráter mais aritmético, e considerava o Infinitésimo como uma variável dependente. Para o conceito de Derivada de uma função (f') utilizou o acréscimo $\Delta x = i$ para a variável x , tornando a definição de Derivada de y em relação a x , o quociente $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$ quando i se aproxima de zero, sendo que essa Derivada não existe num ponto em que a função seja descontínua. A definição de Integral de Cauchy independe da diferenciação, e a relação de Integral e Antiderivada se deu pelo teorema do valor médio. A Integral foi definida em termo de limites de somas, o que tornou possível muitas generalizações da Integral. Ideias semelhantes foram desenvolvidas por Bernhard Bolzano (1781-1848), cuja obra matemática foi ignorada por seus contemporâneos, sendo dado apenas a Cauchy o reconhecimento (BOYER, 1996).

A formalização do Cálculo utilizando a linguagem de épsilons e deltas foi feita por Weierstrass, que segundo Eves (1989) exerceu forte influência entre os matemáticos de sua época por suas aulas meticulosamente preparadas e pelo seu rigor matemático. É considerado o pai da análise, e suas contribuições estão mais relacionadas à essa área que propriamente ao Cálculo.

O ENSINO DA DISCIPLINA CÁLCULO NO BRASIL

Ao longo do desenvolvimento da humanidade o conceito de Limite foi necessário para estabelecer razões entre grandezas, para resolver problemas como os de tangência e quadratura, ainda que este saber não tivesse sido reconhecido na época (FIGUEROA; ALMOULOU, 2018). No século XVII se estabelecem os fundamentos do Cálculo Diferencial e Integral, e ao final do século seguinte o ensino dessa disciplina ocorria através de Limite e Infinitésimos, perdurando essa lógica até o final do século XIX, em que passou a ter primazia a abordagem por Limites, devido a influência dos trabalhos de Cauchy. Ainda que o desenvolvimento histórico do Cálculo tenha seguido a ordem: Cálculo Integral, Cálculo Diferencial, Limites e noção de número real, o ensino da *disciplina* segue a ordem inversa: Números, Limites, Derivadas e Integrais (REIS, 2001).

No Brasil, o Cálculo Diferencial e Integral já estava presente nos currículos das escolas militares e politécnicas antes do surgimento do curso superior de matemática no país, e seu ensino tinha um caráter prático, com ênfase em procedimentos algorítmicos. Com o surgimento do curso de matemática da Universidade de São Paulo, em 1934, o Cálculo deixa o caráter prático de formação do engenheiro e do militar, e passa a ser voltado para o formalismo e o rigor matemático, a fim de fornecer aos estudantes dos primeiros anos do curso, a conceitualização

de elementos matemáticos fundamentais, preparando-os para a disciplina Análise Matemática (LIMA; SILVA, 2012).

Para Lima e Silva (2012) os estudantes de Cálculo enfrentaram muitas dificuldades com esse modelo de ensino, o que levou alguns professores a defenderem a adequação no nível de rigor e formalismo com que os conceitos eram trabalhados nessa disciplina. Segundo os autores, uma das propostas de mudança foi feita pela professora Elza Furtado Gomide (1925-2013), que defendia um ensino de Cálculo com finalidade preparatória, que pudesse proporcionar ao estudante a capacidade de

[...] compreender os significados dos conceitos fundamentais deste ramo do conhecimento, as ideias que estiveram em sua gênese, e que soubessem utilizar aquilo que haviam estudado, por meio de técnicas operatórias, como ferramentas para a resolução de problemas. Neste sentido, as técnicas de cálculo de Limites, derivadas e integrais, que até então praticamente não tinham espaço na disciplina, embora não devessem ser o foco do curso, deveriam sim fazer parte deste estudo introdutório (LIMA; SILVA, 2012, p. 7).

Além da abordagem do Cálculo por meio de Limites ser predominante no ensino brasileiro (REIS, 2001), atualmente “[...] é comum que o Limite seja explorado no início do curso, seja de modo intuitivo, utilitário ou operacional, mas não ter ligação com novas definições, como Derivada e Integral, e nessa perspectiva o ensino de Limite torna-se desnecessário (BARROSO *et al.*, 2009). É possível escolher uma abordagem de ensino em que o Limite não seja dispensável, pois os conceitos podem ter como base os Infinitésimos, e mais adiante, no curso de Análise, se faça a opção pela Análise não Standard. Mas caso essa não seja a opção adotada pelo professor, os conceitos de Continuidade, Derivadas e Integrais devem se relacionar com os Limites.

