

## UMA ABORDAGEM DIDÁTICO-PEDAGÓGICA DA MODELAGEM MATEMÁTICA

*A DIDACTICAL-PEDAGOGICAL APPROACH OF MATHEMATICAL MODELLING*

*UN ENFOQUE DIDÁCTICO-PEDAGÓGICO DE LA MODELACIÓN MATEMÁTICA*

LOURDES MARIA WERLE DE ALMEIDA<sup>1</sup>

### RESUMO

O objetivo do artigo é apresentar uma abordagem didático-pedagógica da modelagem matemática. O ensaio teórico proposto relativamente a essa abordagem considera como *realidade subjacente* práticas de modelagem e suas interpretações teóricas e sublinha aspectos didáticos e pedagógicos associados ao desafio do uso da modelagem na sala de aula. Os elementos abordados incluem: matematização da realidade e resolução de um problema; competências dos alunos em atividades de modelagem; um *design* para atividades de modelagem na sala de aula. A matematização da realidade e a resolução de um problema recebem uma roupagem que inclui facetas didáticas e pedagógicas. Para as competências dos alunos em modelagem são sugeridos dois eixos: competência *do fazer* modelagem e competência relativa ao conhecimento matemático e extramatemático. O *design* proposto inclui dez características de práticas de modelagem na sala de aula e complementa vários aspectos de propostas anteriores reconhecidas na literatura.

**Palavras-chave:** Modelagem Matemática. Abordagem Didático-Pedagógica. *Design*.

### ABSTRACT

*The aim of the paper is to present a didactical-pedagogical approach to mathematical modeling. The theoretical essay proposed regarding this approach considers modeling practices and their theoretical interpretations as an underlying reality and emphasizes didactic and pedagogical aspects associated with the challenge of using modeling in the classroom. The elements covered include: mathematization of reality and problem solving; students' competencies in modeling activities; a design for modeling activities in the classroom. The mathematization of reality and the resolution of a problem receive an interpretation that includes didactic and pedagogical viewpoints. For students' competencies in modeling, two axes are suggested: competence to do modeling and competence related to mathematical and extramathematical knowledge. The proposed design includes ten characteristics of classroom modeling practices and complements several aspects of previous proposals recognized in the literature.*

**Keywords:** *Mathematical Modeling. Didactical-pedagogical approach. Design.*

### RESUMEN

*El objetivo del artículo es presentar un enfoque didáctico-pedagógico de la modelación matemática. El ensayo teórico propuesto sobre este enfoque considera las prácticas de modelación y sus interpretaciones teóricas como una realidad subyacente y enfatiza los aspectos didácticos y pedagógicos asociados al desafío de utilizar la modelación en el aula. Los elementos cubiertos incluyen: matematización de la realidad y resolución de problemas; habilidades de los estudiantes en actividades de modelación; un diseño para actividades de modelación en el aula. La matematización de la realidad y la resolución de un problema reciben una apariencia que incluye facetas didácticas y pedagógicas. Para las habilidades de modelización de los estudiantes se sugieren dos ejes: competencia para modelar y competencia relacionada con el*

<sup>1</sup> Docente do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação matemática da Universidade Estadual de Londrina (UEL). E-mail: lourdes@uel.br. Orcid: <http://orcid.org/0000-0001-8952-1176>.

conocimiento matemático y extramatemático. El diseño propuesto incluye diez características de las prácticas de modelación en el aula y complementa varios aspectos de propuestas anteriores reconocidas en la literatura.

**Palabras clave:** Modelización Matemática. Enfoque Didáctico-Pedagógico. Diseño.

## INTRODUZINDO A TEMÁTICA E ESCLARECENDO O OBJETIVO

A apresentação de um número temático relativo à modelagem matemática na revista ZDM<sup>2</sup> no ano de 2006 já se refere à necessidade do que os editores (Kaiser *et al.* 2006) chamam de uma *teoria global* para a modelagem e possíveis interlocuções com o ensino e a aprendizagem. O que se pode ponderar é a importância de um movimento na pesquisa que, além de elementos ontológicos e epistemológicos, também considere elementos didáticos nesta teorização. A partir dessa época as pesquisas e as práticas relativas à modelagem têm se intensificado (Almeida, 2018; Mutti e Klüber, 2018; Villarreal e Mina, 2020; Geiger *et al.*, 2022, entre outros).

Entretanto, muitas das questões já sinalizadas em 2006 ainda perduram e vêm se repetindo no decorrer do tempo. Em Pollak (2015), por exemplo, Henry Pollak, embora seja um dos precursores do uso da modelagem matemática em contextos educacionais, ainda sugere que é preciso ter em conta se o que se pretende com a modelagem é tê-la, ela própria, como objeto ou se o que se pretende é colaborar para que os alunos aprendam matemática quando realizam atividades desse tipo.

Esta questão, todavia, já vem interessando pesquisadores e professores. Particularmente, Kaiser e Sriramam (2006) e Blum (2015), são trabalhos reconhecidos na área e que se dedicam, respectivamente, à discussão de diferentes perspectivas e de diferentes finalidades para a modelagem na sala de aula. Nesse mesmo sentido, Galbraith (2012) pondera que na sala de aula a modelagem é pautada pela relação entre estrutura e propósito do professor e caracteriza dois modos de compreendê-la: modelagem como conteúdo, que tem como propósito desenvolver habilidades de construir e utilizar modelos matemáticos; modelagem como veículo, que visa construir modelos para aprender matemática.

Quando se trata de entendimentos acerca do que é modelagem matemática, pesquisadores e professores vêm apontando nuances das diferenças entre discutir o que é modelagem e as formas com que ela pode ser realizada na sala de aula (Klüber, 2012; Galbraith, 2015; Brito, 2018). O trabalho de Galbraith (2015) chega a se referir a uma possível *falácia epistêmica*, considerando uma confusão entre proposições de natureza ontológica, relativas, portanto, à natureza da modelagem e considerações relativas ao papel e ao lugar da modelagem na sala de aula, que dizem respeito a aspectos epistemológicos acerca da modelagem. A comunidade de pesquisa da área de Modelagem Matemática, todavia, tem também procurado conectar e articular estruturas e bases teóricas para discutir o que é modelagem e como essas atividades podem atuar na sala de aula (Cai *et al.*, 2014; Ramos e Almeida, 2021; Maaß, 2010).

Se, por um lado, a teorização sobre modelagem vem desafiando e movendo pesquisadores e professores, por outro lado, a sua introdução na sala de aula, embora aconteça ainda a passos lentos, como sugerem Mutti e Klüber, (2018) e Burkhardt (2018), tem sua importância reconhecida.

De fato, Burkhardt (2018), por exemplo, sugere que em suas pesquisas tem confirmado que:

A importância da modelagem matemática no currículo escolar é claramente reconhecida. Ela (a modelagem) tanto mostra a ampla aplicabilidade da matemática quanto favorece a aprendizagem dos alunos mediante investigação. Seu uso na sala

de aula serve como um poderoso *corretivo* para aqueles que veem a matemática como um conjunto de conceitos e regras isoladas a serem ensinadas e aprendidas (BURKHARDT, 2018, p. 74).

Considerando o que se firma nos parágrafos anteriores e essa importância referida por Burkhardt, o objetivo do presente artigo é fazer uma abordagem da modelagem matemática caracterizada como *didático-pedagógica*. Essa abordagem se dá consoante ao *fenômeno educativo* quando atividades de modelagem são pensadas, estruturadas e introduzidas na sala de aula.

A inspiração para problematizar a modelagem com a adjetivação *didático-pedagógica*, em parte vem do pensamento de Bruno D'Amore. Em D'Amore (2007) o autor apresenta uma discussão formidável e ampla no sentido de incorporar elementos distintos que o termo *didática* pode significar, indicando que tanto fixar as ideias no ensino quanto ter como foco a aprendizagem são o que o autor chama de modos de ver a didática. No que diz respeito à pedagogia, já no século VIII a. C. o termo teve seu significado associado ao processo de instrução em que o professor acompanha o aluno em seu crescimento. Conforme consta em D'Amore (2007, p. 21), “nos séculos XVI e XVII, nascem exigências que chamam a Pedagogia a se ocupar da tarefa de *instruir* no interior de *instituições*.” Neste sentido, a pedagogia se debruça sobre a práxis educativa e inclui aspectos para além de um roteiro didático do professor, mas visa uma educação humanizadora e que se estende para além da sala de aula. A abordagem aqui realizada visa, assim, a articulação de diferentes elementos que fazem parte do fenômeno educativo *modelagem matemática na sala de aula*.

## **EM DIREÇÃO À MODELAGEM MATEMÁTICA: UM PASSO PARA TRÁS, MAS TAMBÉM UM PASSO ALÉM!**

Para adentrar à modelagem é lançado luz sobre uma ideia que, do ponto de vista do que se pode entender por modelagem matemática na sala de aula, é anterior à própria modelagem: a matematização.

A *matematização da realidade*, reconhecida em diferentes áreas do conhecimento, já foi objeto do pensamento de filósofos pré-socráticos. Pitágoras (570 a.C.- 497 a.C.), por exemplo, dizia que o número é a essência das coisas e, foram justamente os números seu principal elemento de estudo e reflexão. Galileu Galilei (1564-1642), afirmou que as leis da natureza são matemáticas de modo que o universo está escrito em linguagem matemática e sem visualizá-la se vagueia em um labirinto escuro na busca pela compreensão dos fenômenos. Parece se alinhar a esse pensamento de Galileu uma assertiva recente de Jablonka e Gellert (2007) em que sugerem que a matematização se refere a um processo em que a algo se associa mais matemática do que havia lhe sido associado até então.

Edmund Husserl (1859-1938), matemático e filósofo alemão, refere-se a diferentes níveis para a matematização da realidade e, em Husserl (2012), caracteriza-a como a possibilidade de mensuração de qualidades sensíveis dos objetos que requer assumir uma hipótese de causalidade, ou seja, pressupor relações causais entre as qualidades objetivas ligadas a ocorrência no mundo e as qualidades sensíveis dos objetos como, por exemplo, som, cor, odor, tamanho. Em Brito (2018), esse nível de matematização é ilustrado pelo exemplo:

A medida da temperatura dos corpos, realizada com um termômetro de mercúrio, pressupõe uma relação causal entre a intensidade da temperatura e a dilatação do mercúrio. Essa dilatação é uma qualidade objetiva, é uma dimensão espaço-temporal da coluna de mercúrio. Já a temperatura é uma qualidade sensível, sem dimensão

espaço-temporal. Vincular a temperatura à dilatação do mercúrio é um modo de matematizá-la de forma indireta (BRITO, 2018, p. 199).

Segundo Husserl (2012), essa matematização do mundo produz fórmulas que exprimem conexões causais, leis de dependências reais, por meio de dependências expressas por símbolos matemáticos.

