

PROCESOS DE VISUALIZACIÓN EN ACTIVIDADES GEOMÉTRICAS DE BACHILLERATO

PROCESSOS DE VISUALIZAÇÃO EM ATIVIDADES GEOMÉTRICAS DO ENSINO MÉDIO

VÍCTOR LARIOS-OSORIO¹
 LUIS ROBERTO PINO-FAN²
 MIGUEL ÁNGEL MARTÍNEZ-ORTIZ³

RESUMEN

El objetivo de este trabajo es identificar y caracterizar los procesos de visualización empleados por alumnos mexicanos de bachillerato cuando se enfrentan a problemas geométricos. Esta investigación cualitativa es sobre el papel de la visualización y los tipos de aprehensión, como procesos heurísticos y desde una perspectiva que considera las representaciones semióticas asociadas al registro de representación gráfica. Se consideró una muestra intencional de 38 estudiantes del segundo año de la Escuela de Bachilleres de la Universidad Autónoma de Querétaro (México). Se evidencia que el proceso más utilizado por los estudiantes es la aprehensión perceptiva, no se presenta una coordinación entre los tipos de aprehensiones operatorias y discursivas, y se deja de lado el razonamiento configuracional. Se concluye que la falta de una fusión apropiada entre aspectos conceptuales y figurales de los objetos geométricos, lleva al uso de un tipo de aprehensión que da preferencia a la parte figural y obstaculiza su aprendizaje.

Palabras-clave: *Aprehensión. Geometría. Proceso cognitivo. Solución de problemas. Visualización.*

RESUMO

O objetivo deste trabalho é identificar e caracterizar os processos de visualização utilizados por estudantes mexicanos do ensino médio quando se deparam com problemas geométricos. Esta pesquisa qualitativa é sobre o papel da visualização e dos tipos de apreensão, como processos heurísticos e numa perspectiva que considera as representações semióticas associadas ao registro da representação gráfica. A amostra intencional de 38 alunos do segundo ano do Ensino Médio da Universidad Autónoma de Querétaro (México). É evidente que o processo mais utilizado pelos alunos é a apreensão perceptiva, não há coordenação entre os tipos de apreensão operativa e discursiva, e o raciocínio configuracional é negligenciado. Conclui-se que a falta de uma fusão adequada entre os aspectos conceituais e figurativos dos objetos geométricos leva ao uso de um tipo de apreensão que dá preferência à parte figural e dificulta seu aprendizado.

Palavras-chave: *Apreensão. Geometria. Processo cognitivo. Solução de problemas. Visualização.*

ABSTRACT

The main goal of this paper is to identify and characterize the visualization processes used by Mexican high school students when they face geometric problems. This qualitative research is on the role of visualization and types of apprehension, as heuristic processes. We use a perspective which considers semiotic representations associated with the register of graphic representation. We considered an intentional sample of 38 second-year students from the High School of the Autonomous University of Querétaro (Mexico). It is evident that the process most used by students is perceptual apprehension, there is no coordination between the types of operative and discursive apprehensions,

1 Doctor en Ciencias en Matemática Educativa (Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México). Universidad Autónoma de Querétaro, México. E-mail: vil@uaq.mx. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4454-8516>

2 Doctor en Didáctica de las Matemáticas (Universidad de Granada, España). Universidad de Los Lagos, Osorno, Chile. E-mail: luis.pino@ulagos.cl. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4060-7408>

3 Ingeniero en Electrónica (Instituto Tecnológico de Durango, México). Universidad Autónoma de Querétaro, México. E-mail: miguel_martinezortiz@hotmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2354-6703>

and configural reasoning is neglected. It is concluded that the lack of an appropriate fusion between conceptual and figurative aspects of geometric objects leads to the use of a type of apprehension that gives preference to the figural aspect and hinders the learning of students.

Keywords: *Apprehension. Geometry. Cognitive process. Problem solving. Visualization.*

INTRODUCCIÓN

El aprendizaje de la Geometría está fuertemente ligado a dos aspectos importantes e inseparables: los conceptos geométricos (con sus propiedades) y las imágenes que las representan (FISCHBEIN, 1993; GODINO, GONZATO, *et al.*, 2012; GUTIÉRREZ, 1996; LABORDE e CAPPONI, 1994), es decir, los objetos matemáticos y las representaciones semióticas asociadas al registro gráfico (DUVAL, 1993; DUVAL, 2003; GODINO, BATANERO e FONT, 2007).

Sin embargo, aunque es posible ver el dibujo de un objeto geométrico o conocer el nombre que lo define, no siempre se asimilan las propiedades que posee dicho objeto. De hecho, el reconocimiento de dichas propiedades es fundamental para abordar adecuadamente problemas geométricos y obtener su solución (FISCHBEIN, 1993). La visualización dentro de la Geometría Euclidiana toma un rol muy importante debido a que los objetos que intervienen pueden ser presentados mediante una imagen o una configuración establecida, aunque por sus propiedades esto no podría ser físicamente posible (no se puede, por ejemplo, representar una línea “sin anchura” o un punto “sin dimensiones”).

Al igual que en otras áreas educativas, una de las anheladas metas es conocer los procesos de razonamiento de los individuos para la adquisición del conocimiento. El conocimiento de los procesos de razonamiento de los alumnos nos llevará a contar con más y mejores herramientas que podrán ser aplicadas en la enseñanza de las distintas temáticas que se abordan dentro de un curso de Geometría Euclidiana en Educación Media Superior. Como mencionan Torregrosa y Quesada (2007, p. 276), “si logramos conocer o al menos aproximarnos a los procesos utilizados por los alumnos en la resolución de problemas en Geometría, será posible intervenir de mejor manera en su aprendizaje”.