Rezende (2003) argumenta que independente da escolha de abordagem, os conceitos devem ser introduzidos de forma intuitiva em um curso inicial de Cálculo. Ou seja, a noção formal de Limite, seguindo a teoria weierstrassiana de épsilons (ϵ) e deltas (δ), ou a construção rigorosa de Infinitésimo elaborada por Robinson, não devem ser elementos construtores de conceitos nessa etapa do ensino. Outro problema relacionado à aprendizagem de Limites é a prevalência da técnica sobre o significado, como explica o autor:

[...] as dificuldades de aprendizagem relacionadas a operação de limite estão associadas muito mais às suas dificuldades em manipulações algébricas (fatoração de polinômios, relações trigonométricas, simplificações algébricas, “produtos notáveis”, etc.) do que à sua interpretação analítica. Assim, no contexto do ensino de Cálculo, pode-se dizer que a noção de limite de funções está mais caracterizada, portanto, como uma operação algébrica do que com uma operação analítica. Essa “algebrização exacerbada da operação de limite caracteriza bem o que queremos dizer com a “prevalência da técnica sobre o significado.” (REZENDE, 2003, p. 13).

Não apenas a abordagem escolhida influencia o ensino, como o modo de conduzi-lo, o que mostra o quanto é importante que o professor conheça o público com que vai trabalhar, podendo adequar o ensino para favorecer a aprendizagem de seus estudantes.

De um modo geral, e não apenas no Brasil, a história do ensino de Cálculo apresentou conflitos e controvérsias, resultantes de métodos que pretendem melhorar a aprendizagem dos alunos

(CODE *et al.*, 2014). Surgiram algumas propostas de adequação no ensino dessa disciplina, como o *Calculus Reform* nos Estados Unidos na década de 1980, que enfatizava o uso da tecnologia e a abordagem numérica, algébrica e geométrica na resolução de problemas. De acordo com Rezende (2003), ao analisar as pesquisas em Educação Matemática é possível constatar que essa reforma influenciou o ensino de Cálculo no Brasil. Na França, a reforma dos liceus no início do século XX introduziu o Cálculo Diferencial e Integral na educação básica. Foi proposto um ensino adaptado às capacidades cognitivas dos estudantes, seguindo uma proposta filosófica positivista, que era dominante na época. Com a criação dos Institutos de Pesquisa sobre o Ensino de Matemática, na década de 1980, foram propostas alterações no ensino de Cálculo, como modificar as relações entre teoria e aplicações, teorizar apenas o necessário e promover um enfoque construtivista da aprendizagem (ARTIGUE, 1995). Apesar das propostas de mudanças nos cursos de Cálculo, de forma direta ou indireta (com reformas no ensino, de modo geral) no Brasil, poucas foram as mudanças com relação às taxas de sucesso dos alunos, e o modelo de instrução não sofreu alteração, pois continua baseada em aulas, com turmas numerosas.

Para conhecer como o Cálculo tem sido ensinado nas universidades brasileiras atualmente, seria preciso uma extensa investigação sobre currículos e ementas, o que não é objetivo dessa pesquisa. Mas considerando que o trabalho do professor geralmente é guiado pelo livro didático adotado e que, como afirma Reis (2001), ainda que o professor não adote um livro e utilize suas próprias notas de aula, o que é uma prática bem comum, ele geralmente tem como base dois ou três livros didáticos. Infere-se que esse material é capaz de fornecer indícios da organização do ensino dessa disciplina. Desse modo, foram verificadas as pesquisas que analisaram livros de Cálculo, para identificar o que tem se ensinado nessa disciplina nos tempos atuais. Também foram analisados os livros indicados na bibliografia básica do curso em que se realizou a fase de intervenção da pesquisa.

Em sua pesquisa, Mateus (2007) analisou oito livros de Cálculo, sendo o mais antigo de 1981, e o mais recente publicado em 2003, escolhidos por indicação de professores, por ter grande publicidade, ser muito utilizado nas universidades brasileiras, ou por ser citado em outros estudos sobre o tema. De acordo com o autor “[...] nos livros analisados há muito mais atividades de repetição, visando a rotinização da técnica do que outro tipo de atividades [...]” (MATEUS, 2007, p. 113). Para o autor, na maioria dos livros analisados, o conteúdo é expresso através da álgebra e suas transformações, ainda que haja um esforço de combinar procedimentos algébricos com a visualização gráfica. Quanto as atividades apresentadas nos livros, as que apresentam exercícios de repetição, visando a rotinização de técnicas, foram as mais encontradas. O autor ainda classificou essas atividades em dois tipos, as que dão ênfase a tarefas de reprodução de técnicas, com ligeiras variações para outros tipos, e outro grupo que apresentam uma quantidade significativa de tarefas de interpretação e de prova. Quanto à apresentação do conteúdo, em geral segue a sequência “Definição (ou teorema) → exemplos / algumas tarefas de discussão exercícios (entre alguns de contexto).” (MATEUS, 2007, p. 175). O autor conclui que