Quando a matematização passa a ser vista pelas lentes da Educação Matemática, podemos dar um passo além: o ensino e a aprendizagem podem se vincular à matematização. Para o educador Hans Freudenthal, muito do que se faz em matemática significa matematizar a realidade e o ensino da matemática pode ser mediado por essa matematização. O que este educador preconiza é que “O que os humanos têm que aprender não é a matemática como um sistema fechado, mas sim como uma atividade, o processo de matematizar a realidade” (Freudenthal, 1968, p. 7).

Blum (2002, p. 151), de uma forma muito direta, associa o aprender matemática com a matematização, afirmando: “Aprender matemática é essencial e esta aprendizagem pode ser mediada pela interlocução de situações da realidade com a matemática”. Esta interlocução, entretanto, é mediada pela matematização.

Considerando as prerrogativas de que a matematização da realidade é um modo de entender a realidade e as reflexões de Freudenthal e de Blum de que, na sala de aula, entender a realidade é um meio de entender matemática, de aprender matemática, é possível reconhecer na modelagem um potencial para matematizar na sala de aula.

## EM DIREÇÃO A UMA ABORDAGEM DIDÁTICO-PEDAGÓGICA

Deliberar sobre modelagem matemática por um lado, pode se remeter a um conjunto de teorizações expressas por meio de conceitos, explicações, relatos, perguntas, *coisas* que habitam na linguagem. Mas, por outro lado, a modelagem matemática também é um fazer que, neste caso, não se dá exclusivamente na linguagem, mas pode se expressar em *coisas* tangíveis ou observáveis que podem ser vivenciadas pela experiência (Brito, 2018). Esse domínio do fazer se conecta com o domínio das teorizações. Galbraith (2015) sugere que o domínio do fazer constitui o que chama de *realidade subjacente*<sup>3</sup> às teorizações. Ou seja, conforme pontuam Barquero e Jessen (2020), as teorizações, que fomentam modelos epistemológicos distintos, decorrem do fazer, que é observável, mas também afetam este fazer e assim criam-se novos problemas de pesquisa para propor novas teorias.

Mas o que se pode dizer da *realidade subjacente* às teorizações sobre modelagem matemática? Ou seja, o que se pode dizer do domínio da práxis e sua relação com as teorizações? Para o que se propõe o presente artigo, vale considerar três modos de ver uma *realidade subjacente*, já sinalizados em Brito (2018).

Um primeiro modo de ver se segue de considerações da seção anterior relativas à reconhecida possibilidade de matematizar situações da realidade. Galbraith (2015) afirma que a *realidade subjacente* ao que se pode teorizar sobre a modelagem, decorre dessa possibilidade: “no nosso mundo existem coisas que geram problemas e alguns desses problemas podem ser abordados de forma

---

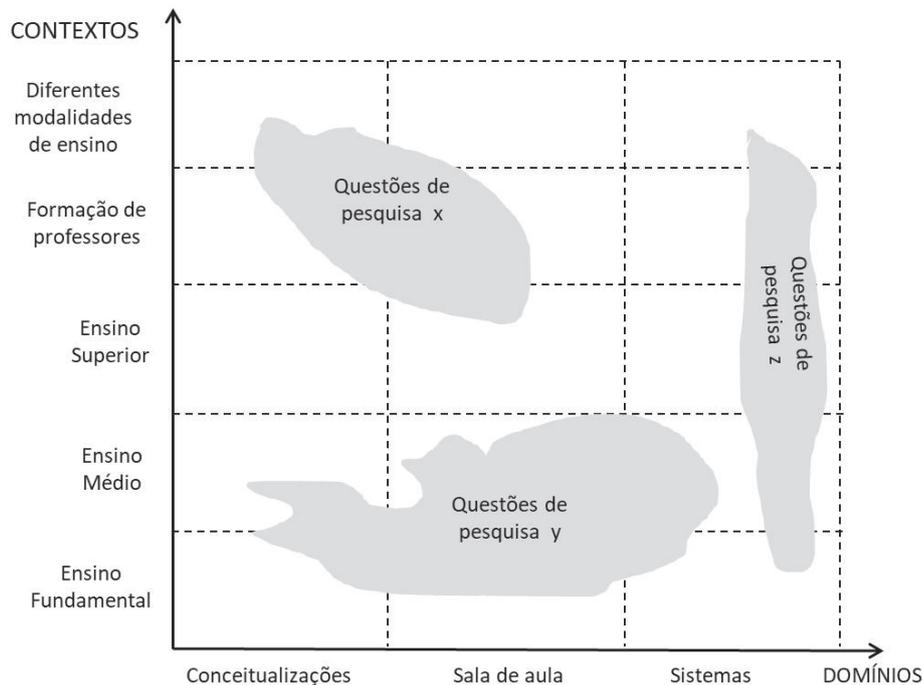
<sup>3</sup> A *realidade subjacente* consiste neste contexto à parte observável da modelagem matemática e que fornece elementos para construir teorias ao mesmo tempo em que se modifica a partir dessas teorias.

produtiva por meio da matemática”. O autor continua: “existe uma pressuposição de que os indivíduos podem ser ajudados a se tornar melhores nesta atividade mediante uma ação educacional” (Galbraith, 2015, p. 341). À primeira parte da assertiva de Galbraith se associam diferentes caracterizações de modelagem matemática presentes na literatura, como por exemplo: “modelagem matemática é a arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos” (Bassanezi, 2002, p. 26); “modelagem matemática se refere à obtenção de uma solução para um problema identificado em uma situação da realidade e inclui a construção e validação de um modelo matemático” (Almeida, 2018, p. 20). A segunda parte se dirige a aspectos da modelagem na sala de aula, e parece estar repercutida em diferentes asserções relativas à modelagem: “modelagem matemática é uma alternativa pedagógica para o ensino de matemática por meio de situações-problema não matemáticas” (Almeida e Brito, 2005, p. 19); “pode a modelagem matemática ser ensinada e aprendida? (Blum, 2009, p. 1). Ou seja, a *realidade subjacente* inclui o que se diz que a modelagem é, bem como o que se pode dizer dela na sala de aula.

Um segundo modo de ver a *realidade subjacente* às teorizações em modelagem é aquele mencionado em Sriramam e English (2005) que se referem a uma abordagem sistêmica. Para esses autores, quando se procura falar sobre como os alunos se envolvem em situações em que um problema da realidade é resolvido mediante o uso da matemática, podem se caracterizar o que denominam de três *sistemas complexos*: (a) sistemas da vida real que incluem a investigação de situações do cotidiano (b) sistemas conceituais que as pessoas criam para modelar ou dar sentido a sistemas da vida real usando matemática; (c) esquemas que pesquisadores desenvolvem para descrever e explicar competências de modelagem. Esses três tipos de sistemas incluem as inúmeras razões pelas quais pesquisadores tentam avançar em relação à modelagem matemática e sua introdução na sala de aula.

Finalmente, a *realidade subjacente* às teorizações em modelagem se associa a características distintas que a prática pode ter em função de um contexto e de um domínio de interesse particular. Neste caso, parece se identificar o que consta em D’Amore (2007, p. 60): “se quiseres proceder, construa uma teoria”. Ou seja, as práticas complementam-se teorias ou criam-se teorias. Essa relação intrínseca entre teoria e prática no caso da modelagem está indicada, por exemplo, no trabalho de Niss *et al.* (2007). A *realidade subjacente* às teorizações são práticas de modelagem que, segundo esses autores, podem ser visualizadas como regiões de um plano de eixos coordenados. Em um dos eixos estão: conceitualizações já reconhecidas e que incluem concepções e crenças acerca da modelagem; a sala de aula como espaço das práticas vigentes; e o ambiente educacional que inclui a estrutura curricular, as instituições, os fatores políticos sociais e econômicos com que a implementação da modelagem na sala de aula pode ter vínculos, caracterizados em Niss *et al.* 2007 como *sistema*. No outro eixo está o que vou chamar de *contextos* e inclui os diferentes níveis de escolaridade e também, como se pode considerar atualmente, as diferentes modalidades de ensino. Na figura 1 está um esquema de possibilidades para a *realidade subjacente* às teorizações em modelagem.

**Figura 1** - Possibilidades para a *realidade subjacente* às teorizações em modelagem.



Fonte: Adaptado de Niss *et al.* (2007).

Considerando esses três modos de ver é preciso ponderar que, o que se pode teorizar a partir dessas realidades é sempre visto sob uma lente epistemológica e delimitado por pressupostos e concepções particulares. No presente artigo, o que se tem interesse em incluir na denominada *abordagem didático-pedagógica* da modelagem matemática se localiza numa região em que interessam problemas e proposições que são caracterizados por D'Amore (2007) como *questões didáticas*. Assim, o foco é uma dimensão didática de *realidades subjacentes* às discussões teóricas sobre modelagem matemática. Com esta intenção a abordagem inclui três elementos considerados fundamentais para a modelagem na sala de aula: matematização da realidade e resolução de um problema; competências dos alunos em atividades de modelagem matemática; possibilidade de um *design* para atividades de modelagem na sala de aula. Na sequência cada um desses elementos é explorado.

## **MODELAGEM MATEMÁTICA: MATEMATIZAÇÃO DA REALIDADE E RESOLUÇÃO DE UM PROBLEMA SÃO ESSENCIAIS**

A matematização da realidade já ocupa um espaço nas discussões relativas à matemática bem como naquelas relativas ao seu ensino e a sua aprendizagem. No que se refere à modelagem, em particular, o estudo de Burkhardt (2018), ao apresentar um panorama de como a modelagem tem sido realizada na sala de aula, destaca que, embora diferentes encaminhamentos para estas atividades tenham sido sugeridos e realizados a partir da década de 1960, todos eles incluem um processo investigativo que implica em associar matemática a situações mediante uma matematização, explicitando interlocuções entre matemática e realidade na sala de aula. Estas interlocuções

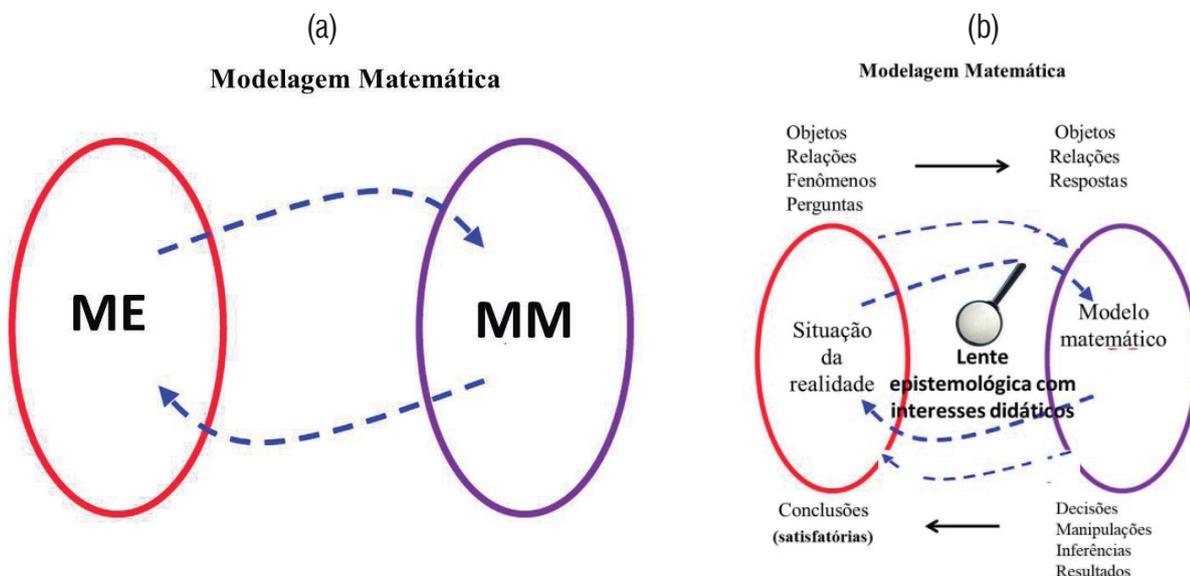
podem ser teorizadas na modelagem matemática mediante esquemas reconhecidos como *ciclos de modelagem matemática*.