Si lográramos caracterizar aquellos procesos empleados por los estudiantes y, sobre todo, aquellos que no se emplean (o se emplean poco) y que podrían ocasionar un bloqueo cognitivo para determinar su solución, entonces sería posible implementar algunas estrategias de enseñanza que les resultarían más útiles al momento de resolver algún problema geométrico. Al desconocer los pensamientos que tienen los estudiantes, puede resultar complicado apoyarles y mejorar su desempeño.

En este sentido, el objetivo de este artículo es presentar los resultados sobre la identificación y caracterización de procesos de visualización empleados por alumnos del nivel medio superior (16 y 17 años) cuando se enfrentan a problemas geométricos. Este tipo de caracterización, y en general este tipo de indagaciones, permite establecer bases que ayuden a los profesores a identificar y tratar los diferentes procesos cognitivos que llevan a cabo los estudiantes. Esto no sólo porque es común que en un solo problema pudieran llegar a ser muy distintos y diversos los procesos cognitivos subyacentes a la actividad matemática de los estudiantes, sino porque intervienen factores ambientales y de interacción con los alumnos que deben ser atendidos por el profesor (GODINO, BATANERO e FONT, 2007). En particular para este trabajo se desarrolló una caracterización más específica de los elementos presentes en cada una de las aprehensiones cognitivas, a manera de facilitar y subjetivar los análisis realizados con el enfoque teórico considerado.

REFERENTES TEÓRICOS: VISUALIZACIÓN Y GEOMETRÍA

En la literatura de las investigaciones relacionadas con la solución de problemas en Matemáticas existen diversos puntos de vista y aproximaciones. Según Presmeg (1986) existen dos tipos de métodos de solución de problemas:

- Los *métodos visuales*, en los que se involucra el uso de imágenes, diagramas o esquemas durante el proceso de solución; y
- Los *métodos no visuales*, los cuales prescinden de las imágenes y recursos gráficos.

Para este trabajo se consideraron problemas en los que se esperó que los alumnos participantes utilizaran de los primeros métodos al emplear representaciones visuales para el análisis y la solución. Es por ello que se requiere abordar el concepto de visualización a fin de analizar los problemas con aspectos visuales.

En la investigación en Educación Matemática existen diversos puntos de vista al respecto (ver, por ejemplo, ACUÑA, 2012; GUTIÉRREZ, 1996). Se puede decir que la visualización no se traduce sólo en el acto de ver, sino que es un proceso más complejo ligado al razonamiento, a la interpretación, la acción y la relación (FONT e RUBIO, 2017). De hecho, desde el punto de vista del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos [EOS] (GODINO, BATANERO e FONT, 2007), la visualización no es considerada un proceso primario, sino un macroproceso que puede ser analizado considerando objetos primarios y otros procesos que lo componen (GODINO, GONZATO, *et al.*, 2012).

Fischbein (1993), por otra parte, sostiene que en Geometría los *conceptos* y las *imágenes* se trabajan como dos entidades mentales diferentes, en donde los conceptos son una representación simbólica, usualmente verbal, que nos expresan una idea general de las características que tienen en común un determinado conjunto de objetos (aspecto *conceptual*), mientras que las imágenes son una representación sensorial de un determinado objeto o conjunto de ellos (aspecto *figural*). La fusión adecuada de ambos aspectos es lo que denomina *concepto figural* (FISCHBEIN, 1993) y, según Mariotti y Antonini (MARIOTTI e ANTONINI, 2009, p. 83), “los errores y dificultades pueden ser explicados eficientemente de la fusión (armonía) faltante o incompleta entre aspectos figurales y conceptuales”.

Así pues, en Geometría todos los objetos involucrados en ella están determinados tanto por una representación simbólica como una sensorial, es decir, podemos describirlas mediante un conjunto de características verbales, así como también por una representación sensorial (visual) del objeto matemático.

Adicionalmente, Duval (1999) menciona que la actividad geométrica involucra tres tipos de procesos cognitivos, la visualización, el razonamiento y la construcción, que se pueden resumir como sigue:

- Los *procesos de visualización*, los cuales se relacionan con la asimilación y reconocimiento de representaciones espaciales.
- Los *procesos de razonamiento* son aquellos que se relacionan con la explicación o deducción y se expresan mediante procesos de tipo discursivo.
- Los *procesos de construcción* son aquellos donde se realiza la representación de una imagen o modelo a partir de propiedades matemáticas de algún objeto matemático.

Por un lado, consideraremos al razonamiento en el sentido que le da Hershkowitz (1998), quien al hacer una revisión señala que algunas aproximaciones teóricas en las últimas décadas, entre ellas algunas socioculturales, tienden a considerarlo con un significado amplio. Así pues, “los procesos de razonamiento son considerados ahora como una variedad de acciones que los alumnos llevan a cabo para comunicarse y explicar a otros, así como a sí mismos, lo que ven, descubren, y lo que piensan y concluyen” (p. 30).

En particular, se conoce como *razonamiento configural* al “tipo de razonamiento caracterizado por la coordinación entre la aprehensión discursiva y la aprehensión operativa” (TORREGROSA, QUESADA e PENALVA, 2010, p. 329). En otras palabras, es el conjunto de todas las acciones relacionadas con las aprehensiones discursivas y operativas al momento de resolver un problema. A través del razonamiento configural podemos realizar enlaces dentro de un problema entre las imágenes y las propiedades que las definen, con alguna posible modificación o trazo auxiliar que ayudará al alumno a descubrir o ver nuevas relaciones.