[...] os resultados apresentam-nos fatores relacionados com a organização praxeológica dos livros didáticos que interferem diretamente no processo de ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral. Esses fatores prendem-se com a formalização precoce dos conceitos, caracterizada pelo domínio do tecnicismo em detrimento da ênfase nos conceitos e na produção de técnicas, ênfase na algebrização durante a exposição do conteúdo, debilidade na articulação entre o algébrico e

o visual-gráfico/figural. [...] Com este resultado, percebemos que algumas dificuldades do ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral estão relacionadas com a organização praxeológica dos livros didáticos. (MATEUS, 2007, p. 175).

Outro pesquisador que analisou livros didáticos de Cálculo foi Reis (2001). O autor preferiu chamar esses recursos de manuais e concluiu que eles “[...] refletem uma relação desigual e dicotômica entre rigor e intuição na apresentação dos conteúdos, ocorrendo uma primazia do primeiro elemento deste par tensional em detrimento do segundo.”, e ainda que “[...] a proposta de ensino de Cálculo apresentada pelos livros didáticos é, ainda, predominantemente formalista e procedimental.” (REIS, 2001, p. 195). O autor sugere um ensino voltado para a problematização, ressignificação e sistematização de conceitos a partir de imagens conceituais dos estudantes, e que os professores encontrem um ponto de equilíbrio entre rigor e intuição

Para a elaboração das atividades a serem desenvolvidas com os estudantes, na fase de intervenção da pesquisa, além de considerar os resultados supracitados, foram analisados os livros indicados como bibliografia básica da disciplina Cálculo I da turma investigada. Como contribuição para a compreensão do ensino da disciplina no Brasil, as apresentamos neste tópico. Conforme Projeto Pedagógico do Curso (PPC) há três indicações para a bibliografia básica a ser adotada, “Cálculo” (STEWART, 2011), “Um Curso de Cálculo” (GUIDORIZZI, 2002) e “Cálculo com Geometria Analítica” (LEITHOLD, 2002). Ambos apresentam como abordagem o ensino por Limites, e tem a sequência de conteúdos que, segundo Alvarenga, Dorr e Viera (2016, p. 47), geralmente se apresentam os livros de Cálculo. Os conteúdos são:

1. Funções reais. Limites de funções. Limites laterais e Continuidade de funções. Teorema do Valor Intermediário. Reta tangente, Derivada, regras básicas de derivação. Derivadas de funções transcendententes.
2. Derivadas de composições e inversas de funções. Derivação implícita e taxas relacionadas. Otimização. Teorema do Valor Médio. Esboço de gráficos. Regra de L'Hôpital.
3. Integral definida e propriedades. Teorema Fundamental do Cálculo. Integral indefinida. Técnicas de integração: substituição, partes, frações parciais, substituição inversa, produtos de funções trigonométricas. Aplicações da Integral ao cálculo de áreas planas, comprimento de curvas, volumes de sólidos (ALVARENGA; DORR; VIEIRA, 2016, p. 47).

As obras de Guidorizzi (2002) e Leithold (2002) se diferenciam apenas por terem um capítulo inicial sobre números reais. De acordo com a ementa que consta no PPC, a disciplina Cálculo I contempla o estudo de Funções, Continuidade, Limites e Derivadas, e Cálculo II o conteúdo Integrais.

