

INTERPRETANDO E AVALIANDO ARGUMENTAÇÕES: UMA ANÁLISE COM LICENCIANDOS INGRESSANTES DE MATEMÁTICA

INTERPRETING AND EVALUATING ARGUMENTATION: AN ANALYSIS WITH FRESHMAN UNDERGRADUATE STUDENTS OF MATHEMATICS

JOÃO CARLOS CALDATO¹
LILIAN NASSER²

RESUMO

Este artigo apresenta a primeira parte de uma pesquisa ampla, cuja segunda etapa está em andamento. O objetivo é analisar nove argumentos sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo à luz do referencial teórico e investigar como licenciandos ingressantes em Matemática interpretam e avaliam tais argumentações, sob três pontos de vista distintos. Inicialmente, os participantes deveriam se colocar no lugar de um professor para avaliar cada um dos nove argumentos apresentados; em seguida, responder se eles utilizariam alguns em suas aulas. Por fim, eles deveriam responder se adotariam algum dos argumentos ao realizar um teste no Ensino Superior. Os resultados evidenciaram uma preferência pelos argumentos formais, e indicaram que a simples aparência de uma resposta associada à linguagem algébrica, às vezes, é suficiente para convencê-los, ainda que logicamente contraditória. A segunda etapa da pesquisa, pretende investigar o posicionamento dos mesmos sujeitos, agora licenciandos concluintes.

Palavras-chave: Argumentação. Licenciandos ingressantes. Raciocínio dedutivo.

ABSTRACT

This article presents the first part of a broad research, whose second stage is in progress. The objective is to analyze nine arguments about the sum of the internal angles of a triangle in the light of the theoretical framework and to investigate how undergraduate students entering Mathematics interpret and evaluate such arguments, from three different points of view. Initially, participants should put themselves in the place of a teacher to evaluate the nine arguments presented; then answer whether they would use some of these in their classes. Finally, they should answer whether they would adopt any of the arguments when taking a test in higher education. The results showed a preference for formal arguments, and indicated that the simple appearance of a response associated with algebraic language, sometimes, is sufficient to convince them, even if logically contradictory. The second stage of the research aims to investigate the positioning of the same subjects, now concluding graduates.

Keywords: Argumentation. Freshmen Mathematics undergraduates. Deductive reasoning.

RESUMEN

Este artículo presenta la primera parte de una amplia investigación, cuya segunda etapa está en curso. El objetivo es analizar nueve argumentos sobre la suma de los ángulos internos de un triángulo a la luz del marco teórico e investigar cómo los estudiantes de licenciatura en Matemáticas interpretan y evalúan tales argumentos, desde tres puntos de

1 Doutorando em Ensino e História da Matemática e da Física pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (PEMAT/UFRJ). Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES). E-mail: profjoaocaldato@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6951-3590>.

2 Doutora em Educação Matemática pelo King's College da Universidade de Londres. Pesquisadora do Projeto Fundação e Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (PEMAT/UFRJ). E-mail: lnasser.mat@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6050-4807>.

vista diferentes. Inicialmente, los participantes debían ponerse en el lugar de un profesor para evaluar cada uno de los nueve argumentos presentados; en seguida, responder si usarían algunos de estos argumentos en sus clases. Finalmente, ellos deberían responder si adoptarían alguno de los argumentos a la hora de realizar una prueba en Educación Superior. Los resultados mostraron una preferencia por los argumentos formales, y indicaron que la simple aparición de una respuesta asociada con el lenguaje algebraico, a veces, es suficiente para convencerlos, aunque sea lógicamente contradictorio. La segunda etapa de la investigación pretende investigar el posicionamiento de los mismos sujetos, ahora estudiantes graduados.

Palabras-clave: Argumentación. Estudiantes ingresantes. Razonamiento deductivo.