Por otro lado, se considera que la correcta interrelación entre los procesos anteriormente mencionados, nos llevan poco a poco a encontrar la solución de un problema geométrico y uno de los modelos en los que se muestra la relación entre las propiedades de los objetos geométricos y las imágenes que representan es el expuesto por Torregrosa y colaboradores (QUESADA, 2014; TORREGROSA e QUESADA, 2007; TORREGROSA, QUESADA e PENALVA, 2010), el cual está basado en los trabajos realizados por Duval (1995). Estos autores proponen cuatro tipos de procesos heurísticos, los tipos de aprehensiones, que engloban los procesos de visualización y de razonamiento, los cuales se ampliarán en la siguiente sección.

METODOLOGÍA

La investigación se realizó con un enfoque cualitativo (ÁLVAREZ-GAYOU, 2003) con una muestra intencional de 38 estudiantes inscritos en el segundo año de bachillerato, de entre 16 y 17 años. Estos alumnos ya habían tomado el curso de Geometría y Trigonometría al momento de la aplicación realizada, por lo que ya habían estudiado los conceptos geométricos que se propusieron en las actividades para la investigación.

Los alumnos participantes estaban inscritos en la Escuela de Bachilleres de la Universidad Autónoma de Querétaro (UAQ). Esta es una escuela de sostenimiento público, administrativamente pertenece a la universidad y forma parte del Sistema Nacional de Bachillerato (SNB). El bachillerato es un nivel preuniversitario y la UAQ admite en el nivel universitario a los egresados de cualquier institución que pertenezca al SNB, sin importar si son de su propia Escuela de Bachilleres o no.

Proceso metodológico

En la segunda parte del ciclo escolar 2018-2019 se aplicaron las actividades diseñadas en una aplicación realizada en dos clases consecutivas, cada una de las cuales de 60 minutos de duración. Los alumnos se reunieron en equipos de dos y tres integrantes con la intención de que los alumnos interactuaran y discutieran las respuestas en cada equipo.

Se les entregó a los equipos de alumnos hojas de trabajo con los ítems que se presentan más adelante. Los alumnos llevaron a cabo la resolución de los problemas planteados y escribieron sus respuestas después de la discusión. Un medio para la obtención de la información que se analizó fueron estas respuestas escritas de los alumnos (ÁLVAREZ-GAYOU, 2003). El papel del investigador durante las sesiones fue la de organizar a los alumnos, entregar las hojas de trabajo y recibirlas contestadas. Su participación ante dudas se limitó a comentarios sobre la redacción de los ítems, pero no a dar pistas o ayudar a la obtención de soluciones.

Además, se realizó una entrevista semiestructurada a los equipos participantes y de manera posterior a la resolución de los ítems (ÁLVAREZ-GAYOU, 2003). Esta entrevista se enfocó a profundizar en las respuestas para indagar sobre los procesos llevados a cabo por cada uno de los equipos y así conocer a mayor profundidad la actividad matemática desarrollada.

Unidades de análisis

Como unidades de análisis de las respuestas de los alumnos se tomaron los procesos heurísticos propuestos por Torregrosa y sus colaboradores (QUESADA, 2014; TORREGROSA e QUESADA, 2007; TORREGROSA, QUESADA e PENALVA, 2010), que son los siguientes tipos de aprehensiones:

- Aprehensión perceptiva (AP), la cual es “la identificación simple de una configuración” (TORREGROSA e QUESADA, 2007, p. 281). Este tipo de aprehensión es la que se desarrolla desde las primeras etapas del individuo, así como desde los primeros años escolares.
- Aprehensión secuencial (AS), la cual ocurre cuando se debe construir una figura o describir su construcción. La organización de los trazos no depende de la percepción, sino de técnicas de construcción y de propiedades matemáticas (DUVAL, 1995).
- Aprehensión discursiva (AD), la cual genera una conexión entre alguna configuración generada por la aprehensión perceptiva con alguna afirmación matemática. Esta relación puede ser dada de dos maneras, dependiendo de la dirección en la cual esté dirigida:
 - Del anclaje visual al anclaje discursivo (ADVD): Esto sucede cuando se le asigna a una representación o configuración dada algún tipo de afirmación o definición matemática.
 - Del anclaje discursivo al anclaje visual (ADDV): Es cuando a una afirmación o definición, el individuo es capaz de relacionarla con alguna imagen o representación.
- Aprehensión operativa (AO), la cual ocurre cuando el individuo realiza alguna modificación a la configuración inicial con tal de solucionar el problema o planteamiento dado. Puede ser de dos tipos:
 - Aprehensión operativa de cambio figural (AOCF): Sucede cuando se añade o quitan algunos elementos geométricos de la configuración obtenida inicialmente (por ejemplo, el trazo de una recta).
 - Aprehensión operativa de reconfiguración (AOR): Este tipo de aprehensión pasa cuando se genera un “reacomodo” de los elementos presentes en la configuración (por ejemplo girar, trasladar, etcétera).
 - Aprehensión óptica (AOO): Ocurre cuando se agranda o empequeñece alguna configuración.

Es importante mencionar que según Torregrosa y Quesada (2007), la aprehensión perceptiva se considera como base para la solución de algún problema y, además, es la que enlaza las aprehensiones operativa y discursiva (Figura 1).

Figura 1 - Importancia de la aprehensión perceptiva.