A respeito do conteúdo Limite, conceito fundamental do Cálculo nessa abordagem, no livro de Stewart (2011) há uma introdução com problemas sobre reta tangente e velocidade instantânea, seguido da definição de Limite de uma função utilizando a ideia de aproximação. A definição formal por meio de ε e δ é apresentada após limites laterais e propriedades. O autor traz exemplos algébricos, tabelas e gráficos, e os exercícios trazem algumas atividades contextualizadas, interpretação e construção de gráficos, resolução de problemas e exercícios algébricos como calcule e determine. Ao final de cada capítulo traz exercícios de revisão com o objetivo de verificar conceitos. Guidorizzi (2002) inicia o capítulo sobre Limites com as noções intuitivas de continuidade e Limite de funções,

o Limite como coeficiente angular de uma reta e a ideia de Derivada como Limite, seguido da definição de função contínua e de Limite por meio de ε e δ . O autor apresenta uma linguagem matemática formal, trazendo as definições e exemplos algébricos com seus gráficos correspondentes, e os exercícios são voltados para operações algébricas e demonstrações. Leithold (2002) traz esse conceito por meio de um exemplo algébrico, ilustrado graficamente, e a definição formal por meio de ε e δ . Utiliza exemplos algébricos com tabelas e gráficos correspondentes, e muitos exercícios resolvidos, sendo às vezes uma situação-problema. Os exercícios propostos para os estudantes, assim como os do Guidorizzi (2002), são voltados para operações algébricas e demonstrações, mas traz alguns exercícios contextualizados e problemas.

No que diz tange às dificuldades de aprendizagem em Cálculo, destacam-se pouca habilidade com os conteúdos da matemática básica (HIEB *et al.*, 2014; NASCIMENTO, 2000; PETRILLO, 2016; SANTOS; BORGES NETO, 2005; THOMPSON; HAREL, 2021; VANDENBUSSCHE; RITTER; SCHERRER, 2018); dificuldades inerentes aos conceitos de Cálculo (MATIĆ; DAHL, 2014; NASCIMENTO, 2000; SILVA, 2011; VANDENBUSSCHE; RITTER; SCHERRER, 2018); procedimentos didáticos ou metodológicos inadequados (REZENDE, 2003; SANTOS; BORGES NETO, 2005), em especial na ênfase ao modelo de ensino tradicional (SALINAS; ALANÍS, 2009); dificuldades na transição do ensino médio para o ensino superior (MATIĆ; DAHL, 2014; NASCIMENTO, 2000); falta de motivação, pouco tempo para estudo e interação professor-aluno deficiente (SANTOS; BORGES NETO, 2005); e ainda dificuldades de natureza cognitiva ou epistemológica (REZENDE, 2003; SILVA, 2011).

Reis (2001) aponta alguns caminhos para a melhoria do ensino de Cálculo, apresentando as opiniões de alguns autores de livros didáticos dessa disciplina. Em sua pesquisa, relata que para o professor Roberto Ribeiro Baldino um bom curso de Cálculo deve se desenvolver com base no conceito de Infinitésimos, e não baseado em Limites, com excesso de rigor na apresentação dos conceitos, como se faz geralmente. Para o professor Geraldo Severo de Souza Ávila, as dificuldades em Cálculo poderiam ser minimizadas com o auxílio de monitores nas aulas, que geralmente possuem turmas com muitos alunos. Propõe ainda uma metodologia de ensino centrada na resolução de problemas. O professor Elon Lages Lima sugere a utilização de recursos, como a visualização gráfica, para dar significado e entendimento às ideias do Cálculo. O autor ainda recomenda, como possibilidade de melhoria no ensino de Cálculo, a utilização do computador para conceber e representar as ideias ou conceitos do cálculo, o trabalho coletivo de professores e utilização de projetos de ensino.

A COMPREENSÃO DO CONCEITO DE LIMITE

Como já explicitado, foi realizada uma intervenção em uma sala de aula de Cálculo, com estudantes do curso de Física de uma instituição pública de ensino superior, na modalidade de ensino remoto. No desenvolvimento da disciplina com os estudantes, iniciou-se o trabalho com uma revisão sobre Funções, por meio de atividades com o uso do GeoGebra e introdução ao conteúdo Limites. Foi solicitado aos estudantes que escrevessem, sem consultar nenhum tipo de material, o que é Limite, a fim de conhecer suas concepções prévias sobre o assunto, de modo a identificar possíveis erros conceituais e estabelecer estratégias para a aprendizagem adequada desse conteúdo. Os estudantes enviaram suas anotações por meio da plataforma Google Classroom⁶, como uma atividade. Para a análise desses registros lançou-se mão da análise do conteúdo, que de acordo com Bardin (2011)

⁶ Ferramenta gratuita desenvolvida pelo Google que auxilia o gerenciamento de atividades escolares.

é um conjunto de técnicas de análises de comunicações, com o intuito de apreender o fenômeno investigado, em uma perspectiva qualitativa.

A partir das produções dos estudantes foram identificados erros conceituais, organizados em quatro categorias: Limite como uma ferramenta, dificuldade de compreensão de funções matemáticas, dificuldade em compreender a definição de Limite e reprodução de conceitos.