Estes ciclos, incluindo a matematização, parecem úteis como um modelo de referência epistemológica para indicar os procedimentos associados ao desenvolvimento de uma atividade de modelagem na sala de aula. Os primeiros exemplares de ciclos de modelagem matemática, como é o caso daquele reapresentado em Niss *et al.* (2007) (Figura 2a), tinham a intenção de ilustrar que o *mundo extramatemático* (ME) e o *mundo matemático* (MM) eram postos em diálogo em atividades de modelagem matemática mediante uma conversão e uma reconversão.

Mas uma lente epistemológica com interesses didáticos e pedagógicos vem ampliar o olhar sobre a conversão e a reconversão e passa a considerar uma situação da realidade que pode ser estudada ou compreendida por resultados obtidos com um modelo matemático (Figura 2b). A situação da realidade<sup>4</sup> (do *mundo extramatemático*) então é explorada e depois interpretada por um modelo matemático construído no *mundo matemático*.

Uma abordagem didático-pedagógica traz o foco para ciclos de modelagem em que os procedimentos dos alunos para matematizar uma situação e resolver um problema são associados a etapas (ou fases) de uma atividade de modelagem e têm relação com o que os alunos podem aprender em atividades desse tipo. Neste caso, iniciando com uma situação-problema da realidade, as etapas associadas ao que Niss *et al.* (2007) denominam de conversão são especificadas no ciclo com a finalidade de indicar que alunos ou professores, durante atividades de modelagem, procedem conforme orienta este ciclo (Figura 3). Um ciclo de modelagem é, nesta abordagem, uma ferramenta relevante para explicitar como a modelagem pode se dar na sala de aula. Assim, a clareza relativa aos fazeres em cada etapa pode ser esclarecedora para alunos e professores e, além disso, ciclos com menos etapas (ou fases) especificadas podem ser mais úteis para os alunos entenderem o processo de modelagem.

**Figura 2** - Primeiro esquema para um ciclo de modelagem.



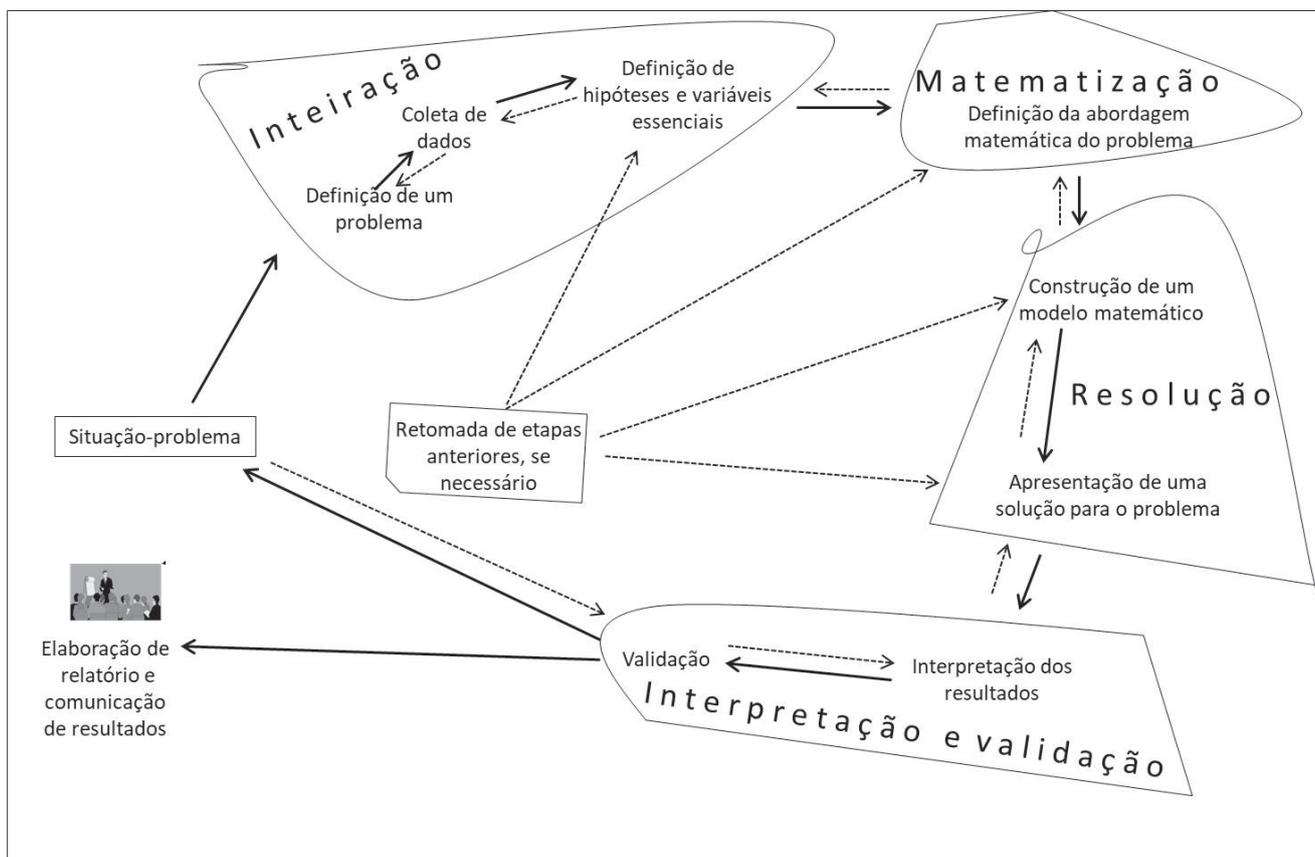
Fonte: Construído com base em Niss *et al.* (2007)

Fonte: Construído pelos autores

<sup>4</sup> Não está no escopo do presente artigo uma discussão (filosófica) sobre realidade e mundo extramatemático. O entendimento considerado é como especifica o ciclo proposto por Niss *et al.* (2007).

No ciclo que apresentamos (Figura 3) se identificam quatro fases (inteiração, matematização, resolução, interpretação e validação). Além disso, é fundamental a produção de um relatório em que se apresentam encaminhamentos e resultados bem como uma argumentação em defesa da abordagem matemática realizada. As linhas pontilhadas no ciclo são usadas para indicar o movimento de idas e vindas (o duplo sentido) que as ações dos modeladores podem requerer, inferindo à modelagem uma dinâmica ao invés de uma linearidade entre as diferentes fases. Ou seja, essas setas visam apontar para o refinamento iterativo do modelo e da solução em atividades de modelagem matemática de uma situação da realidade.

**Figura 3 - Um ciclo de modelagem matemática.**



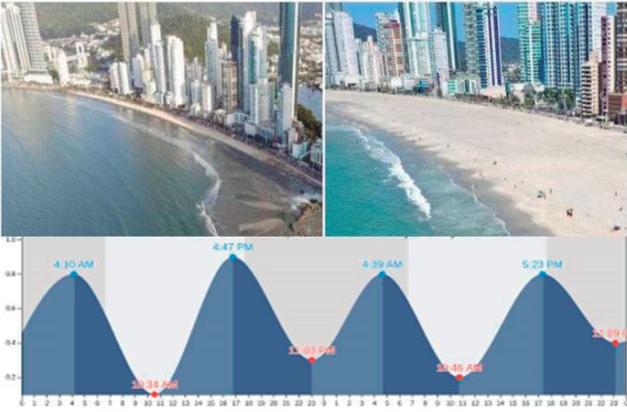
Fonte: Almeida, Castro e Silva (2021).

O itinerário das discussões relativas a esta estrutura cíclica conferida às atividades de modelagem inclui diferentes lentes teóricas e metodológicas. O trabalho de Almeida e Silva (2020), por exemplo, problematiza o uso de setas de duplo sentido em ciclos de modelagem usando estratégias heurísticas. Esta lente possibilita trazer para as discussões no âmbito da área de Modelagem Matemática um olhar que associa estratégias heurísticas dos alunos aos sentidos das setas que ligam as diferentes etapas. A dinâmica vislumbrada nos ciclos pode, entretanto, se dar de forma singular para diferentes modeladores (alunos ou professores), caracterizando o que Ferri (2018) define como *rotas de modelagem* de alunos envolvidos em atividades desse tipo.

Pesquisas empíricas indicam também que a dinâmica do movimento requerida nas diferentes fases de um ciclo de modelagem pode ser uma tarefa complexa para os alunos (Blum, 2015, Greefrath, *et al.* 2022) e impor-lhe desafios e inclusive barreiras cognitivas. O estímulo ao uso de estratégias metacognitivas pode então ser um caminho para ultrapassar essas barreiras (Almeida e Castro, 2021).

Consideramos, como exemplo, uma situação investigada por alunos do quarto ano de um curso de Licenciatura em Matemática: o alargamento da praia na cidade de Camboriú<sup>5</sup>. Como a execução das obras de alargamento pode ser otimizada considerando a altura da maré? Foi este o problema que os alunos se propuseram a estudar. Neste caso, a matematização da situação foi inspirada, de modo particular, pelas informações da altura da maré nessa cidade no decorrer do dia. Considerando o que conheciam de matemática e as informações que usaram, a matematização levou a hipóteses e, com procedimentos como os indicados no ciclo de modelagem, os alunos construíram um modelo matemático e uma solução para o problema (Figura 4).