Fuente: (TORREGROSA e QUESADA, 2007, p. 287).

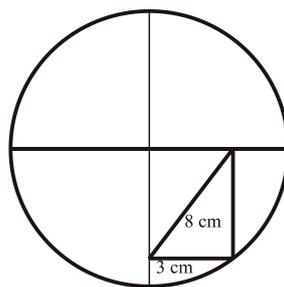
Ítems aplicados

Los ítems utilizados para el análisis e interpretación fueron tomados y adaptados de algunos existentes (ESCANDÓN, 1990; FIXX, 1988) o fueron de elaboración propia. Para establecer su pertinencia se validaron a través de una revisión por parte de cuatro investigadores de tres universidades latinoamericanas, los cuales tienen una trayectoria investigativa sobre la enseñanza y la investigación en Educación Matemática.

A continuación se muestran los ítems, con la consigna enmarcada, junto con los procesos a identificar y posibles soluciones en cada uno de los casos.

Ítem 1:

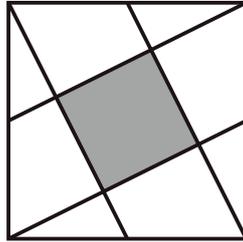
Dentro de una circunferencia se dibuja un rectángulo como se muestra en la siguiente figura. ¿Cuál es el valor del radio de la circunferencia?



En este ítem, tomado de Fixx (1988, p. 25), se esperaba que se utilizaran las aprehensiones operatoria (AO) y discursiva (AD): La aprehensión operatoria de cambio figural se emplea para realizar el trazo de la otra diagonal del rectángulo que es también el radio de la circunferencia y la aprehensión discursiva se lleva a cabo al identificar la propiedad de que las diagonales del rectángulo son congruentes.

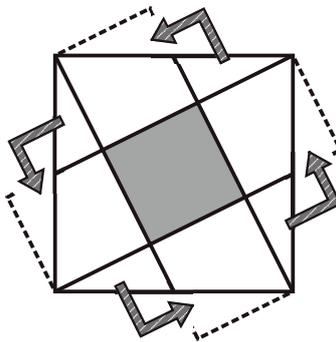
Ítem 2:

A partir de los puntos medios de un cuadrado se trazan rectas hacia sus vértices como se muestra a continuación. Si los lados del cuadrado miden 10 cm. ¿Cuánto mide el área de la parte sombreada? (Describe tu método para llegar a la solución).



Con este ítem, adaptado de Escandón (1990, p. 193), se esperaba que el uso de la aprehensión operatoria de reconfiguración (AOR) permitiese el reacomodo de los triángulos junto a los trapecios formados en el interior del cuadrado para conformar nuevos cuadrados, los cuales son congruentes al cuadrado mostrado en el área sombreada. Así, al observar la formación de cinco cuadrados de igual medida (aprehensión perceptiva, AP) se podría concluir, al emplear la aprehensión discursiva (AD), que el área total es la suma de las áreas de cinco regiones congruentes (ver la Figura 2).

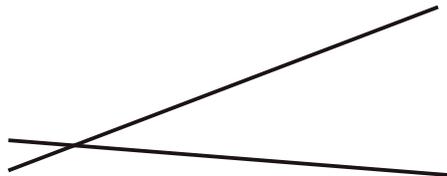
Figura 2 - Respuesta esperada.



Fuente: Construcción de los autores.

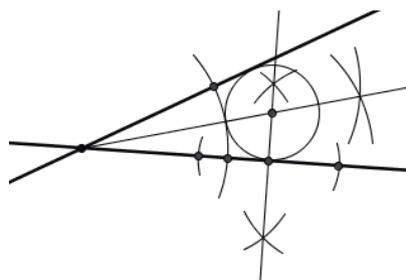
Ítem 3:

Traza una circunferencia que sea tangente a las siguientes rectas. Con los trazos realizados, ¿Puedes asegurar que realmente la circunferencia trazada es tangente a ambas rectas? ¿Por qué? (realiza una descripción de la manera en que lo trazaste).



Para resolver este ítem, el cual es de elaboración propia, se esperaba el uso de la aprehensión secuencial (AS) a fin de construir la bisectriz del ángulo y la de una recta perpendicular a cualquiera de los lados proporcionados, de tal manera que la intersección de las dos rectas construidas fuese el centro de la circunferencia solicitada y la distancia de ese punto al pie de la recta perpendicular construida sería el radio de la circunferencia (ver la siguiente figura).

Figura 3 - Respuesta esperada.



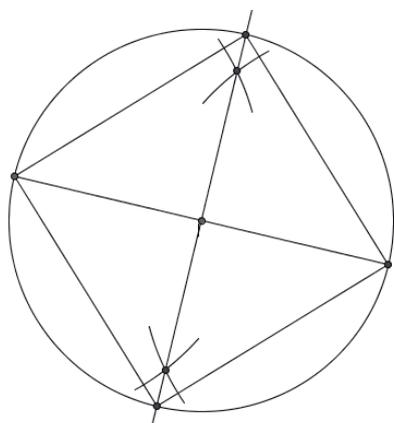
Fuente: Construcción de los autores.

Ítem 4:

Solo con el uso de regla y compás, traza un cuadrado (de las medidas que desees). Con los trazos realizados, ¿puedes asegurar que realmente es un cuadrado?, ¿por qué? (Realiza una descripción de la manera en que lo trazaste).