- Limite como uma ferramenta.

Na história do Cálculo essa disciplina era vista como uma preparação para outra, a Análise Matemática, e de maneira equivocada alguns professores compreenderam que no Cálculo os estudantes deveriam aprender as técnicas e fazer contas, uma vez que em Análise seriam trabalhados os fundamentos da disciplina. (LIMA; SILVA, 2012). Isso fez com que se tivesse o entendimento de que em Cálculo se aprende os procedimentos, as técnicas para serem aplicadas em outras disciplinas. Esse modo de conceber o Cálculo pôde ser observado nas falas dos estudantes pesquisados, como mostra o excerto a seguir.

Limite, na matemática, é uma determinação usada para facilitar a resolução de equações, em sua maioria polinomiais, impondo um valor limite para a variável. (E5).

O estudante compreende que o conteúdo Limite, estudado em cálculo, é uma ferramenta para se resolver equações, em uma visão instrumental da matemática.

- Dificuldade de compreensão de funções matemáticas.

Uma das dificuldades no ensino de Cálculo, segundo Artigue (1995), está associada à complexidade dos objetos básicos da disciplina, como Funções, e foi possível observar essa questão ao analisar as respostas dos estudantes na atividade, como destacamos no excerto a seguir.

O conceito de Limite é usado para descrever a variação de um número, em uma determinada função. (E14).

Esse trecho mostra que o conceito de “variação” não está claro, pois um número não varia. Ao discutir a prevalência da abordagem estática sobre a dinâmica no ensino de Funções, Rezende (2003) sinaliza que um dos problemas está em identificar as quantidades variáveis envolvidas no problema a ser resolvido e a relação funcional entre elas. Thompson e Harel (2021) destacam a importância da compreensão do significado de variação, uma vez que compreender esse termo como substituição de valores não provoca uma imagem de variação contínua, necessária para a compreensão das ideias de Cálculo.

- Dificuldade em compreender a definição de Limite.

As dificuldades relativas ao ensino e aprendizagem de Limite são encontradas ao longo da história da Matemática e começam a aparecer desde a noção intuitiva e foram se agravando com a definição formal do conceito. (BARROS; MELONI, 2006). Além da dificuldade associada à complexidade dos objetos básicos da disciplina, Artigue (1995b) identifica outra, relacionada ao conceito de Limites. Ao escreverem uma definição para esse conceito, percebeu-se alguns problemas com os termos incorporados a ele, como evidenciado nos excertos seguir.

O Limite é um valor para “Y” “tender mas nunca ser”, obtido quando aproximamos “X” de um valor, mas nunca se é esse valor, apenas números próximos positivamente ou negativamente. (E7).

Limite é um valor atribuído a uma função, que se aproxima de um determinado número, mas não podendo ser o próprio número. (E8)

Esses excertos sinalizam dificuldade de compreensão dos termos “tender” e “aproxima”, uma vez que para os estudantes esse “valor” não pode ser alcançado. Esses termos “[...] entre outros, geram dificuldades no processo de aprendizagem do Cálculo.” (BARROS; MELONI, 2006, p. 1739). Para Rocha (2016) é um obstáculo epistemológico relacionado ao Limite ser ou não atingido, e do ponto de vista histórico se aproxima da definição de D’Alambert, em que a variável, em nenhuma hipótese, atinge o valor Limite.

REPRODUÇÃO DE CONCEITOS

Foram identificadas cinco respostas em que o Limite é utilizado para descrever o comportamento de uma função, semelhante à definição descrita no site da Wikipédia, que é uma enciclopédia virtual livre com conteúdo editável pelos usuários. Possivelmente esses estudantes buscaram o conceito nesse site para enviarem suas respostas. A prática de reproduzir conceitos é própria do ensino tecnicista, que está arraigado no ensino da matemática. Ainda que desde a década de 1970 se buscasse no Brasil um novo modelo de ensino, ainda hoje é possível notar características didáticas do ensino tradicional e a presença do condicionamento no processo de alfabetização matemática (TAROUÇO; SILVA; SILVA, 2016). Desse modo, o ato de reproduzir, identificado nas respostas dos estudantes, pode ser para eles um procedimento natural em matemática.