**Figura 4** - O alargamento da praia na cidade de Camboriú.

<p>A situação da realidade</p> <p>O movimento das marés e o alargamento da faixa de areia na cidade Camboriú</p>  <p>Inteiração (visa entender a situação)</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>-Pesquisas sobre a situação;</li> <li>-Coleta de informações</li> <li>-O problema: Como organizar os trabalhos dos operários na execução da obra de alargamento da faixa de areia considerando a variação da maré?</li> </ul> <p>Matematização: A altura da maré é um fenômeno periódico; uma função periódica pode ser usada.</p> <p>Resolução (visa usar matemática)</p> <p>O modelo matemático obtido (<math>f</math> é a altura da onda e <math>x</math> o horário)</p> $f(x) = \begin{cases} 0,512 + 0,137\text{sen}(\pi x - \frac{3\pi}{2}) & \text{para } 1 \leq x < 5 \text{ e } 9 \leq x < 13; \\ 0,539 + 0,411\text{sen}(\pi x - \frac{3\pi}{2}) & \text{para } 5 \leq x < 9 \text{ e } 13 \leq x < 17; \end{cases}$	<p>Resultado: A otimização da execução do serviço pode ser associada ao horário de trabalho dos operários. Este horário deve ser distinto considerando as diferentes fases da lua.</p> <p>Interpretação e validação (visa explicar e validar resultados)</p> <p>As obras diretamente relacionadas à região atingida pela água podem ser intensificadas em alguns horários do dia os quais são determinados usando o modelo. Isso pode otimizar o tempo de execução da obra.</p> <p>Validação: As câmeras instaladas no local da obra e disponíveis no site de descrição da obra, permitem observar que os horários de trabalho na parte dentro e próxima da água obedecem restrições impostas pela altura da maré.</p> <p>Para finalizar</p> <p>Produção de um relatório pelos alunos e comunicação.</p>
--	--

Fonte: produzido pelos autores

<sup>5</sup> Camboriú é uma cidade praiana do estado de Santa Catarina, localizado na região sul da costa brasileira.

## COMPETÊNCIAS DOS ALUNOS EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA: UM NOVO OLHAR

Refletir sobre finalidades do uso da modelagem na sala de aula é relevante quando se trata de uma abordagem didático-pedagógica. Um dos focos dessa reflexão, e sobre o qual se pretende lançar luz, diz respeito às competências dos alunos.

Caracterizar competências de modelagem e investigar como se desenvolvem tem sido uma temática recorrente nas últimas décadas. Schukajlow *et al.* (2018), todavia, apresentam um estudo em que se referem a uma lacuna na pesquisa relativamente aos aspectos metodológicos e os instrumentos usados para avaliar ou mensurar competências de modelagem.

Alguns elementos dessa lacuna foram abordados na edição temática da revista *Educational Studies in Mathematics* publicada em 2022 e dedicada ao tema das competências em modelagem. Neste contexto, um levantamento das pesquisas realizado por Cevikbas *et al.* (2022) sinaliza que a maior parte delas têm em comum um entendimento de modelagem como atividade cíclica e o ciclo de modelagem passa a ser o balizador das competências dos alunos, medidas, muitas vezes também por subcompetências relativas às ações dos alunos em cada etapa (ou fase) desse ciclo.

O olhar para ciclos de modelagem produzidos nas pesquisas empíricas vem sendo uma *realidade subjacente* às teorizações sobre competências em modelagem e tem se mostrado profícuo para teorizar sobre elas em uma perspectiva cognitivista (Ferri, 2018; Niss & Blum, 2020). Ferri (2018) sugere que ciclos que caracterizam menos etapas (ou fases) são particularmente úteis para que os alunos aprendam a fazer modelagem matemática, enquanto ciclos mais detalhados e identificando ações cognitivas dos alunos (como é o caso, por exemplo, do ciclo mostrado em Ferri (2018)), são eficientes para os professores e, de modo especial, quando estes se dirigem à identificação ou a avaliação de competências de modelagem dos alunos.

Em consonância com o que apontam Fredj e Vos (2021), é possível afirmar que as teorizações sobre competências, ainda que baseadas em ciclos de modelagem, precisam ir para além da dimensão cognitiva e incluir outros aspectos tais como a criatividade e as estratégias metacognitivas dos alunos no desenvolvimento das atividades, visando identificar como ultrapassam barreiras cognitivas ou como formulam hipóteses, por exemplo, como é o caso da pesquisa de Almeida, Sousa e Tortola (2021).

Por outro lado, modelagem matemática sempre envolve matemática, realidade e a interlocução entre elas, embora nem sempre essa *separação* esteja explícita no ciclo, como está, por exemplo, na Figura 2a. Estes dois *mundos* a que se referem Niss *et al.* (2007), diferem em termos de normas e convenções socioculturais, e isso pode ser reconhecido na teorização das competências de modelagem. Bloqueios socioculturais podem ser mais dificilmente superados em contextos de aprendizagem, como é o caso do desenvolvimento de uma atividade de modelagem, do que bloqueios cognitivos, de modo geral, individuais (Fredj e Vos, 2021).

A abordagem aqui empreendida visa elucidar a importância de um interesse em considerar de forma mais aprofundada as diferenças entre esses *mundos*, mas também propõe que a qualidade da interlocução procurada é um aspecto importante para teorizar sobre competências dos alunos. Assim, o olhar para as competências dos alunos em modelagem na sala de aula aqui apresentado considera dois eixos para essas competências: (a) competência relativa ao *fazer modelagem matemática* que diz respeito à qualidade e a eficiência do aluno para falar da interlocução entre matemática e realidade; (b) competência relativa ao conhecimento matemático (ao mundo matemático) e conhecimento relativo à situação da realidade (ao mundo extramatemático).

O primeiro eixo - competência relativa ao *fazer modelagem matemática* - tem como *realidade subjacente* diferentes teorizações sobre as ações requeridas para uma atividade de modelagem (pontuadas nas seções anteriores nos ciclos de modelagem) visando à obtenção de uma solução para um problema identificado em uma situação da realidade. Neste sentido, a capacidade do aluno de ocupar-se de todas essas ações de uma forma holística é o que caracteriza a competência relativa ao *fazer modelagem matemática*. Particularmente importantes para a definição desse eixo das competências em modelagem, são múltiplas vozes indicadas na literatura.

A primeira voz diz respeito à assertiva de Galbraith (2015) de que existe a crença de que os indivíduos podem ser ajudados a se tornar melhores nesta atividade de fazer modelagem matemática mediante uma ação educacional. Ou seja, o aluno é capaz de se tornar cada vez mais competente em fazer modelagem. A segunda referência é o artigo de Blum e Ferri (2009), com o título *Pode a modelagem matemática ser ensinada e aprendida?*<sup>6</sup>. A pergunta, embora seja retórica, pois qualquer objeto cultural, sob certas condições, pode ser aprendido e ensinado, ainda que a aprendizagem tenha características particulares sob estas condições, traz um entendimento de que alguém pode se tornar competente em fazer modelagem mediante ações de ensino desse *fazer*.

Por último, é importante o resultado do estudo de Almeida (2018) que, a partir de um quadro teórico e de uma pesquisa empírica, conclui que a competência de fazer modelagem matemática tem relação com uma *antecipação*<sup>7</sup> relativa ao *fazer* modelagem matemática. A antecipação, nesse contexto, caracteriza-se como um processo (metacognitivo) mediante o qual o modelador passa a ter um olhar prospectivo sobre o seu *fazer*, identificando o que lhe vai ser útil ou necessário em um momento posterior do desenvolvimento da atividade. Em sua pesquisa, a autora concluiu que, para além de uma antecipação de processos ou conceitos matemáticos, como apontou Niss (2010), o êxito em uma atividade de modelagem tem relação também com a capacidade de um modelador de *antecipar* estratégias e procedimentos de resolução que vão indicando o caminho a seguir. A pesquisa empírica realizada com alunos do primeiro ano e do quarto ano de um curso de licenciatura em matemática indicou que a familiarização dos alunos do quarto ano com a modelagem matemática favoreceu em vários aspectos a modelagem realizada. Seja do ponto de vista do uso da matemática, seja do ponto de vista da observância de etapas de um ciclo de modelagem, os alunos com experiência anterior em modelagem obtiveram modelos matemáticos mais robustos e os analisaram de forma mais eficiente.

Neste sentido, considerar o eixo da competência *fazer modelagem matemática* é relevante para deliberar sobre competências de modelagem dos alunos. A identificação dessa competência requer acompanhar todo o plano de trabalho dos alunos visando reconhecer como entendem a situação-problema, como a matematizam, como constroem e usam o modelo, como interpretam os resultados e os validam e por fim, analisar seus argumentos e meios usados para apresentar seus resultados. A análise dessa competência, para além de considerar a observância de etapas de um ciclo, implica em buscar nas ações e nos registros dos alunos, indícios da qualidade da interlocução entre matemática e realidade no sentido de incorporar elementos essenciais da situação da realidade e usar uma matemática que é capaz de proporcionar a produção de uma resposta aceitável. Analisar como os alunos realizam o que Meyer (2020) chama de *leitura do mundo*, e observar como eles lidam com a questão de que “a modelagem matemática é eficiente a partir do momento que nos

6 Tradução do título do artigo: Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt?

7 O termo antecipação, indicando que alunos vão aprendendo modelagem e com modelagem na medida em que já possuem ou usam algum conhecimento anterior, vem sendo usado em pesquisas na área (p. e. Niss, 2010; Almeida, 2018; Geiger *et al.* 2022).

conscientizamos de que estamos sempre trabalhando com aproximações da realidade” (BASSANEZI, 2002, p. 24) também se inclui nesse eixo de competências.

O segundo eixo, *competência relativa ao conhecimento matemático e ao conhecimento extramatemático ativados na atividade*, se ancora em teorizações relativas às possibilidades de aprendizagem<sup>8</sup> da matemática e também de interpretação de situações da realidade mediante atividades de modelagem matemática.

Uma dessas teorizações refere-se ao trabalho de Galbraith (2012). Reconhecer na modelagem um *veículo* para abordar temas e conceitos específicos do currículo de matemática em diferentes níveis de escolaridade é um indicativo de que se pode falar de competência relativamente aos conteúdos matemáticos que emergem em atividades de modelagem.

Uma segunda voz é um trabalho de Blum (2015). O autor propõe quatro finalidades para a modelagem matemática na sala de aula: formativa, psicológica, cultural e pragmática. A especificação dessas finalidades indica que nas três primeiras, situações da realidade servem como suporte para aprender matemática, enquanto na última, a matemática serve como meio para entender essas situações. O que é relevante ter em conta é que em ambas essas finalidades, um aspecto para falar em competência, seja em relação ao conhecimento matemático, seja em relação à interpretação da realidade, diz respeito à autenticidade. Neste contexto a pesquisa de Omodei (2021), se valendo de pressupostos teóricos e considerando uma pesquisa empírica, propõe que é possível caracterizar níveis de autenticidade com que modeladores tratam de uma situação da realidade na sala de aula e define atributos que qualificam a autenticidade em cada atividade de modelagem.