Este ítem es de elaboración propia y está basado en trazos que ocasionalmente se abordan en los cursos de Geometría. El proceso de construcción no es único, pero en general se esperaba el uso de la aprehensión secuencial (AS) para llevarlo a cabo. Una posibilidad es construir una circunferencia, dos de sus diámetros (perpendiculares entre sí) y considerar los cuatro puntos de intersección de los diámetros con la circunferencia:

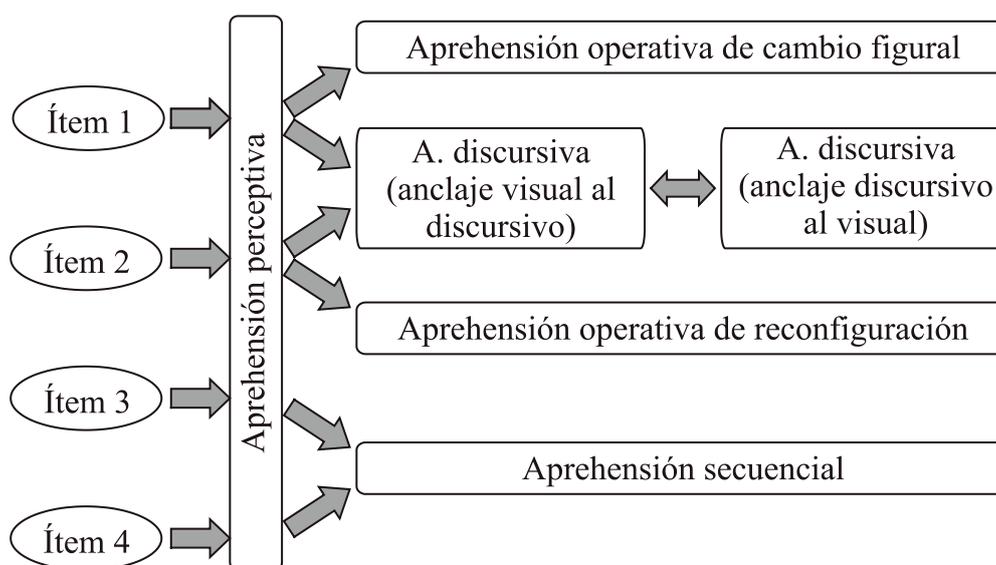
Figura 4 - Respuesta esperada.



Fuente: Construcción de los autores.

Como ya se mencionó, la resolución de los cuatro ítems requiere el usar la aprehensión perceptiva (ver la figura 5), aunque en particular la solución de los dos primeros requiere del uso de un razonamiento configural, debido a la continua articulación de la aprehensión operatoria y la aprehensión discursiva (QUESADA, 2014).

Figura 4 - Respuesta esperada.



Fuente: Elaboración propia.

Por su parte los ítems 3 y 4 se enfocan en la solución por medio de la aprehensión secuencial, ya que se les pide a los estudiantes la elaboración de objetos geométricos en lápiz y papel utilizando únicamente herramientas primitivas como lo son la regla y el compás.

Sin embargo, como se mencionará más adelante, el uso de la aprehensión perceptiva predominó en las respuestas de los estudiantes, dejando de lado el razonamiento configural y la aprehensión secuencial.

ANÁLISIS Y RESULTADOS

En el análisis se realizó una caracterización de las operaciones visuales y de razonamiento para determinar el tipo de aprehensión utilizado a lo largo del proceso de solución oral y escrito por cada uno de los equipos. Esta caracterización se realizó de acuerdo con las definiciones proporcionadas y aparece en la Tabla 1.

Tabla 1 - Caracterización de los procesos heurísticos.

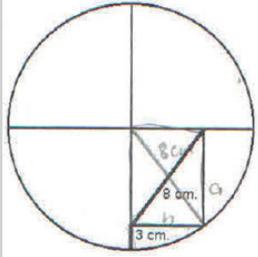
Procesos heurísticos	Procesos específicos	Caracterización
Aprehensión perceptiva (AP)		Se caracteriza por la simple identificación de una configuración. Puede presentarse en aspectos como: "Vimos..." "Observamos..." "Parece..." "Esta (esto)..." "Aquí..."
Aprehensión secuencial (AS)		Descripción o construcción fundamentada en fundamentada en relación con propiedades de las figuras, no de la percepción de las mismas.
Aprehensión operatoria	Cambio figural (AOCF)	Adición de elementos geométricos a la configuración inicial proporcionada (segmentos, rectas, etc.).
	Reconfiguración (AOR)	Modificación de los elementos geométricos presentes en la configuración (giros, cambio de posición, etc.).
	Óptica (A00)	Modificación en las proporciones de la configuración (agrandar, encoger, etc.).
Aprehensión discursiva	Del anclaje visual al discursiva (ADVD)	Asignación a una representación o configuración algún tipo de afirmación o definición matemática. Uso de "fórmulas" o teoremas a partir de una figura. "Como es un(a)... entonces..." "Como los lados (segmentos)... entonces..."
	Del anclaje discursivo al visual (ADDV)	Ocurre cuando a partir de una afirmación o propiedad matemática se le asigna una representación o configuración. "Como dice que... entonces..." "Según el teorema... entonces..."

Fuente: Elaboración propia.

Esta tabla ayudó a clasificar las soluciones proporcionadas por los estudiantes y mostrar que para cada uno de los ítems se encontraron diversas soluciones y métodos llevados a cabo, encontrando a su vez distintos procesos heurísticos en su descripción escrita y oral.