Identificados os problemas conceituais, foram planejadas atividades com a turma envolvendo metodologias ativas, que são formas de desenvolver o processo de aprender, utilizadas para conduzir a formação crítica do indivíduo, favorecendo a autonomia do estudante, despertando a curiosidade e estimulando tomadas de decisões individuais e coletivas (BORGES; ALENCAR, 2014). De acordo com Berbel (2011, p. 29) utilizam “[...] experiências reais ou simuladas, visando às condições de solucionar, com sucesso, desafios advindos das atividades essenciais da prática social, em diferentes contextos.”. As metodologias ativas foram escolhidas de acordo com os objetivos de aprendizagem, buscando a mudança metodológica como alternativa às aulas tradicionais em que predomina o formalismo matemático, a memorização e reprodução de conceitos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os primeiros conceitos de Cálculo partiram de necessidades práticas do homem e diversos personagens ao longo da história contribuíram para que se chegasse à sistematização da disciplina. Atribui-se a Cauchy o Cálculo com o caráter mais aritmético, com abordagem por Limites, e devido sua influência no campo da Matemática, seu ensino a partir do século XX seguiu essa abordagem. Já a linguagem formal em termos de épsilons e deltas de Weierstrass fez com que ele fosse considerado o pai da Análise Matemática. O rigor no ensino de Cálculo, seguindo a linha dos matemáticos supracitados, prevaleceu com o surgimento do curso de matemática no Brasil na década de 1930, modelo

que foi criticado ao longo do tempo e que resultou em diversas reformas no ensino. Tais reformas não foram suficientes para resolver os problemas de aprendizagem dessa disciplina, que apresenta altos índices de reprovação e evasão nos cursos brasileiros.

Uma proposta para a melhoria no processo de ensino e aprendizagem em Cálculo são mudanças metodológicas, como por exemplo o uso de metodologias ativas, que favorecem a aprendizagem dos estudantes e contribuem com o envolvimento dos sujeitos na realização das atividades e estimulando a sua autonomia. Com o levantamento histórico sobre o Cálculo Diferencial e Integral e seu ensino no Brasil, bem como busca por caminhos para a melhoria no ensino dessa disciplina, segundo pesquisas já realizadas, foi possível o bom planejamento de atividades de intervenção em sala de aula. Seguindo essas orientações e as metodologias ativas selecionadas, o ensino de Limites se dirigiu pela ênfase aos conceitos, por meio de resolução de problemas, mudança do quadro algébrico para o geométrico e vice-versa, com o uso do GeoGebra para plotar gráficos e do Excel para construir tabelas de valores, e o trabalho em grupos.

Destacamos que ao elaborar as atividades seguindo essa proposta, houve o cuidado em evitar que fossem abordadas em uma perspectiva prática, o que conduziu à Engenharia Didática, que orienta para um processo de ensino e aprendizagem em etapas. Inicia com a análise do sistema de ensino para que se identifique o que pode ser melhorado, seguido do planejamento específico de uma seção da sequência didática, em que se relaciona o conteúdo em estudo com as atividades a serem desenvolvidas. Essas atividades são realizadas em sala de aula e analisadas, de modo que os resultados sejam confrontados com as hipóteses definidas previamente, na etapa inicial. Esse sistema em fases conduz ao aprimoramento no processo de ensino e de aprendizagem, uma vez que o professor tem a oportunidade de avaliar continuamente o desenvolvimento de sua turma e refletir sobre sua prática, fazendo os ajustes que julgue necessários. Planejar as atividades a serem executadas, baseadas na realidade da turma, analisar e refletir sobre os resultados obtidos à luz da teoria, são os caminhos para aprimorar o processo de ensinar, de modo a favorecer a aprendizagem.

No decorrer das atividades realizadas foram identificadas algumas dificuldades na aprendizagem dos conceitos trabalhados, e selecionadas estratégias de ensino com o objetivo de saná-las. Na atividade inicial realizada na fase de experimentação, foram evidenciados erros conceituais dos estudantes sobre o conteúdo Limites, categorizados em: Limite como uma ferramenta, dificuldade de compreensão de funções matemáticas, dificuldade em compreender a definição de Limite e reprodução de conceitos. As dificuldades conceituais relacionadas às funções matemáticas e a reprodução de conceitos, também foram identificadas no decorrer das tarefas realizadas com metodologias ativas. Foram ainda identificados, no decorrer das atividades executadas, pouca habilidade com argumentações matemáticas, conflito do resultado algébrico com a interpretação da situação-problema e dificuldade em se expressar matematicamente. Essas deficiências decorrem de um ensino por reprodução e repetição, que aprecia o pensamento algebrista e pouco oferece em termos de criatividade, autonomia e desenvolvimento social do estudante. Isso reforça a necessidade de alternativas ao ensino tecnicista em matemática.