Uma terceira *realidade subjacente* à abordagem aqui realizada é uma pesquisa relatada em Brito e Almeida (2021). A pesquisa indica seis dimensões para a aprendizagem da geometria em atividades de modelagem matemática. Neste caso, os alunos podem se tornar competentes matematicamente considerando seis habilidades desenvolvidas a partir de atividades de modelagem: a medição, a tomada de decisão, a reprodução, a predição, a explicação e a manipulação.

Finalmente, uma *realidade subjacente* é uma teorização proposta em Gravemeijer (2007) com a denominação *modelagem emergente*. Para o autor, *emergente* refere-se tanto à natureza do processo pelo qual modelos matemáticos *emergem* das ações dos alunos, quanto ao processo pelo qual esses modelos são base para conhecimentos matemáticos que, após o desenvolvimento da atividade de modelagem, não mais dependem do modelo matemático no qual emergiram, mas podem ser acionados em outras instâncias ou em outras atividades de modelagem.

Por fim, considerar estes dois eixos é uma possibilidade de olhar para competências dos alunos em atividades de modelagem de uma forma holística, olhando para as ações dos alunos nas diferentes etapas de uma forma global bem como identificando como se articulam para a produção de uma resposta para o problema.

Um exemplo em que competências dos alunos considerando estes dois eixos foram identificadas é uma atividade de modelagem desenvolvida por alunos do quarto ano do curso de licenciatura e teve como origem uma reportagem de televisão sugerindo que houve redução da produção de CO<sub>2</sub>, durante o ano de 2020 em decorrência do recesso causado pela pandemia do Covid-19. A partir de informações obtidas se confirmou que existe relação entre a concentração de CO<sub>2</sub> e a temperatura média da terra (que é crescente nos últimos 100 anos). Assim, os alunos se propuseram a estudar: como vai se comportar essa temperatura nos próximos anos? A matematização dessa situação se

<sup>8</sup> Não vou adentrar nesse artigo em abordagens teóricas para falar de aprendizagem, mas considera-la como construção de um conhecimento que provoca uma mudança de comportamento (D'Amore, 2007).

iniciou com a premissa de que as temperaturas médias no decorrer do tempo formam uma sequência limitada. A partir disso, conteúdos relativos a sequências convergentes e sequências de Cauchy, já estudados pelos alunos, formaram uma base para que um método<sup>9</sup> para determinar modelos assintóticos pudesse ser aprendido e usado para as estimativas da temperatura média da terra.

A competência dos alunos relativa ao *fazer modelagem*, ao mesmo tempo em que foi requerida para estruturar a situação, também se complementou considerando as demandas para articular e explorar dados, construir um modelo matemático e usá-lo para obter respostas. A validação talvez tenha sido um dos processos em que mais os alunos tiveram que se *tornar competentes*, considerando a articulação de informações, necessária para confirmar a razoabilidade da resposta obtida.

Já no eixo das competências matemáticas e extramatemáticas, a atividade, por um lado, trouxe para o campo das aplicações conteúdos de uma disciplina que, em geral, é considerada abstrata para os alunos: análise real. De fato, somente usando e articulando conceitos e teoremas sobre sequências reais com os dados da situação da realidade é que o método de Ford-Walford pode ser compreendido. O método, entretanto, depois da atividade, tornou-se um conhecimento não mais vinculado a essa situação, mas usado pelos alunos em outras atividades de modelagem e em outras circunstâncias do seu processo de formação, ou seja, não mais depende do modelo em que foi introduzido.

Teorizar sobre competências considerando uma abordagem didático-pedagógica da modelagem implica ter em mente que a modelagem na sala de aula tem um papel desafiador, mas também um potencial para promover o desenvolvimento de competências. Entretanto, o que ainda precisa ser explorado relativamente a essas competências, é a definição de meios para a sua identificação e mensuração na sala de aula. A pesquisa de Zanim (2021) vai justamente neste sentido, propondo um instrumento para avaliar competências dos alunos em atividades de modelagem.

## COMO FAZER MODELAGEM MATEMÁTICA NA SALA DE AULA: UMA REVISÃO E UMA PROPOSTA

Como fazer modelagem matemática na sala de aula? Essa é uma questão que vem merecendo atenção há algum tempo na área de Modelagem Matemática (Almeida, Silva e Vertuan, 2012; Barbosa, 2001; Blum, 2015; Niss e Blum, 2020; Burkhardt, 2018). As discussões sobre o *como fazer* estão refletidas em vários ensaios para tratar de um possível *design*<sup>10</sup> para atividades de modelagem.

Se por um lado as fases (ou etapas) de uma atividade de modelagem na sala de aula e as ações dos alunos em cada uma destas fases (Figura 3) são reconhecidas, por outro lado, o *design* dessas atividades no cenário educacional tem sido recorrentemente abordado, tanto no âmbito da determinação de uma prática em sala de aula, quanto entre o trabalho de pesquisadores/educadores interessados em investigar possíveis resultados e ganhos educacionais decorrentes desse *design* (por exemplo: Lesh *et al.* 2000; Maaß, 2010; Barquero e Jensen, 2020; Geiger *et al.* 2022; Tortola e Almeida, 2022).

As *realidades subjacentes* ao que teorizam esses estudos aqui referidos consideram práticas de modelagem diversificadas, incluindo diferentes níveis de escolaridade e também propondo uma *arquitetura pedagógica*, indicando ações dos professores ao incluir a modelagem em suas aulas.

A pesquisa de Maaß (2010) chega a propor uma taxonomia para atividades de modelagem, visando justificar o uso dessas atividades nas aulas. Segundo essa autora, os objetivos da introdução da modelagem nas aulas podem atuar como critérios para selecionar atividades específicas a ser

9 Método de Ford-Walford que viabiliza determinar a assintota em modelos matemáticos para situações com característica assintótica.

10 Não encontramos na língua brasileira (português) uma boa tradução para a palavra *design*. Em inglês, *design* refere-se a uma estrutura ou uma forma de algo esboçado como um esquema, ou um conjunto de características ou um plano de ação e é isso que se deseja expressar.

desenvolvidas pelos alunos. Esta perspectiva de escolher atividades considerando interesses particulares do professor é ampliada em Blum (2015). Esse autor propõe que a inclusão da modelagem seja orientada por uma perspectiva que considera o par (*finalidade (ou objetivo) da modelagem; uso de um exemplo adequado*), associando a finalidade da modelagem com as atividades escolhidas para a sala de aula, considerando as quatro finalidades já mencionadas em seção anterior.

De uma forma mais geral, Lesh *et al.* (2000) propõem seis princípios para introduzir o que eles chamam de *atividades propulsoras de modelos*<sup>11</sup>, que foram propostos a partir de uma experiência empírica com professores usando modelagem. Estes princípios, que vêm sendo considerados úteis e aplicáveis para a introdução da modelagem na sala de aula (Barquero e Jensen, 2020), consistem em: significação pessoal da atividade de modelagem para o aluno; a necessidade de construir um modelo; a avaliação do aluno em relação ao modelo e à resposta; a documentação ou externalização do modelo pelo aluno; a generalização do modelo; o modelo construído passa a ser um protótipo para situações semelhantes.

O trabalho de Geiger *et al.* (2022) por sua vez, refere-se a um *design* para atividades de modelagem visando fomentar as competências dos alunos e inclui: a natureza do problema; a relevância da situação para os alunos; a acessibilidade dos alunos relativamente à matemática usada; a viabilidade da abordagem; a viabilidade dos resultados; e a flexibilidade didática, caracterizada como a divisão do problema em subproblemas a serem resolvidos. Os elementos considerados relevantes para a prática do professor na implementação constituem a *arquitetura pedagógica*, sinalizando maneiras de agir do professor e do aluno em atividades de modelagem. A *realidade subjacente* a estes indicadores teóricos consiste em uma pesquisa empírica realizada com seis professores da educação básica juntamente com seus alunos, bem como resultados de pesquisas anteriores.

Na América Latina, e no Brasil em particular, diversas pesquisas têm apontado encaminhamentos para a condução de atividades de modelagem matemática na sala de aula (Mutti e Klüber, 2018; Villa-Ochoa *et al.* 2017; Almeida e Dias, 2007; Almeida, Silva e Vertuan, 2012, entre outros).

Relativamente à formação do professor para a modelagem na sala de aula, o estudo de Almeida e Dias (2007) sugere uma estrutura para a formação do professor que inclui três focos: o professor precisa aprender *sobre* modelagem; o professor precisa aprender *por meio* da modelagem; o professor precisa *ensinar usando* modelagem. Não há uma prescrição rigorosa de que estes focos devem seguir a ordem em que são apresentados, uma vez que ensino e aprendizagem podem não ser fases isoladas na formação do professor, e teoria e prática são interdependentes no sentido de que uma está em diálogo constante com a outra.

Se, por um lado, a formação do professor é requerida pelos desafios que atividades de modelagem na sala de aula podem propor, os alunos também requerem alguma *iniciação* à modelagem para que essas atividades possam colaborar para a aprendizagem, causar satisfação e ser relevantes para a sua formação. De fato, diferentemente de várias outras atividades desenvolvidas na sala de aula, a modelagem matemática requer dos alunos cinco ações essenciais: formular, investigar, resolver, interpretar e avaliar (ou validar). Estas ações, todavia, se dão em relação a uma situação da realidade, sendo pautadas pela possibilidade de interlocução entre realidade e matemática e por um desejo de elucidar essa interlocução.

Considerando esta especificidade de atividades de modelagem, Almeida, Silva e Vertuan (2012), propõem uma *familiarização gradativa* dos alunos com a modelagem. Esta familiarização inclui três momentos: (1) o professor sugere aos alunos uma situação da realidade, formula um problema,

11 Em inglês o termo é *Model Eliciting Activities (MEAs)*. Algumas vezes aparece traduzido como *atividades elicitoras de modelos*.

apresenta e organiza os dados dessa situação, formula com os alunos hipóteses e simplificações, faz uma matematização da situação e colabora com eles na elaboração e validação de um modelo matemático bem como da apresentação de uma resposta para o problema; (2) o professor sugere aos alunos uma situação da realidade, juntamente com os alunos formula um problema e coleta dados; os alunos então fazem seus ensaios na formulação de hipóteses, na matematização e elaboração de um modelo matemático e validação do modelo e da resposta; (3) os alunos já reúnem condições de identificar uma situação da realidade em que definem um problema, e então propõem os encaminhamentos da modelagem matemática da situação, apresentando e validando a resposta obtida.

Esta familiarização gradativa vem acompanhada da estruturação de um ciclo de modelagem pelos alunos sob orientação e colaboração do professor, visando desenvolver no aluno o olhar prospectivo relativamente ao seu fazer na atividade de modelagem e a constituição de um conhecimento-base para atividades futuras, em consonância com a antecipação já mencionada anteriormente. Além disso, a familiarização assim realizada, pode minimizar obstáculos e resistências, conforme apontam Silveira e Caldeira, (2012).