INTRODUÇÃO

Este artigo apresenta a primeira parte de uma pesquisa ampla, cuja segunda etapa está em andamento. Trata-se do recorte de uma dissertação de mestrado (CALDATO, 2018), realizada no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (PEMAT/UFRJ), que teve como objetivo geral investigar as concepções de ingressantes em cursos de Licenciatura em Matemática sobre argumentação, prova e demonstração. Esta pesquisa consistiu num estudo de campo e os dados foram coletados por meio da aplicação presencial de um questionário, composto por sete questões, a uma amostra por conveniência, durante o mês de agosto de 2017. Ao todo, a pesquisa teve 78 participantes, de três instituições públicas de Ensino Superior localizadas na região Sudeste, sendo um instituto federal, uma universidade estadual e uma universidade federal. É importante destacar que todos os licenciandos³ já haviam cursado o primeiro período nas suas respectivas instituições.

Este recorte se debruça sobre uma questão que envolve a soma dos ângulos internos de um triângulo. Para isso, foram apresentados nove argumentos criados pelos autores ou inspirados na revisão de literatura. Cada um deles foi associado a um nome fictício, representando um possível estudante da Educação Básica, o que foi denotado por alunos fictícios. Posteriormente, os licenciandos ingressantes deveriam interpretar e avaliar tais argumentações sob três pontos de vista distintos, os quais estão detalhados adiante. Em vista disso, o objetivo deste artigo é analisar os nove argumentos à luz dos referenciais teóricos (BALACHEFF, 1988; HAREL; SOWDER, 1998) e investigar como os sujeitos pesquisados interpretam e avaliam cada um deles.

A escolha por esse público-alvo se deve ao fato de que, em 2017, o primeiro autor cursava o mestrado sob a orientação da segunda autora e, na época, a primeira parte da pesquisa foi realizada com ingressantes. A segunda etapa está em andamento, no doutorado, com os mesmos sujeitos, agora concluintes ou recém-egressos da Licenciatura, a fim de comparar seus posicionamentos em dois momentos extremos do curso de graduação.

A importância da argumentação no ensino de Matemática vem ganhando cada vez mais destaque nos documentos oficiais. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), por exemplo, descreve que, nos anos finais do Ensino Fundamental, é esperado que os alunos iniciem, gradativamente, “na compreensão, análise e avaliação da argumentação matemática. Isso envolve a leitura de textos matemáticos e o desenvolvimento do **senso crítico em relação à argumentação** neles utilizada” (BRASIL, 2018, p. 299, grifo dos autores).

Por outro lado, no contexto da formação inicial, quais seriam os critérios de validade por parte dos futuros professores em relação à argumentação? Em outras palavras e adaptando a esta

³ Durante este artigo, adotou-se o termo “licenciandos” para se referir aos estudantes que ingressaram nos cursos de Licenciatura em Matemática no ano de 2017 e fizeram parte da amostra.

pesquisa, como os licenciandos ingressantes de Matemática interpretam e avaliam os argumentos de alunos fictícios da Educação Básica sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo? Responder a esta pergunta constitui parte do objetivo deste artigo.

A maneira como um [futuro] professor interpreta e avalia as respostas dos alunos tem uma relação implícita com a forma em que ele é convencido e com seus critérios de validade. Isso se justifica pelo fato de um mesmo argumento poder assumir diferentes graus de convicção, dependendo de quem se pretende convencer. É nesse sentido que Balacheff (1987) define o que é uma argumentação: consiste num discurso, oral ou escrito, destinado a convencer alguém sobre a veracidade de uma afirmação. O interlocutor, por sua vez, pode aceitar, recusar ou discutir as razões apresentadas. Essa interpretação converge para uma descrição proposta nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), os quais já evidenciavam que uma argumentação não é sinônimo de demonstração: “a argumentação está mais próxima das práticas discursivas espontâneas e é regida mais pelas leis de coerência da língua materna do que pelas leis da lógica formal que, por sua vez, sustenta a demonstração” (BRASIL, 1998, p. 70).

Este artigo está estruturado do seguinte modo: inicialmente, a fundamentação teórica à luz da tipologia de provas de Balacheff (1988) e dos esquemas de provas de Harel e Sowder (1998); em seguida, os procedimentos metodológicos, com destaque para as análises didáticas (*a priori* e *a posteriori*) da segunda questão extraída dos questionários respondidos pelos 78 ingressantes; por fim, uma síntese dos resultados, as considerações finais e as referências.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA: A TIPOLOGIA E OS ESQUEMAS DE PROVA

Os modelos teóricos adotados nesta pesquisa foram a Tipologia de Provas de Balacheff (1988) e os Esquemas de Prova de Harel e Sowder (1998).