A exemplo de metodologias alternativas, citamos a aprendizagem baseada em problemas e a instrução por pares, que foram utilizadas na pesquisa, na disciplina Cálculo. A aprendizagem baseada em problemas possibilita o processo de investigação, a articulação de conhecimentos e o diálogo entre alunos e professor e aluno. A instrução por pares oportuniza ao aluno refletir sobre os resultados obtidos em uma atividade, e o estimula a buscar argumentos para suas escolhas.

REFERÊNCIAS

ALVARENGA, Karly Barbosa K. B.; DORR, R. C. Raquel Carneiro; VIEIRA, Vanda Domingos. O ensino e a aprendizagem de cálculo diferencial e integral: características e interseções no centro-oeste brasileiro. **Revista Brasileira de Ensino Superior**, Passo Fundo, v. 2, n. 4, p. 46-57, 2016. DOI: 10.18256/2447-3944/rebes.v2n4p46-57.

ARTIGUE, Michèle. La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. *In*: ARTIGUE, Michèle; DOUADY, Régine; MORENO, Luiz; GÓMES, Pedro (org.). **Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas**. San Rafael: Grupo Editorial Iberoamérica, 1995. p. 97-140.

BARDIN, Laurence. **Análise de conteúdo**. São Paulo: Edições 70, 2011.

BARROSO, Natália Maria Cordeiro; SOARES, José Marques; MOTA, João César Moura; BORGES NETO, Hermínio. Limite: definição intuitiva versus definição formal. *In*: FROTA, Maria Clara Rezende; NASSER, Lilian (org.). **Educação matemática no ensino superior: pesquisas e debates**. Recife: SBEM, 2009. p. 99-109.

BERBEL, Neusi Aparecida Navas. As metodologias ativas e a promoção da autonomia de estudantes. **Semina: Ciências Sociais e Humanas**, Londrina, v. 32, n. 1, p. 25-40, 2011. DOI: 10.5433/1679-0383.2011v32n1p25. Disponível em: <https://bit.ly/2N3EfM7>.

BEZERRA, Wescley Well Vicente. **Avaliação para aprendizagem na disciplina de Cálculo 1: percepções de discentes e docentes da Universidade de Brasília**. 2019. Tese (doutorado em Educação), Faculdade de Educação, Universidade de Brasília, Brasília, 2019.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. A filosofia da educação matemática: um enfoque fenomenológico. *In*: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (org.). **Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas**. São Paulo: UNESP, 1999. p. 21-43.

BORGES, Tiago Silva; ALENCAR, Gidélia. Metodologias ativas na promoção da formação crítica do estudante: o uso das metodologias ativas como recurso didático na formação crítica do estudante no ensino superior. **Cairu em Revista**, Salvador, v. 03, n. 4, p. 119-143, 2014.

BOYER, Carl B. **História da matemática**. São Paulo: Edgar Blucher, 1996.

CARVALHO, Tadeu Fernandes De; D'OTTAVIANO, Itala M. Loffredo. Sobre Leibniz, Newton e infinitésimos, das origens do cálculo infinitesimal aos fundamentos do cálculo diferencial paraconsistente. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 8, n. 1, p. 13-43, 2006.

CODE, Warren; PICCOLO, Costanza; KOHLER, David; MACLEAN, Mark. Teaching methods comparison in a large calculus class. **ZDM Mathematics Education**, Berlin, v. 46, p. 589-601, 2014.

EVES, Howard. **Introdução a história da matemática**. Campinas: Editora da Universidade Estadual de Campinas, 1989.

FIGUEROA, Teodora Pinheiro; ALMOULOU, Saddo Ag. Análise do tempo e dimensão epistemológica do saber: limite de uma função real. **Amazônia: Revista de Educação em Ciências e Matemáticas**, Belém, v. 14, n. 32, p. 145-159, 2018.

GODOY, Arilda Schimidt. Introdução à Pesquisa Qualitativa e suas Possibilidades. **Revista de Administração de Empresas**, São Paulo, v. 35, n. 2, p. 57-63, 1995.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um Curso de Cálculo**. Rio de Janeiro: LTC, 2002.

HIEB, Jeffrey L.; LYLE, Keith B.; RALSTON, Patricia A. S.; CHARIKER, Julia. Predicting performance in a first engineering calculus course : implications for interventions. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, London, v. 46, n. 1, p. 40-55, 2014.