A abordagem didático-pedagógica empreendida no presente artigo visa apontar para um *design* da modelagem na sala de aula que considera, para além de características da modelagem matemática, possibilidades às quais o caráter letivo dessas atividades pode estar subordinado. Este *design* inclui 10 características fundamentais apresentadas a seguir. As duas primeiras são relativas à natureza de atividades de modelagem; as características 3 a 6 dizem respeito às ações dos alunos e incluem também o caráter didático; aquelas de 7 a 10 são relativas ao caráter pedagógico das atividades na sala de aula.

## 1. A autenticidade da situação

O entendimento de *autenticidade* aqui considerado refere-se à característica da atividade de modelagem de ser relativa a uma situação da realidade e não uma situação simulada ou em que os dados são simulados. Isso implica em se valer de situações em que os dados são reais e referentes a uma situação genuinamente real. Entretanto, conforme indica Vos (2018), a autenticidade é uma construção social, avaliada e relativizada em determinado contexto. Assim, diferentemente do que, por vezes, se pode observar na literatura, a situação não precisa, necessariamente, estar no dia-a-dia do aluno, considerando esse como o espaço físico que o circunda. Mas, também não se pode considerar problemas como os frequentemente encontrados em livros didáticos que, mesmo apresentando situações passíveis de ocorrer, os problemas estão completamente estruturados e requerem apenas a obtenção de uma resposta a uma pergunta produzida por outros.

Neste sentido, atividades de modelagem na sala de aula são pautadas em uma realidade extraescolar, mas devem atender a anseios de uma realidade escolar. Assim, a modelagem na sala de aula, tem um caráter letivo, que não é independente da prática pedagógica, para além de um caráter social, em que, por um lado, se tem interesse em estudar a situação da realidade com as suas especificidades e, por outro, estar atento à repercussão que os resultados obtidos na modelagem podem ter na interpretação da situação e para a formação do aluno.

## 2. A natureza do problema é de *problema-aberto*

*Problemas-abertos* são, segundo Alevatto (2013), problemas cujos enunciados possibilitam a realização de explorações em diferentes direções e em que o processo de resolução é aberto, de

modo que, o que se espera obter também não é previamente delimitado. Em atividades de modelagem esse tipo de problema desencadeia processos de investigação pelos alunos e inclui informações matemáticas e extramatemáticas da situação a ser investigada. Fatores específicos como o nível de escolaridade, o conhecimento dos alunos sobre a situação e, inclusive, o seu conhecimento matemático, bem como suas experiências anteriores com modelagem são fatores que influenciam o quão aberto será o problema definido. Se o professor for aquele que define o problema, ter em mente estas especificidades é fundamental para o sucesso dos alunos na atividade de modelagem uma vez que o problema precisa lhes ser acessível. Se os próprios alunos realizam essa definição, a razoabilidade do problema pode ser avaliada pelo professor.

Assim, para que aconteça o interesse dos alunos bem como seu sucesso no desenvolvimento na atividade de modelagem, o problema deve ser definido de modo que indique com clareza o que se deseja investigar, mas ainda seja um *problema-aberto*.

### 3. A matematização da situação

A partir da fase de inteiração, os alunos precisam transcender o que sabem da situação da realidade e introduzir, para a investigação da situação, uma linguagem e uma estrutura matemática, visando explicitar a interlocução entre matemática e realidade. Conforme já mencionado, pela matematização se associa à situação da realidade mais matemática do que havia lhe sido associado até então e ela é, um processo crucial se desejamos que os alunos se tornem capazes de fazer modelagem matemática (sozinhos). A caracterização da matematização implica em ter em mente que: o uso da matemática que dela decorre, deve estar ao alcance dos alunos; as hipóteses formuladas devem ser passíveis de linguagem matemática; os dados disponíveis sobre a situação devem ser suficientes.

Na atividade de modelagem apresentada em Almeida (2018), por exemplo, foi definido o problema: *Como a matemática pode ser usada para estimar o tempo de estouro da pipoca no forno microondas?* Considerando a experiência em que os dados foram coletados, foi definida a hipótese: a variação do número de grãos que se transformam em pipoca em cada instante é proporcional ao número de grãos que ainda não se transformaram em pipoca em cada instante. Como escrever essa hipótese em linguagem matemática, é o que requer um olhar prospectivo que, conforme já referido em seção anterior, vai se construindo nos modeladores a partir de sua competência em *fazer modelagem matemática*.

### 4. O uso da matemática

Atividades de modelagem com alto nível de autenticidade, em geral atendem a duas características que têm relação direta com o uso da matemática: a matemática a ser usada pode não ser previamente escolhida, mas ela emerge da matematização da situação; diferentes conteúdos matemáticos podem decorrer da matematização de uma situação. Este entendimento é compartilhado por muitos professores e pesquisadores da área de Modelagem Matemática, particularmente no Brasil (Almeida, 2018; Almeida, Silva e Vertuan, 2012; Bassanezi, 2002; Meyer, 2020; Barbosa, 2001, entre outros).

Assim, relativamente ao uso da matemática: conteúdos já conhecidos pelos alunos podem ser ativados na atividade de modelagem; ou novos conteúdos matemáticos podem ser introduzidos mediante uma atividade de modelagem, alinhando-se com o propósito da modelagem como veículo, caracterizado por Galbraith (2012). Nesta segunda possibilidade é preciso apontar que a ênfase está em promover a independência que o conhecimento construído em uma atividade de modelagem

passa a ter do modelo em que se deu essa construção, indicando que a aprendizagem pode ser fruto de ações empreendidas nessa atividade. Entretanto, apreendido o conteúdo, ele se desvincula da atividade de modelagem. É justamente esse o caso na atividade de modelagem relativa à temperatura global, apresentada em seção anterior. A atividade de modelagem proporcionou a introdução do método de Ford-Walford, até então não conhecido pelos alunos. Entretanto, o método foi usado em outras situações, desvinculado da situação em que foi apreendido. Além disso, procedimentos de sistematização de conteúdos também devem ser realizados pelo professor depois da atividade de modelagem.

A matematização da situação pode também conduzir a diferentes possibilidades de uso da matemática. O que é preciso promover então é um uso que seja apropriado para cada grupo de alunos, considerando fatores como o nível de escolaridade, o conhecimento matemático que os alunos já tem, por exemplo. Este estudo do problema usando *diferentes matemáticas* dá às atividades de modelagem uma plasticidade que viabiliza introduzi-la desde os anos escolares iniciais.

Vamos considerar a hipótese definida pelos alunos para o problema do estouro de pipocas no microondas: a variação do número de grãos que se transformam em pipoca é proporcional ao número de grãos que ainda não se transformaram em pipoca em cada instante. Neste caso, os alunos do primeiro ano do curso de licenciatura em matemática escreveram a hipótese como:  $P_n - P_{n+1} = kP_n$  em que  $P_n$  e  $P_{n+1}$  são a quantidade de grãos que ainda não se transformaram em pipoca nos instantes  $n$  e  $n+1$ , respectivamente, e  $k$  é uma constante de proporcionalidade. Já alunos do quarto deste mesmo curso escreveram essa hipótese em linguagem matemática assim:  $\frac{dP}{dt} = \alpha P$  em que  $P$  é quantidade de grãos que não estouraram no instante  $t$  e  $\alpha$  a constante de proporcionalidade. Ou seja, conteúdos matemáticos diferentes emergiram dos diferentes grupos de alunos.

Assim, relativamente ao uso da matemática em atividades de modelagem, seja de conteúdos que os alunos já conhecem, seja de conteúdos com que se deparam pela primeira vez, a atividade precisa lhes parecer possível, ser desafiadora, mas acessível do ponto de vista da matemática que são capazes de usar ou de aprender em cada estágio de sua escolaridade.

## 5. A necessidade de tomada de decisão

A natureza de *problema-aberto* promove a necessidade de tomada de decisão em diferentes fases do desenvolvimento de atividades de modelagem. Definir variáveis, formular hipóteses, interpretar resultados e validar um modelo matemático ou uma resposta são procedimentos que não estão livres de *tomada de decisão*. Neste sentido, a característica cíclica atribuída ao desenvolvimento de atividades de modelagem, encontra também respaldo na necessidade dos alunos de decidir entre opções e possibilidades em diferentes instâncias. Blum e Ferri (2009) sugerem que identificar as ações entre as fases da modelagem implica tomar decisões e aprimora a competência no fazer modelagem. Galbraith (2012) pondera que a transição entre fases identificadas na atividade de modelagem pode ser considerada uma possível fonte de bloqueio que o aluno precisa ultrapassar. Assim, os alunos precisam correr riscos para enfrentar esse bloqueio, e tomar decisões é um meio de enfretamento desse risco (Geiger *et al.* 2022).

Embora intimamente ligada à noção de desafio, a oportunidade de tomar decisões não significa necessariamente que esta ação se associa ao ciclo iterativo pensado para a modelagem matemática. De fato, a pesquisa de Kowalek (2021), por exemplo, indica que a validação, mesmo quando realizada apenas ao final do desenvolvimento de uma atividade de modelagem, tem grande demanda decisória.

Este é o caso, por exemplo, da investigação em relação ao problema: *Qual é o melhor notebook a ser comprado, considerando seu preço e seu desempenho?* Os alunos, a partir de informações do aumento de vendas de computadores associado ao teletrabalho<sup>12</sup> remoto realizado em virtude da pandemia do Covid-19, fizeram uma pesquisa sobre características de um *notebook*, como memória RAM<sup>13</sup>, espaço de memória interna (HD), processadores e preço. A construção de um índice de desempenho e sua articulação com o preço, levou os alunos a construir o modelo em que  $C_n(d_n, p_n)$  são pontos no plano cartesiano respectivos a cada um dos 10 computadores analisados;  $d_n$  é a pontuação do desempenho do computador e  $p_n$  é o do preço do computador. O valor de  $C_n$  indica a distância de cada computador em relação ao considerado *computador ideal* (aquele com maior desempenho e menor preço). Construir uma lista de classificação para os 10 computadores pesquisados, foi um processo decisório importante, considerando também um potencial comprador de cada um desses equipamentos.

Assim, pensar um *design* para uma abordagem didático-pedagógica da modelagem matemática implica em, por meio de atividades desse tipo, proporcionar aos alunos oportunidade de especular, testar ideias, argumentar e defender conjecturas. O professor deve atuar como aquele que valida os procedimentos e os resultados obtidos pelos alunos.

## 6. Comunicação de resultados e produção de um relatório

A comunicação de resultados e produção de um relatório são ações importantes, não apenas para o professor, mas também para os alunos. De fato, a elaboração de um relatório, além de funcionar como um roteiro que os alunos podem usar na fase de comunicação de sua investigação para outros alunos e para o professor, funciona como um meio para expressar os encaminhamentos, explicitando os objetivos, procedimentos e os caminhos usados para a construção de uma solução para o problema. Falando e escrevendo, os alunos revelam aspectos da atividade para além das construções matemáticas que realizaram, fazendo com eles pensem sobre o que fizeram e como o fizeram, promovendo uma autorreflexão e um pensar sobre a ação, conforme sugerem Lesh et al (2000).