O pesquisador francês Balacheff elaborou uma tipologia organizada em **provas pragmáticas** e **provas conceituais**. O primeiro tipo se apoia na verificação empírica (exemplos numéricos, desenhos, observações) para justificar uma afirmação, enquanto o segundo é caracterizado pela lógica matemática e em teorias que permitam a validação de uma propriedade. Além disso, Balacheff (1988) descreve quatro níveis considerando os raciocínios e conhecimentos apresentados ao elaborar uma justificativa. O Quadro 1 apresenta a descrição de cada um desses níveis, além de exemplificá-los com base na seguinte afirmação: “A soma de dois números pares resulta em um número par”.

Quadro 1 - Descrição e exemplos para os níveis de prova da tipologia de Balacheff.

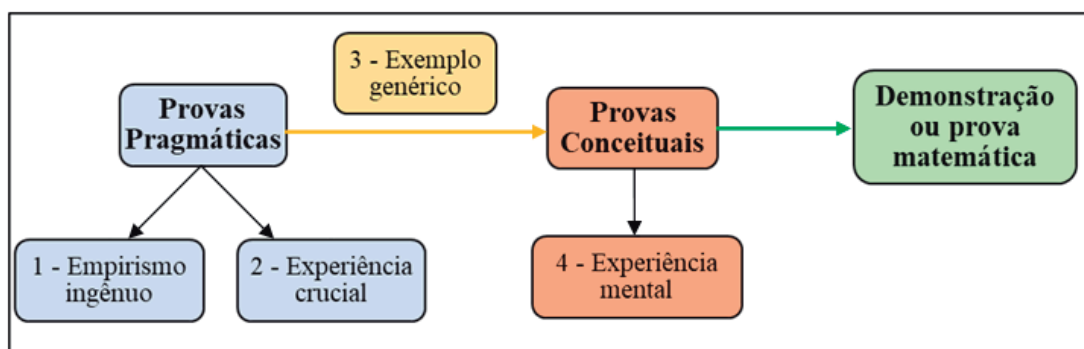
NÍVEIS	DESCRIÇÃO	EXEMPLOS
Empirismo ingênuo	O estudante valida uma conjectura através da verificação de poucos e simples casos, sem questionamento algum quanto às suas particularidades	O estudante verifica a validade da afirmação testando alguns exemplos: $2+4=6$ $6+8=14$
Experiência crucial	O estudante utiliza um experimento particular para investigar a veracidade de uma proposição, com indícios de uma possível generalização.	O estudante julga que, mostrando que a afirmação vale com números muito grandes, valerá para todos os demais. $2796+4250=7046$ $23456+19868=43314$

Exemplo genérico	O estudante elege um exemplo como representante da classe de objetos para explicitar as razões que validam a propriedade, com o intuito de deduzir as características que representam essa classe.	O estudante elege a adição $6+8$ como representante da classe de objetos. Como 6 e 8 são números pares, é possível escrevê-los como 2×3 e 2×4 . Ao colocar o fator comum 2 em evidência, ele conclui que a soma também é par, pois, $6+8=2 \times (3+4)$.
Experiência mental	O estudante se baseia no raciocínio dedutivo para garantir a validade de uma propriedade para toda a classe de objetos.	O estudante raciocina que se p e q são dois números pares, então existem inteiros k_1 e k_2 , tais que: $p=2k_1$ e $q=2k_2$. Portanto, $p+q=2k_1+2k_2=2(k_1+k_2)$. Logo, a soma também é par.

Fonte: construção dos autores.

A Figura 1 apresenta um diagrama sobre a interpretação dos autores a respeito da tipologia de provas:

Figura 1 - Classificação dos níveis de prova.



Fonte: construção dos autores.