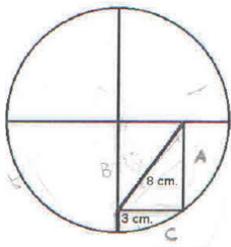
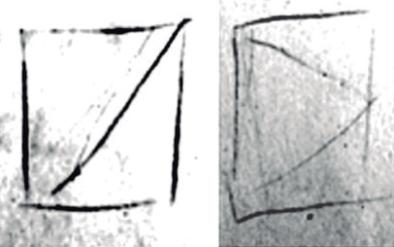
A pesar de mostrar tipologías similares en sus soluciones, algunos equipos evidenciaron el uso de distintos procesos cognitivos dentro del desarrollo de sus respuestas, como se puede ver en los siguientes casos. En estos se muestran fragmentos de las transcripciones (incluidos los dibujos de los alumnos) y de las entrevistas. Cabe señalar que las transcripciones se han reproducido fielmente, respetando incluso los errores de ortografía o redacción de los alumnos.

Tabla 2 - Respuesta del equipo 13 al ítem 1.

Transcripción	Entrevista
 <p>Siendo un rectángulo que tiene como uno de sus vértices el centro y otro vértice toca la circunferencia, entonces si se traza un segmento de un vértice a otro se obtiene un segmento de igual longitud al otro, entonces el radio es de 8 cm.</p> $r = 8\text{cm.}$	<p>I: Aquí [ítem 1], ¿Cómo hiciste esto?</p> <p>E: Lo que yo pienso es que, como es un rectángulo, este es un eje de simetría [señala la diagonal que aparece dibujada], trazando el otro eje de simetría [del centro al vértice sobre la circunferencia] se supone que tiene que medir lo mismo que este [señala la diagonal original].</p>

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 3 - Respuesta del equipo 7 al ítem 1.

Transcripción	Entrevista
  <p>Teniendo en cuenta el lado B, que es equivalente al segmento que parte el rectángulo en dos triángulos (ambos semejantes), el lado B equivale a 8 que sería la altura del rectángulo, y el área restante es 3, ambos se suman para formar el radio.</p> $r = 8 + 3.$ $r = 11.$	<p>I: En este segundo [ítem], ¿qué fue lo que hicieron?</p> <p>E: Este triángulo y este son equivalentes [señalan los triángulos formados por la diagonal del rectángulo], bueno, se supone que es un rectángulo y está partido a la mitad, entonces si está partido a la mitad formarían un triángulo atrás, entonces el radio sería lo que falta de la mitad porque pasa por la mitad de la circunferencia, entonces si sumamos el 8 más esta parte [señalan el segmento de 3 cm] obtenemos el radio de la circunferencia.</p> <p>I: Entonces, ¿esta diagonal mide lo mismo que esto [señala el lado B]?</p> <p>E: No... con eso [diagonal] podríamos sacarlo.</p> <p>I: Entonces les faltaría sacar el lado [refiriéndose al lado B], y al sumarlo con 3 les daría el radio.</p> <p>E: Ajá.</p>

Fuente: Elaboración propia.

Los alumnos hicieron alusión al rectángulo (aprehensión perceptiva, AP) y, utilizando la aprehensión discursiva del anclaje visual al discursivo (ADVD), identifican que está dividido por una de sus diagonales y forma dos triángulos “ambos semejantes”. Después interpretaron que el “lado B” es equivalente a la diagonal del rectángulo y finalizaron con la adición del “lado B” y el segmento de 3 cm para la obtención del radio. Las dos imágenes de la derecha en la transcripción de la respuesta muestran dos configuraciones (aprehensión operativa óptica, AOO): la primera del rectángulo y la segunda tentativamente de un reacomodo del triángulo dentro del rectángulo (aprehensión operativa de reconfiguración, AOR) a manera de justificación de la equivalencia del “lado B” con la hipotenusa del triángulo.

La resolución del problema comenzó con la deducción de la semejanza de los triángulos formados por la diagonal en el interior del rectángulo; sin embargo, terminó con el uso de procesos completamente visuales, dejando de lado las justificaciones o propiedades matemáticas para resolverlo.

Análisis general

En general los procesos heurísticos utilizados por los equipos de alumnos para cada uno de los ítems aparecen a continuación:

Tabla 4 - Procesos heurísticos empleados (ítems 1 y 2).

Procesos heurísticos	Ítem	Equipos																		
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
AP	1	x		x	x	x	x	x		x	x	x	x	x	x	x			x	x
	2	x	x	x	x	x	x		x	x	x	x	x	x	x	x	x		x	x
AOCF	1										x		x	x	x	x			x	
	2	x										x	x		x				x	
AOR	1	x						x		x										
	2	x	x	x			x			x		x								
A00	1			x		x		x												
	2																			
ADVD	1			x	x	x	x	x	x											x
	2			x	x									x						x
ADDV	1																			
	2													x		x				
RDN	1	x		x	x	x	x	x	x	x	x		x	x	x					
	2	x	x	x	x	x	x	x	x	x		x				x				x
RDT	1																			
	2													x						

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 5 - Procesos heurísticos empleados (ítems 3 y 4).

Procesos heurísticos	Ítem	Equipos																
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
AP	3	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x		x	x	x	x	
	4	x	x	x	x	x	x	x	x	x		x	x	x	x	x	x	x
AS	3												x					x
	4																	

Fuente: Elaboración propia.

Como se puede observar en las tablas 4 y 5, el proceso más utilizado en la solución de los ítems fue la aprehensión perceptiva. Sin embargo, no se presenta una coordinación entre los distintos tipos de aprehensiones operatorias y discursivas en los procesos de solución de los estudiantes, dejando de lado el razonamiento configural.