## 7. O planejamento

O planejamento tem em atividades de modelagem uma grande importância. Por um lado, um plano inclui a sistematização do professor do que pretende fazer, tornando-se assim o plano um orientador de suas ações na sala de aula com atividades de modelagem conforme já se discute em Pinto e Araújo, (2020).

Embora especificidades do contexto de cada sala de aula possam levar a alterações, o planejamento inclui toda a dinâmica do trabalho docente e de colaboração e orientação de seus alunos quando realizam atividades de modelagem. Assim, não se pode desvincular o planejamento de um processo reflexivo e de tomada de decisão do professor. O que é fundamental que o professor *planeje* é uma certa antecipação do que seus alunos podem fazer e perguntar em cada atividade de modelagem. Isso lhe dá segurança para o desafio de lidar com as ideias e as ações dos alunos, que podem ser diversificadas.

<sup>12</sup> “Considera-se teletrabalho a prestação de serviços preponderantemente fora das dependências do empregador, com a utilização de tecnologias digitais.

<sup>13</sup> A memória RAM é um tipo de tecnologia que permite o acesso aos arquivos armazenados no computador. Diferentemente da memória do HD, a RAM não armazena conteúdos permanentemente.

Por outro lado, o planejamento também é importante para cada grupo de alunos. Antever o que pode ser útil em etapas posteriores é um dos benefícios que a estruturação de um plano de ação para desenvolver uma atividade de modelagem pode proporcionar. Portanto, estratégias globais e estratégias locais podem ser planejadas, visando atuar como guias para o desenvolvimento da atividade.

## 8. O trabalho em grupos

Atividades de modelagem são essencialmente colaborativas! Esta assertiva é reconhecidamente aceita por professores e pesquisadores na área de modelagem (Bassanezi, 2002; Mutti e Klüber, 2018; Almeida, Silva e Vertuan, 2012; Villa-Ochoa, *et al.* 2017; Geiger *et al.* 2022; Niss e Blum, 2020). Conforme indicam estas pesquisas, o trabalho em grupos favorece a oportunidade para os alunos desenvolverem capacidades que podem favorecer a aprendizagens tais como falar, ouvir, pensar, criar, raciocinar, comunicar e questionar.

Demandas como definir um problema, para além de apenas resolver um problema, aprender conceitos ou técnicas ainda não conhecidas, são frequentes em atividades de modelagem e que se fortalecem mediante o trabalho colaborativo que se instaura nessas atividades. Essa colaboração é mediada pelo diálogo, que nessas atividades é um meio dos alunos estruturarem suas ideias, seja em relação à definição do problema, seja em relação à pertinência das hipóteses e da matemática a ser usada para construir uma solução. Segundo Almeida, Silva e Vertuan (2012),

[...] quando os alunos trabalham juntos com o mesmo objetivo e produzem um produto ou solução final comum, têm a possibilidade de discutir os méritos das diferentes estratégias de resolver um mesmo problema e isso pode contribuir significativamente para a aprendizagem dos conceitos envolvidos. (p. 33).

Além disso, como também já se discute em Lesh *et al.* (2000), para desenvolver problemas que encorajem os alunos a basear suas soluções em extensões de seu conhecimento pessoal, as temáticas que funcionam melhor tendem a ser aquelas que se encaixam nos interesses e experiências de grupos específicos de alunos. Assim, para proporcionar que alunos mostrem sua proficiência, ou mesmo a incrementem em relação a uma determinada construção matemática ou em relação a uma certa situação da realidade, muitas vezes não é necessário que todos os alunos de uma determinada sala de aula trabalhem no mesmo problema. Problemas estruturalmente isomórficos podem ser usados para que alunos com diferentes experiências e interesses possam demonstrar suas competências em diferentes tipos de contextos (Lesh, *et al.* 2000).

## 9. A familiarização do aluno com a modelagem matemática

Como já apresentado em seção anterior, alunos sem experiências com modelagem podem não compreender meios de ação e de pensamento que essas atividades requerem e não produzir os resultados esperados. Assim, a familiarização dos alunos com a modelagem matemática seguindo os três momentos de familiarização indicados podem ser um meio de colaborar para o interesse e o êxito dos alunos em atividades de modelagem na sala de aula.

## 10. A avaliação

As discussões das últimas décadas relativas à modelagem matemática reconhecem que com a sua utilização na sala de aula, a dinâmica da aula é alterada, de modo que a avaliação também deve se alinhar a essa nova dinâmica (Almeida e Magalhães, 2022). Niss (1993) já abordou o assunto, propondo que a avaliação em modelagem deve considerar a tríade conteúdo×produto×processo em que, de forma articulada, se avaliam conteúdos matemáticos, os processos realizados pelos alunos e o resultado (produto) obtido.

A maior parte dos métodos reconhecidos para a avaliação em modelagem consideram a competência e subcompetências dos alunos em modelagem propondo abordagens holísticas ou atomísticas para essa avaliação (Almeida e Magalhães, 2022). É preciso considerar, entretanto, que nas estruturas educacionais vigentes, particularmente no Brasil, cabe ao professor a elaboração de um conceito, uma nota ou pontuação, em determinados instantes do processo formativo dos alunos, sendo a construção dessa pontuação baseada em algum instrumento. No uso da modelagem aqui pensado, o instrumento de avaliação é o próprio desenvolvimento de atividades de modelagem. A questão então é: como obter uma pontuação (nota) para os alunos mediante esse desenvolvimento?

Embora meios com grande grau de subjetividade orientem os professores em suas avaliações quando de práticas com modelagem (Magalhães e Almeida, 2021), a reflexão de Hadji (1994, p. 94) é de que “O verdadeiro problema do avaliador não é o de inventar um sistema pertinente de notação, mas o de decidir o que significa e o que “vale” tal ou tal nota [...]”. Neste sentido, Almeida e Magalhães (2022), propõem um método de avaliação em modelagem e consideram que essa avaliação envolve as dimensões: (1) dimensão do fazer modelagem matemática; (2) dimensão do uso da matemática; e (3) dimensão da compreensão da situação da realidade. A partir dessas dimensões, os autores apresentam uma ferramenta em que se obtém ao final da avaliação em cada atividade de modelagem, uma nota para os alunos. Estas dimensões compreendem aspectos pertinentes aos eixos de competências apresentados em seção anterior.

Em termos gerais, incorporar na avaliação especificidades da modelagem, e considerar a assertiva de Blum (2015, p. 85) de que “Não apenas o ensino, mas também a avaliação deve refletir de forma adequada os objetivos das aplicações e da modelagem”, podem ser meios de orientação para avaliar, considerando as particularidades didáticas e pedagógicas da modelagem matemática na sala de aula.

### CONSIDERAÇÕES FINAIS

O ensaio teórico proposto relativamente à abordagem didático-pedagógica para a modelagem matemática, considerando como *realidade subjacente* práticas de modelagem e suas interpretações teóricas, sublinha aspectos didáticos e pedagógicos associados ao desafio de construir um espaço para a modelagem matemática no currículo que possa contribuir para o progresso dos alunos em sua *educação matemática*.

Os elementos abordados, matematização da realidade e resolução de um problema; competências dos alunos em atividades de modelagem matemática; possibilidade de um *design* para atividades de modelagem na sala de aula, reúnem um conjunto de ideias das quais não é possível se dissociar quando a modelagem matemática é o que está no divã. De fato, estes elementos integram os *sistemas complexos* a que já se referiram Sriramam e English (2005).

A matematização da realidade e a resolução de um problema, como essência do que a modelagem matemática é, recebem uma roupagem que na sala de aula com modelagem não se desvinculam de facetas didáticas e pedagógicas, embora não possam se desvencilhar também da necessidade de uma hipótese de causalidade, como propõe Husserl (2012).

As competências dos alunos em modelagem, sendo objeto com que se ocupam muitos dos pesquisadores interessados em modelagem, são, muitas vezes *o fim* quando atividades de modelagem são *o meio*. O olhar sobre essas competências aqui proposto indica dois eixos (competência *do fazer* modelagem e competência relativa ao conhecimento matemático e extramatemático). Sendo uma abordagem holística para as competências, este olhar pretende elucidar que a modelagem matemática na sala de aula pode se infiltrar nos currículos e ser um agente que fortalece a formação dos alunos.

A proposição relativa a um possível *design* para a modelagem matemática, inclui dez características consideradas relevantes para a inclusão da modelagem nas aulas (autenticidade da situação; natureza do problema; matematização; uso da matemática; necessidade de *tomada de decisão*; produção de um relatório; planejamento; trabalho em grupos; familiarização dos alunos; avaliação), traz para reflexão o como fazer modelagem matemática na sala de aula. Duas dessas características têm um caráter ontológico e sua problematização na sala de aula. As demais visam trazer ao debate uma maneira de pensar a estrutura da modelagem matemática na sala de aula que pode colaborar para o enfrentamento dos desafios e das barreiras para a introdução dessas atividades, identificados em Fredj e Vos (2021).

O *design* aqui proposto complementa vários aspectos de propostas anteriores. Considerar situações autênticas, explorar a diversidade da matematização e do uso da matemática, dar ênfase à tomada de decisão, explicitar a necessidade de planejamento, sugerir que se realize uma familiarização gradativa dos alunos com a modelagem e apontar para especificidades da avaliação, são aspectos não explorados em propostas anteriores. Desse modo, reunindo aspectos didáticos e pedagógicos, mas não negligenciando aspectos de outras naturezas, a abordagem aqui realizada se diferencia de outras proposições de *design*, como é o caso de Geiger *et al.* (2022) e Massß (2010), por exemplo.

Assim constituído, o *design* caracterizado pode ser um indicativo de como professores podem atuar em aulas com modelagem e dar suporte para aqueles ainda com pouca experiência com modelagem em sua prática docente.

O texto não se debruça largamente sobre a formação do professor em modelagem, embora compactue com a premissa de Almeida e Dias (2007) de que essa formação deve considerar: aprender sobre modelagem, aprender por meio da modelagem e ensinar usando modelagem. Em alinhamento com a abordagem aqui empreendida, pesquisas futuras podem avançar sobre o tema e considerar aspectos apontados em Mutti e Klüber, (2018) e em Ferri, (2018), por exemplo.

Diante do pensamento em que se subsidia o artigo, de que teorizações sempre consideram uma *realidade subjacente* que inclui uma prática, o ensaio aqui realizado se alinha com o pensamento do escritor mexicano José Ignacio Bartolache que, em 1769 no livro *Lecciones Matemáticas*, escreveu: *Uma boa prática é fruto de uma verdadeira teoria.*

## REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. Trabalhar através da resolução de problemas: Possibilidades em dois diferentes contextos. **Vidya**, v. 34, n. 1, p. 209-232, 2014.