Na Figura 1 é possível verificar que os tipos de prova remetem a uma transição evolutiva (do empirismo ingênuo à experiência mental) da noção de demonstração (ou prova matemática), a qual é aceita pela comunidade matemática, sendo composta por uma sequência de afirmações articuladas segundo uma lógica dedutiva preestabelecida (BALACHEFF, 1987). Essa conceituação foi adotada ao longo do artigo.

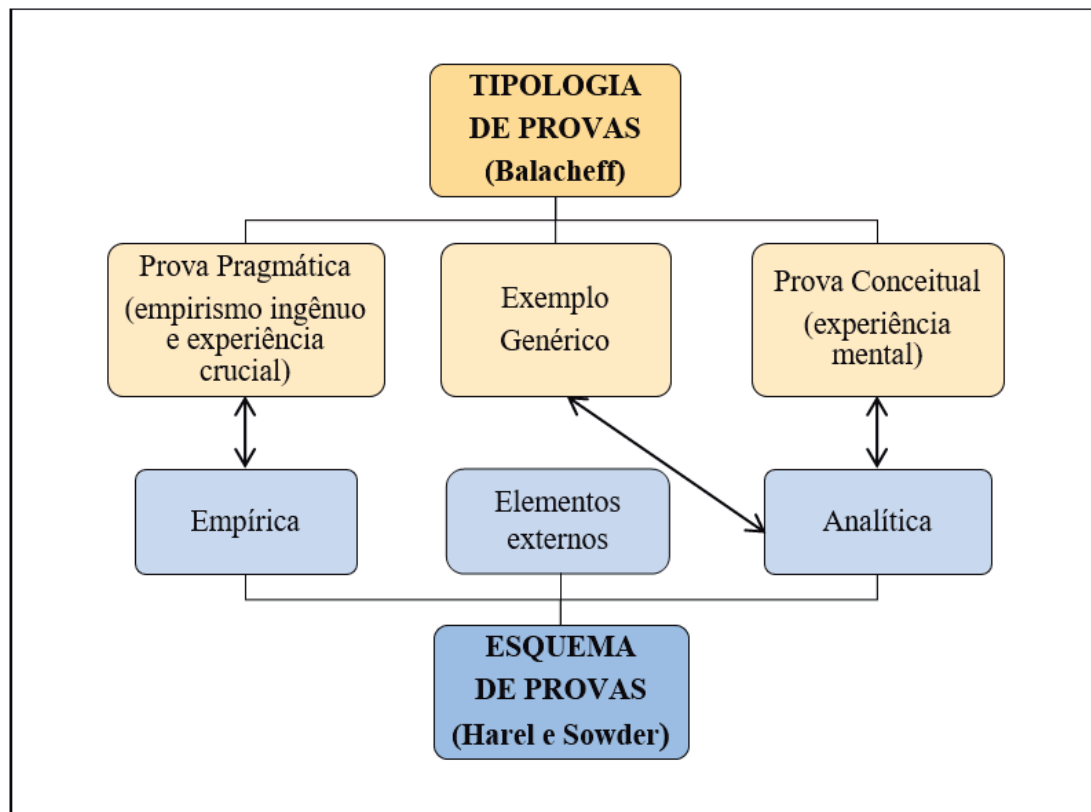
Por sua vez, Harel e Sowder (1998) desenvolveram um estudo para investigar o modo como os estudantes averiguam ou persuadem outrem sobre a validade de uma afirmação matemática. A terminologia para se referir a isso foi **esquemas de prova**. Ao contrário da tipologia, essa noção é centrada no sujeito. Por essa razão, a maior preocupação está em caracterizar o que, na perspectiva do indivíduo, pode ser considerado como prova. Como resultado desse estudo, os pesquisadores identificaram três esquemas principais, sendo que cada um deles possui suas respectivas subdivisões.

Sem pormenorizar, no **esquema baseado em elementos externos** (prova autoritária, prova ritual e prova simbólica) são fatores externos ao problema que influenciam na convicção do indivíduo. Esses fatores estão relacionados, por exemplo, ao uso de argumento de autoridade ou ao modo como ele é apresentado. Já o **esquema empírico** (prova indutiva e prova perceptiva) ocorre quando a validade de uma sentença é influenciada por evidências numéricas a partir da verificação de um ou mais exemplos, ou através da percepção. E o **esquema analítico** (provas transformacionais e provas axiomáticas) é identificado por apresentar três características essenciais: generalidade, pensamento operacional e dedução lógica.