Asimismo, en las soluciones dadas para los ítems 3 y 4, únicamente dos equipos exhibieron señales del uso de la aprehensión secuencial en las construcciones solicitadas en ambos ítems, apuntando a una ausencia en el conocimiento de los métodos de construcción o al poco énfasis en la formalidad de las construcciones geométricas.

CONCLUSIONES

Con la realización de la investigación se pudieron identificar procesos cognitivos realizados por los estudiantes en la solución de las actividades propuestas. Y aunque se evidenció el predominio de la aprehensión perceptiva, de manera semejante a lo reportado por Torregrosa y Quesada (2007), no se evidenció el uso del razonamiento configural en la mayoría de los equipos.

Se observó que los ítems orientados al razonamiento figural (el 1 y el 2) tuvieron mayor incidencia en la ausencia de soluciones que los orientados a la aprehensión secuencial (el 3 y el 4). Esto puede ser un indicativo de que, para los estudiantes, resulta más complejo responder tareas donde se implemente el razonamiento configural, que aquellas tareas donde no se utilice, independientemente de si creen que sus respuestas son correctas o incorrectas.

Por otro lado, también se mostró un déficit general en la realización de construcciones geométricas utilizando regla y compás, lo cual puede indicar una falla en los métodos previos de enseñanza-aprendizaje en este sentido. Una opción posible es realizar cambios curriculares para implementar el uso de Software de Geometría Dinámica en los niveles básicos (Primaria y Secundaria) de la enseñanza de la Geometría, ya que es cuando el individuo desarrolla formas de razonamiento que decantan en los procesos cognitivos utilizados en la Geometría. Además, tal como se ha reportado en la literatura, el uso de este tipo de software promueve los procesos de visualización.

Al igual que en otros trabajos existentes en ocasiones se requirió preguntar directamente a los alumnos varias veces para que explicaran o expusieran sus procedimientos realizados. Esto parece estar ligado, entre otras cosas, a cuestiones individuales como la personalidad, pero tampoco puede determinarse de antemano y abre la posibilidad de una indagación posterior. Larios, Arellano y González (2018) plantean la pregunta: “¿podemos atribuir esto al hecho de que durante su experiencia escolar previa los problemas les han sido presentados para hallar una respuesta y no para validarla, ni para convencer a otros ni a sí mismos?” (p. 304). Es importante considerar este aspecto en trabajos curriculares y de formación de profesores, pues si así ocurriese entonces habría que replantear desde los primeros años de los alumnos la necesidad de que provean argumentos para validar sus trabajos.

Por otro lado, se pudo generalizar como proceso principal de los equipos a la aprehensión perceptiva como método de solución, sobre todo en los ítems que requieren llevar a cabo una construcción. Esta situación debe hacerse notar, ya que según Duval (1995), es más bien la aprehensión secuencial la que se requiere para llevar a cabo procesos de construcción donde:

La organización de los trazos (o de las unidades figurales elementales) no depende de las leyes y las señales perceptuales, sino de las restricciones técnicas y las propiedades matemáticas. (...) Las restricciones técnicas producen retroalimentación: la figura prevista no puede ser entendida en tanto las relaciones entre las propiedades matemáticas y las restricciones técnicas no sean respetadas. (p. 146)

El hecho de que los alumnos no logren una fusión apropiada entre aspectos conceptuales y figurales, que sería lo ideal para construir los conceptos figurales (FISCHBEIN, 1993), no les permite avanzar apropiadamente en su aprendizaje. Así, el uso de la aprehensión se ve obstaculizada por la preferencia que se le otorga a la parte figurada (aprehensión perceptual). Esto lo ampliaremos enseguida.

Como se muestra en la Tabla 5, en general apareció un déficit en la construcción de configuraciones geométricas con el uso de regla y compás, lo que sugiere la existencia de problemas durante el proceso académico de los alumnos participantes en los que no se abordaron los temas relacionados con la realización de construcciones geométricas utilizando regla y compás. Cabe resaltar que en la institución donde se efectuó la investigación el plan de estudios incluye, de manera explícita, el uso de regla y compás para la elaboración de las construcciones geométricas, aunque de acuerdo con estos resultados no se reflejó una asimilación de dichas técnicas de construcción.

Con la consideración de que el tipo de herramientas y su uso para realizar las construcciones geométricas influyen en su aprendizaje y en la construcción de significados (CHEVALLARD, 1999; DUVAL, 1995; GODINO, 2003), una propuesta que se está haciendo es la introducir el uso de software para Geometría Dinámica. Por ejemplo, Hitt (2005) plantea que “es importante promover la visualización matemática utilizando diferentes representaciones y haciendo uso reflexivo de las nuevas tecnologías que permitan dar un significado concreto a las nociones matemáticas” (p. 105). Como se muestra en las investigaciones en el área, este tipo de herramientas utilizadas con diseños didácticos apropiados pueden proporcionar oportunidades que permitan el desarrollo de procesos de visualización en la Geometría.

Por otro lado, resultó también que algunas acciones tomadas por los estudiantes no pueden ser explicadas por ninguno de los procesos cognitivos expuestos anteriormente. Algunos de ellos por no expresar claridad en las ideas de los pensamientos de los estudiantes, pero otras por no presentar características en ninguna de ellas, como es el caso del análisis de las propiedades de las figuras dentro de un registro simbólico, lo que corresponde al proceso de *tratamiento* (DUVAL, 1999).