- ALMEIDA, L. W., CASTRO, E. M. V. ; SILVA, M. H. Recursos semióticos em atividades de modelagem matemática e o contexto online. **Alexandria**, v. 14, n. 2, p. 383-406, 2021.
- ALMEIDA, L. W., CASTRO, E. M. V. Estratégias metacognitivas em atividades de modelagem matemática. Anais do X SIPEM (Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática). SBEM. 2021.
- ALMEIDA, L. M. W.; SOUSA, B. N. P. ; TORTOLA, E. The Formulation of Hypotheses in Mathematical Modelling Activities. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 23, n. 5, p. 66-93, 2021.
- ALMEIDA, L. M. W. Considerations on the use of mathematics in modeling activities. **ZDM**, v. 50, n. 1, p. 19-30, 2018.
- ALMEIDA, L. M. W.; DIAS, M. R. Modelagem Matemática em cursos de formação de professores. In: BARBOSA, J.; ARAÚJO, J. L.; CALDEIRA, A. D. (Org.). **Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais**. Recife: Biblioteca do Educador Matemático, p. 253-268, 2007.
- ALMEIDA, L. M. W. de; SILVA, K. A. P. da; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Contexto, 2012.
- ALMEIDA, L. M. W.; MAGALHÃES, G. G. Estruturando e validando uma ferramenta para avaliação em atividades de modelagem matemática. **AIEM (Avances de Investigación en Educación Matemática)**, v. 21, p. , 2022.
- BARBOSA, J. C. Modelagem matemática e os professores: a questão da formação. **Bolema**, v. 14, n. 15, p. 5-23, 2001.
- BARQUERO, B., JENSEN, B.E. Impact of theoretical perspectives on the design of mathematical modelling tasks. **AIEM - Avances de Investigación en Educación Matemática**, v. 17, p. 98-113, 2020.
- BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. Editora Contexto, 2002.
- BLUM, W. **Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do?** The proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education: Intellectual and attitudinal changes. p. 73-96. New York: Springer, 2015.
- BLUM, W.; FERRI, R. B. **Mathematical modelling: Can it be taught and learnt?** Journal of Mathematical Modelling and Application, v. 1, n. 1, p. 45-58, 2009.
- BLUM, W. **Icmi study 14: applications and modeling in mathematics education -**  
discussion document. **Educational Studies in Mathematics**, n. 51, p. 149-171, 2002.
- BRITO, D. S. **Aprender Geometria em Práticas de Modelagem Matemática: Uma Compreensão Fenomenológica**. Tese de Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.
- BRITO, D. S., ALMEIDA, L. M. W. Práticas de modelagem matemática e dimensões da aprendizagem da geometria. **Revista Actualidades Investigativas en Educación**, v. 21, n. 1, p. 1-29, 2021.
- BURKHARDT, H. Ways to teach modelling - a 50-year study. **ZDM**, v. 50, n. 1, p. 61-75, 2018.

- CAI, J., CIRILLO, M., PELESKO, J. A., BORROMEO FERRI, R. Mathematical modeling in school education: Mathematical, cognitive, curricular, instructional, and teacher education perspectives. In P. Liljedahl, C. Nicol, S. Oesterle, & D. Allan (Eds.), **Proceedings of PME38** (Vol. 1, pp. 145-172). Vancouver, Canada: PME, 2014.
- CEVIKBAS, M.; KAISER, G.; SCHUKAJLOW, S. A systematic literature review of the current discussion on mathematical modelling competencies: state-of-the-art developments in conceptualizing, measuring, and fostering. **Educational Studies in Mathematics**, v. 109, n. 2, p. 205-236, 2022.
- D'AMORE, B. **Elementos de didática da matemática**. Editora Livraria da Física. 2007.
- FERRI, R. B. **Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education**. Springer International Publishing, 2018.
- FREDJ, P. ; VOS, P. A commentary on the Special Issue "Innovations in measuring and fostering mathematical modelling competencies". **Educational Studies in Mathematics**, v. 109, n. 2, p. 455-468, 2022.
- FREUDENTHAL, H. Why to teach mathematics so as to be useful. **Educational Studies in Mathematics**, v. 1, n. ½, p. 3-8, Mai 1968.
- GALBRAITH, P. Models of Modelling: Genres, Purposes or Perspectives. *Journal of Mathematical Modelling and application*, v. 1, n. 5, p. 3-16, 2012.
- GALBRAITH, P. Modelling, education, and the epistemic fallacy. In G.A. Stillman, W. Blum & M.S. Biembengut (Eds.), **Mathematical modelling in education research and practice - cultural, social and cognitive influences**, 339-348, Heidelberg: Springer, 2015.
- GEIGER, V. ; GALBRAITH, P. ; NISS, M.; DELZOPPO, C. Developing a task design and implementation framework for fostering mathematical modelling competencies. **Educational Studies in Mathematics**, v. 109, n. 2, p. 313-336, 2022.
- GRAVEMEIJER, K. Emergent modeling and iterative processes of design and improvement in mathematics education. **Plenary lecture at the APEC-TSUKUBA International Conference III, Innovation of Classroom Teaching and Learning through Lesson Study - Focusing on Mathematical Communication**, Tokyo and Kanazawa, Japan, 2007. Disponível em: <https://bit.ly/3geQXvP>
- GREEFRATH, G.; SILLER, H-S.; KLOCK, H.; WES, R. Pre-service secondary teachers' pedagogical content knowledge for the teaching of mathematical modelling. **Educational Studies in Mathematics**, v. 109, p. 383-407, 2022.
- HADJI, C. *A avaliação - regras do jogo: das intenções aos instrumentos*. Portugal: Porto Editora, 1994.
- HUSSERL, E. **A crise das ciências europeias e a fenomenologia transcendental** (DF Ferrer, Trad.). Rio de Janeiro, RJ: Forense Universitária, 2012.
- KAISER, G., BLOMHOJ, M., SRIRAMAN, B. Towards a didactical theory for mathematical modelling. **ZDM**, v. 38, n. 2, p. 82-85, 2006.
- KAISER, G. e SRIRAMAN, B. A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. **ZDM**, v. 38, n. 2, p. 302-310, 2006.

KLÜBER, T. E. Uma metacompreensão da modelagem matemática na educação matemática. **Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica)** - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2012.

KOWALEK, R. A validação em atividades de modelagem matemática. **Dissertação de mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática** - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2021.

LESH, R., HOOVER, M., HOLE, B., KELLY, A., & POST, T. Principles for developing thought-revealing activities for students and teachers. In R. A. Lesh, & A. Kelly (Eds.), **Handbook of research design in mathematics and science education** (pp. 591-646). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum, 2000.

MAAß, K. Classification scheme for modelling tasks. **Journal für Mathematik-Didaktik**, v. 31, n. 2, p. 285-311, 2010.

MAGALHÃES, G. G.; ALMEIDA, L. M. W. Avaliação em modelagem matemática: focos e modos de fazer. **Revista Paranaense de Educação Matemática (RPEM)**, v. 10, n. 23, p. 305-327, 2021.

MEYER, J. F. A. A Modelagem Matemática: O desafio de se 'fazer' a Matemática da necessidade. **Com a Palavra o Professor**, v. 5, n. 11, p. 140-149, 2020.

MUTTI, G. S. L.; KLÜBER, T. E. Aspectos que constituem práticas pedagógicas e a formação de professores em modelagem matemática. **Alexandria**, v. 11, p. 85-107, 2018.

NISS, M.; BLUM, W.; GALBRAITH, P. L. Introduction. In : BLUM, W.; GALBRAITH, P. L.; HENN, H-W.; NISS, M. (Orgs.). **Modelling and Applications in Mathematics Education**. The 14 ICMI Study. New York: Springer, p. 3-32, 2007.

NISS, M. Assessment of mathematical applications and modeling in mathematics teaching. In J de Lange, C. Keitel, I. Huntley & M. Niss (Eds) **Innovation in mathematics education by modeling and applications** (pp. 41-51). Chichester: Horwood, 1993.

NISS, M.; BLUM, W. **The Learning and Teaching of Mathematical Modelling**. London: Routledge, 2020.

NISS, M. Modelling a crucial aspect of students' mathematical modelling. R. Lesh *et al.* (Eds.), **Modelling Students' Mathematical Modelling Competencies**, (ICTMA 13) (pp 43--60). New York: Springer, 2010.

OMODEI, L. B. C. **Autenticidade em atividades de modelagem matemática: da aprendizagem para o ensino em um curso de formação de professores**. Tese de Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2021.

PINTO, F.; ARAÚJO, J. L. Um estudo sobre planos de atividades de modelagem. **REnCiMa**, São Paulo, v. 12, n. 2, p. 1-25, mar. 2021.

RAMOS, D. C. E ALMEIDA, L. M. W. Interpretação Semiótica em Atividades de Modelagem Matemática. **Bolema**, v. 35, n. 71, p. 1391-1415, 2021.

SILVEIRA, E.; CALDEIRA, A. D. Modelagem na Sala de Aula: resistências e obstáculos. **Bolema**, v. 26, p. 249-275, 2012.

SRIRAMAN, B.; ENGLISH, L.D. Theories of mathematics education: A global survey of theoretical frameworks/trends in mathematics education research. **ZDM**, v. 37, n. 6, p. 450-456, 2005.

SCHUKAJLOW, S., KAISER, G.; STILLMAN, G. Empirical research on teaching and learning of mathematical modelling: A survey on the current state-of-the-art. **ZDM**, v. 50, n. (1-2), p. 5-18, 2018.

TOTOLA, E.; ALMEIDA, L. M. W. Configuraciones de actividades de modelación matemática en la Educación Primaria: una construcción apoyada en el Análisis de Contenido. **Revista Paradigma** (Ed. Temática: Pesquisa Qualitativa Em Educação Matemática), v. XLIII, p. 329-355, 2022.

VILLARREAL, M.; MINA, M. Actividades Experimentales con Tecnologías em Escenarios de Modelización Matemática. **Bolema**, v. 34, n. 67, p. 786-824, 2020. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n67a21>

VILLA-OCHOA, J.A.; CASTRILLÓN-YEPES, A.; SÁNCHEZ-CARDONA, J. Tipos de tareas de modelación para la clase de matemática. **España Plural**, v. XVIII, n. 36, p. 219-251, 2017.

VOS, P. "How Real People Really Need Mathematics in the Real World" - Authenticity in Mathematics Education. **Education Sciences**, v. 8, n. 4, p. 195, 2018.

ZANIM, A. P. **Um método para a análise de competências dos alunos em atividades de modelagem matemática**. Tese de Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2021.

---

**RECEBIDO EM:** 28 maio 2022

**CONCLUÍDO EM:** 22 set. 2022