De acordo com os modelos teóricos apresentados, é possível observar algumas articulações entre eles. A noção de prova pragmática cunhada por Balacheff (1988), em que se enquadram os níveis de prova intitulados empirismo ingênuo e experiência crucial, remete à definição de Harel e Sowder (1998) para o esquema de prova empírica, visto que em ambos os modelos teóricos, essas terminologias se referem ao uso de argumentos empíricos para validar uma sentença. Já a noção de prova conceitual, onde está situado o nível de prova intitulado experiência mental, remete à descrição do esquema de prova analítica, pois faz menção ao uso de argumentos dedutivos para validar uma afirmação. Quanto ao nível de prova denominado exemplo genérico, que consiste num estágio de transição entre a prova pragmática e conceitual, também remete à descrição do esquema de prova analítica, por satisfazer as três características essenciais mencionadas anteriormente (HAREL; SOWDER, 2007).

Com base nisso, a Figura 2 apresenta um diagrama sobre a interpretação dos autores acerca da verossimilhança entre a classificação proposta em ambos os modelos teóricos:

Figura 2 - Diagrama das possíveis articulações entre a tipologia e os esquemas de prova.



Fonte: construção dos autores.

De acordo com a Figura 2, não foi possível relacionar o esquema de prova baseado em elementos externos com nenhum nível da tipologia. Além disso, é importante destacar que a principal diferença entre ambos os modelos teóricos é com relação ao nível epistemológico. A tipologia de provas foi elaborada por meio de uma abordagem experimental, em que Balacheff (1988) analisou

as respostas apresentadas pelos alunos para validar certa sentença matemática. Nela é possível observar níveis de provas que remetem a uma transição evolutiva da noção de demonstração (do empirismo ingênuo à experiência mental). Já o esquema de provas, por ter sido elaborado por meio da metodologia *teaching experiment*, permitiu que Harel e Sowder (1998) levassem em consideração não apenas as respostas escritas pelos estudantes, mas também o modo como eles averiguavam ou persuadiam outrem sobre a validade de uma conjectura.

Em síntese, a escolha de ambos os modelos teóricos foi motivada por acreditar que elas não se sobrepõem, mas se complementam. Desta forma, os estudos de Balacheff (1987, 1988) e Harel e Sowder (1998, 2007) nortearam esta pesquisa, desde a elaboração da questão a ser analisada neste artigo, com destaque para os nove argumentos dos alunos fictícios até a interpretação dos dados coletados com os licenciandos ingressantes.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS: DA COLETA A ANÁLISE DOS DADOS

A pesquisa de Caldato (2018) foi realizada com 78 licenciandos, denotados, respectivamente, por L1, L2, ..., L78, que ingressaram no curso de Licenciatura em Matemática no ano de 2017, de três instituições públicas de Ensino Superior.

Este artigo apresenta um recorte da pesquisa descrita anteriormente, cujo foco é nas respostas dos ingressantes para a segunda questão do questionário. O objetivo dessa questão era compreender como os licenciandos interpretam e avaliam as nove argumentações propostas pelos autores deste artigo e que foram associadas a nomes de alunos fictícios da Educação Básica, conforme está detalhado na próxima seção. Em vista disso, na referida questão foram propostas três situações baseadas na seguinte afirmação: **a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer é sempre igual a 180°**. A motivação desta escolha é por se tratar de um resultado importante da Geometria Euclidiana, abordado desde o Ensino Fundamental, além da possibilidade de criar diferentes respostas para justificá-lo. Na situação I, solicitou-se aos participantes que se colocassem no lugar de um professor da Educação Básica e que avaliassem cada um dos nove argumentos apresentados, numa escala de 0 a 10, justificando as notas atribuídas. Este procedimento de investigação foi inspirado em Healy e Hoyles (1998), em que as pesquisadoras investigaram as escolhas de alunos do Reino Unido para algumas argumentações, em que deveriam indicar qual delas mais se aproximaria da sua resposta e também a que seu professor atribuiria maior nota.