Estos comentarios dejan abierta la posibilidad de abordar inquietudes relacionadas con la necesidad de promover la argumentación en clase y el uso de herramientas (digitales y de papel-lápiz) para la realización de construcciones geométricas que permitan el desarrollo de procesos cognitivos, en particular los vinculados con la visualización, como parte sustancial del aprendizaje de la Geometría.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se hizo en el marco de los proyectos Fondecyt N° 11150014 del Conicyt, Chile, y FIN202015 del Fondec-UAQ-2019, México.

REFERÊNCIAS

ACUÑA SOTO, C. M. **La visualización como forma de ver en matemáticas. Un acercamiento a la investigación.** México: Editorial Gedisa, 2012.

ÁLVAREZ-GAYOU JURGENSON, J. L. **Cómo hacer investigación cualitativa.** México: Paidós, 2003.

ARCAVI, A. The role of visual representation in the learning of mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, v. 52, n. 3, p. 215-241, 2003.

CHEVALLARD, Y. L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 19, n. 2, p. 221-266, 1999. El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico.

DUVAL, R. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**, v. 5, p. 37-65, 1993.

DUVAL, R. Geometrical pictures: Kinds of representation and specific processings. In: SUTHERLAND, R.; MASON, J. **Exploiting mental imagery with computers in mathematics education.** Berlín: Springer, 1995. p. 142-157.

DUVAL, R. Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In: HITT ESPINOSA, F.; SANTOS TRIGO, L. M. **Proceedings of the 31st North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.** Cuernavaca: Cinvestav y Universidad Autónoma del Estado de Morelos, v. 1, 1999. p. 3-26.

DUVAL, R. «Voir» en mathématiques. In: FILLOY, E. **Matemática educativa. Aspectos de la investigación actual.** México: Cinvestav y Fondo de Cultura Económica, 2003. p. 41-76.

ESCANDÓN, R. **Curiosidades matemáticas.** México: Editorial Universo, 1990.

FISCHBEIN, E. The theory of figural concepts. **Educational Studies in Mathematics**, v. 24, p. 139-162, 1993.

FIXX, J. F. **Juegos de recreación para los muy inteligentes.** México: Editorial Gedisa, 1988.

FONT, V.; RUBIO, N. Procesos matemáticos en el enfoque ontosemiótico. In: CONTRERAS, J. M., et al. **Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción**. Granada: [s.n.], 2017.

GODINO, J. D. **Teoría de las funciones semióticas**. Granada: Universidad de Granada, 2003.

GODINO, J. D. et al. Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. **Enseñanza de las Ciencias**, v. 30, n. 2, p. 109-130. doi: 10.5565/rev/ec/v30n2.653, 2012.

GODINO, J. D.; BATANERO BERNABEU, C.; FONT MOLL, V. The onto-semiotic approach to research in mathematics education. **ZDM. The International Journal on Mathematics Education**, v. 39, n. 1-2, p. 127-135. DOI: 10.1007/s11858-006-0004-1, 2007.

GUTIÉRREZ, Á. Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. In: PUIG, L.; GUTIÉRREZ, Á. **Proceedings of the 20th conference of the IG-PME**. Valencia: Universidad de Valencia, v. 1, 1996. p. 3-19.

HERSHKOWITZ, R. About reasoning in geometry. In: MAMMANA, C.; VILLANI, V. **Perspective on the teaching of the geometry for the 21st century**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998. p. 29-37.

HITT ESPINOSA, F. Dificultades en el aprendizaje del cálculo. In: CORTÉS ZAVALA, J. C.; HITT ESPINOSA, F. **Reflexiones sobre el aprendizaje del cálculo y su enseñanza**. Morelia: Morevallado Editores, 2005. p. 81-107.

LABORDE, C.; CAPPONI, B. Cabri Géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 14, n. 1-2, p. 165-210, 1994.

LARIOS OSORIO, V.; ARELLANO CAMACHO, C.; GONZÁLEZ GONZÁLEZ, N. Análisis de argumentos producidos por alumnos de bachillerato al resolver problemas de geometría. **Redimat. Journal of Research in Mathematics Education**, v. 7, n. 3, p. 280-310. (DOI: 10.17583/redimat.2018.2343), 2018.

MARIOTTI, M. A.; ANTONINI, S. Breakdown and reconstruction of figural concepts in proofs by contradiction in geometry. In: LIN, F.-L., et al. **Proceedings of the ICMI Study 19: Proof and proving in mathematics education**. Taipei: National Taiwan Normal University, v. 2, 2009. p. 82-87.

PRESMEG, N. Visualisation in high school mathematics. **For the Learning in Mathematics**, v. 6, n. 3, p. 42-46, 1986.

QUESADA, H. **Análisis de la coordinación entre los procesos de visualización y los procesos de razonamiento en la resolución de problemas en geometría**. Alicante: Universidad de Alicante. (Tesis doctoral no publicada), 2014.

TORREGROSA GIRONÉS, G.; QUESADA VILELLA, H. Coordinación de procesos cognitivos en geometría. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (Relime)**, v. 10, n. 2, p. 275-300, 2007.

TORREGROSA GIRONÉS, G.; QUESADA VILELLA, H.; PENALVA MARTÍNEZ, M. C. Razonamiento configural como coordinación de procesos de visualización. **Enseñanza de las Ciencias**, v. 28, n. 3, p. 327-340. DOI: 10.5565/rev/ec/v28n3.187, 2010.

RECEBIDO EM: 28 abr. 2022

CONCLUÍDO EM: 19 out. 2022