JESUS, Cristiano Sílvio; LUCAS, Jucileide das Dores; MAPA, Thierrse Fany Modesto. Reflexões sobre o ensino de Cálculo Diferencial e Integral I: UFOP E IFMG-OP numa parceria pela busca da diminuição do índice de reprovação na disciplina. **Revista da Educação Matemática da UFOP**, Ouro Preto, v. 1, p. 1-5, 2011.

LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com Geometria Analítica**. São Paulo: Harbra Ltda, 2002.

LIMA, Gabriel Loureiro De; SILVA, Benedito Antônio Da. O Ensino do Cálculo na Graduação em Matemática: Considerações Baseadas No Caso da USP. *In*: ANAIS DO V SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA 2012, Petrópolis. **Anais [...]**. Petrópolis p. 1-18.

LOPEZ, Ivo F.; SEGADAS, Claudia. A disciplina Cálculo I nos cursos de Engenharia da UFRJ: sua relação com o acesso à universidade e sua importância para a conclusão do curso. **REUCP**, Petrópolis, v. 8, n. 2, p. 92-107, 2014.

MATEUS, Pedro. **Cálculo Diferencial E Integral Nos Livros Didáticos : Uma Análise Do Ponto De Vista Da Organização Praxeológica**. 2007. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT), Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade do Estado do Mato Grosso, São Paulo, 2007.

MATIĆ, Ljerka J.; DAHL, Bettina. Retention of differential and integral calculus : a case study of a university student in physical chemistry. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, London, n. October 2014, p. 37-41, 2014.

MORETTO, Vasco Pedro. **Prova: um momento privilegiado de estudo, não um acerto de contas**. Rio de Janeiro: Lamparina, 2007.

NASCIMENTO, Jorge Luiz Do. A recuperação dos pré-conceitos do cálculo. *In*: XXVIII COBENGE 2000, Ouro Preto. **Anais [...]**. Ouro Preto p. 1472-1478.

OLIVEIRA, Maria Cristina Araújo De; RAAD, Marcos Ribeiro. A existência de uma cultura escolar de reprovação no ensino de Cálculo. **Boletim do GEPEM**, Rio de Janeiro, v. 61, p. 125-137, 2012.

PETRILLO, Joseph. On flipping first-semester calculus: a case study. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, London, v. 5211, n. March, p. 1-11, 2016.

REIS, Frederico da Silva. **A tensão entre rigor e intuição no ensino de cálculo e análise**: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos. 2001. Tese (doutorado em Educação), Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2001.

REZENDE, Wanderley Moura. **O ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica**. 2003. Tese (doutorado em Educação), Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

SALINAS, Patricia; ALANÍS, Juan Antonio. Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del cálculo dentro de una institución educativa. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, Cidade do México, v. 12, n. 3, p. 355-382, 2009.

SANTOS, Raimundo Morais; BORGES NETO, Hermínio. **Avaliação do desempenho no processo de ensino-aprendizagem de cálculo diferencial e integral (o caso da UFC)**. 2005. Disponível em: <https://bit.ly/3Uf63Qg>. Acesso em: 7 dez. 2014.

SILVA, Benedito Antonio Da. Diferentes dimensões do ensino e aprendizagem do Cálculo. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 13, n. 3, p. 393-413, 2011.

SOUZA JÚNIOR, Arlindo José De. **Trabalho coletivo na Universidade: trajetória de um grupo no processo de ensinar e aprender cálculo diferencial e integral**. Campinas: Tese (doutorado em Educação), Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, 2000.

STEWART, James. **Cálculo**. 2. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

THOMPSON, Patrick W.; HAREL, Guershon. Ideas foundational to calculus learning and their links to students' difficulties. **ZDM - Mathematics Education**, Berlin, v. 53, p. 507-519, 2021.

VANDENBUSSCHE, J.; RITTER, L.; SCHERRER, C. An incentivized early remediation program in Calculus I. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, London, v. 5211, 2018.

WROBEL, Julia Schaetzle; ZEFERINO, Marcus Vinicius Casoto; CARNEIRO, Teresa Cristina Janes. Um Mapa Do Ensino De Cálculo Nos Últimos 10 Anos do COBENGE. *In*: CONGRESSO BRASILEIRO DE EDUCAÇÃO EM ENGENHARIA 2013, Gramado, RS. **Anais** [...]. Gramado, RS Disponível em: <https://bit.ly/3imsV3i>. Acesso em: 7 dez. 2014.

RECEBIDO EM: 30 maio 2022

CONCLUÍDO EM: 21 nov. 2022