Nas situações seguintes, o propósito era observar se o critério de validade dos participantes se alterava de acordo com o nível de ensino, isto é, na Educação Básica e no Ensino Superior. Na situação II, cujo contexto era uma aula sobre triângulos na Educação Básica, os ingressantes deveriam responder se eles utilizariam algum(ns) do(s) nove argumentos, justificando a sua resposta. E, na situação III, supôs-se que os licenciandos iriam realizar um teste na disciplina de Geometria Euclidiana, no qual foi solicitado que eles mostrassem este resultado geométrico. A pergunta era se eles adotariam algum dos nove argumentos, justificando a sua resposta.

O procedimento metodológico adotado para analisar a questão proposta neste artigo foi inspirado na tese de Ordem (2015), que denomina esse método como análise didática (*a priori* e *a posteriori*). Basicamente, consiste em analisar a questão antes da aplicação do questionário nas instituições e, em seguida, analisar os dados coletados após a aplicação. Acredita-se que esse modelo tem inspiração na Engenharia Didática, apesar de Ordem (2015) não fazer menção a isso em seu estudo. No caso da pesquisa descrita neste artigo, não houve nenhuma experimentação com os participantes entre as análises *a priori* e *a posteriori*.

ANÁLISE A PRIORI: OS ARGUMENTOS DOS NOVE ALUNOS FICTÍCIOS

Nesta seção são apresentados os argumentos dados por cada um dos nove alunos fictícios (Ana, Bruno, Carlos, Dani, Edu, Fábio, Gabi, Helena e Igor) e comentários relativos à validade deles. É importante ressaltar que esses nomes foram criados para ilustrar diferentes respostas de alunos da Educação Básica, de modo que a amostra constituída por licenciandos ingressantes (indicados por L1, L2, ..., L78) pudessem analisá-las.

A Figura 3 mostra a resposta da Ana, que validou a afirmação apenas para alguns casos e não para qualquer triângulo, sem mencionar a imprecisão do instrumento de medida adotado, no caso, o transferidor. Deste modo, é possível categorizar esse argumento como empirismo ingênuo na tipologia de provas ou ainda como um esquema de prova indutiva.

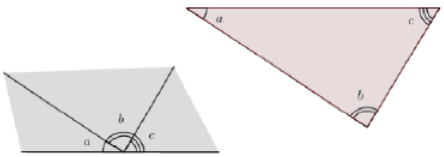
Figura 3 - Argumentação da Ana.

Resposta da Ana: Eu desenhei vários triângulos e medi todos os ângulos cuidadosamente com o auxílio do transferidor e fiz a seguinte lista e como em todos eles a soma foi de 180° , a afirmação é verdadeira.	$60^\circ + 60^\circ + 60^\circ = 180^\circ$
	$37^\circ + 52^\circ + 91^\circ = 180^\circ$
	$112^\circ + 26^\circ + 42^\circ = 180^\circ$
	$30^\circ + 120^\circ + 30^\circ = 180^\circ$
	$3^\circ + 87^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

Fonte: construção dos autores.

Assim como o argumento da Ana, o processo de validação do Bruno ilustrado na Figura 4 também é impreciso.

Figura 4 - Argumentação do Bruno.

<p>Resposta do Bruno: Eu desenhei um triângulo escaleno, recortei os ângulos e coloquei-os juntos. Observei que os ângulos do triângulo formaram um ângulo de meia volta. Logo a afirmação é verdadeira. Eu também repeti esse procedimento num triângulo isósceles e num triângulo equilátero, e cheguei ao mesmo resultado.</p>	
--	--

Fonte: construção dos autores.

Apesar do cuidado em repetir o procedimento para três tipos de triângulos e de fornecer um *insight* sobre a veracidade da afirmação, a resposta do Bruno está longe de ser rotulada como uma prova matemática. Logo, o seu argumento pode ser classificado como experiência crucial ou ainda como um esquema de prova perceptiva.

Com relação à Figura 5, é possível observar que Carlos durante o seu processo de prova não se restringiu a casos particulares, mas descreveu uma sequência de argumentos dedutivos, marcada por um uso apropriado da linguagem matemática e de conceitos preliminares para mostrar que a afirmação é verdadeira.

Figura 5 - Argumentação do Carlos.

Resposta do Carlos: Eu prolonguei a base do triângulo e desenhei uma reta r paralela a um dos lados do triângulo. Notei que $d = b$, pois são ângulos alternos internos entre duas retas paralelas. Além disso, observei que $e = a$, pois são ângulos correspondentes entre duas retas paralelas cortadas por uma transversal. Logo, $c + d + e = 180^\circ$ e, portanto, $a + b + c = 180^\circ$. Deste modo, a afirmação é verdadeira.

Fonte: construção dos autores.

É possível afirmar que Carlos atingiu o nível da experiência mental e elaborou um esquema de prova analítica, visto que o seu argumento consiste numa demonstração.

A Figura 6 mostra a resposta da Dani, que utilizou uma retórica excessivamente algébrica, e ao mesmo tempo, contraditória.

Figura 6 - Argumentação da Dani.

Resposta da Dani: Eu desenhei um triângulo isósceles com o ângulo $b = 65^\circ$. Como o triângulo é isósceles, os ângulos da base são iguais ($b = c$). Logo, $a + 2b = 180^\circ$. Como $b = 65^\circ$, temos que $a = 180^\circ - 2 \cdot 65^\circ$, ou seja, $a = 50^\circ$. Assim, $a = 50^\circ$, $b = 65^\circ$, e $c = 65^\circ$ e, portanto, $a + b + c = 180^\circ$. Desta forma, a afirmação é verdadeira.

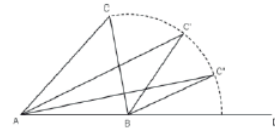
Fonte: Healy e Hoyles (1998, n.p).

Inicialmente seria possível afirmar que Dani se baseou numa verificação empírica para validar a afirmação. Porém, a sua resposta apresenta uma inconsistência lógica. Ao afirmar que $a + 2b = 180^\circ$, ela utiliza aquilo que se quer provar (tese) como algo já conhecido (hipótese). Deste modo, levando em consideração que fatores externos ao problema (aparência e manipulações algébricas) poderiam influenciar na convicção do participante, essa resposta se enquadra como um esquema baseado em elementos externos (ritual e simbólico). Mesmo tendo usado um empirismo ingênuo ao particularizar, não é possível classificá-la na tipologia de provas visto que a argumentação é inconsistente.

Por sua vez, Edu recorreu ao uso de ambientes de Geometria Dinâmica (GD) para confirmar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° , ao notar que a medida de B tende a um ângulo raso, como é possível observar na Figura 7.

Figura 7 - Argumentação do Edu.

Resposta do Edu: Eu observei que quando o vértice C se aproxima da reta AB , as medidas dos ângulos A e C se aproximam de 0° e a medida do ângulo B se aproxima de 180° . Logo a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° .



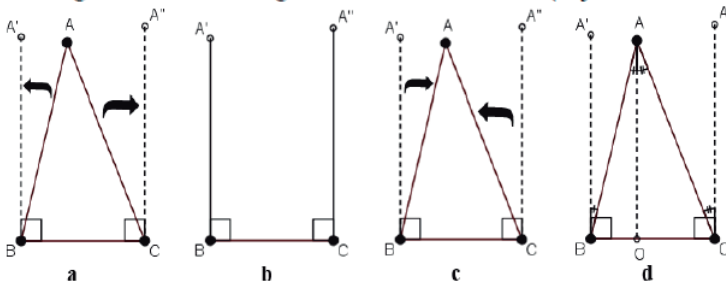
Fonte: Ordem (2015, p. 211).

Esta resposta remete ao esquema perceptivo. Já na tipologia de provas, a argumentação pode ser enquadrada apenas como uma experiência crucial, pois apesar das potencialidades ofertadas pelos *softwares* de GD, Edu se limitou a uma simples exploração que não fornece ideias para elaborar uma demonstração.

A Figura 8 apresenta a argumentação do Fábio, que se enquadra no esquema de prova transformacional, uma vez que é possível observar as três características essenciais.

Figura 8 - Argumentação do Fábio.

Resposta do Fábio: Eu pensei da seguinte forma. Imagina que os lados AB e AC do triângulo ABC são girados em direções opostas com relação aos vértices B e C (*figura a*), respectivamente, até que seus ângulos com o segmento BC serem 90° (*figura b*). Esta ação transforma o triângulo ABC na figura $A'BCA''$, onde os segmentos $A'B$ e $A''C$ são perpendiculares ao segmento BC . Logo, a soma dos ângulos $A'\hat{B}C + B\hat{C}A'' = 180^\circ$. Para recriar o triângulo ABC , basta girar novamente os segmentos $A'B$ e $A''C$ em direções opostas até que os pontos A' e A'' gerem o ponto A (*figura c*). Note que nessa ação eu devo descontar os ângulos $A'\hat{B}A$ e $A''\hat{C}A$, mas, ao mesmo tempo, eu devo acrescentar o novo ângulo $B\hat{A}C$. Porém, ao traçar o segmento AO perpendicular a BC , observei que os ângulos $A'\hat{B}A$ e $A''\hat{C}A$ são congruentes aos ângulos $B\hat{A}O$ e $O\hat{A}C$ (cuja soma é igual ao ângulo $B\hat{A}C$),



respectivamente, pois são ângulos alternos internos (*figura d*). Logo, a soma dos ângulos internos ao triângulo permanece igual a 180° e, portanto, a afirmação é verdadeira.

Fonte: Harel e Sowder (1998, p. 259).

Note que todas as ações do Fábio estão direcionadas à validade da afirmação em sua **generalidade**, não se limitando a casos particulares. Ao transformar o triângulo, ele conseguiu **antecipar os resultados**, a saber, que as mudanças nos ângulos B e C causadas pelas transformações seriam compensadas pela criação do ângulo A . E por meio do **raciocínio dedutivo**, ele concluiu que a soma

dos ângulos internos de um triângulo é de fato 180° . Já na tipologia, esta resposta pode ser enquadrada como exemplo genérico. Contudo, é importante mencionar que essa categorização reflete apenas a interpretação dos autores, visto que na literatura esse argumento gera divergências. Enquanto alguns pesquisadores como, por exemplo, Knuth (2002a) o considera como uma demonstração, outros afirmam que ele auxilia apenas a desenvolver a intuição e requer um nível maior de formalidade para receber o *status* de prova (FISCHBEIN, 1982⁴ apud REID; KNIPPING, 2010).

Na Figura 9 é possível observar que Gabi recorreu ao uso de um argumento de autoridade, que se enquadra no esquema de prova autoritária.

Figura 9 - Argumentação da Gabi.

Resposta da Gabi: Como estudei no livro que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo é dada pela fórmula $S_n = (n - 2) \times 180^\circ$, onde n é o número de lados do polígono, basta substituir por $n = 3$. Logo, obtive que $S_3 = 180^\circ$, mostrando que a afirmação é verdadeira.

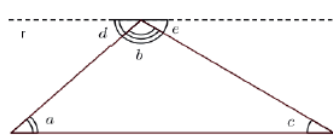
Fonte: construção dos autores.

Note ainda que a resposta da Gabi é inconsistente, pois para deduzir tal fórmula, é necessário saber como premissa que a soma dos ângulos internos do triângulo é igual a 180° , e no caso, ela assumiu a fórmula como um pré-requisito para validar a proposição. Além disso, não é possível categorizar esta resposta na tipologia de provas, visto que a argumentação é cíclica.

A resposta da Helena, ilustrada na Figura 10, é uma versão adaptada da descrita por Carlos, porém essa tende a ser mais utilizada em livros-texto. A única diferença entre ambas é com relação ao traço da reta r paralela a um dos lados do triângulo. Mas será que os licenciandos também se atentaram a isso?

Figura 10 - Argumentação da Helena.

Resposta da Helena: Eu desenhei uma reta r paralela à base do triângulo. Observei que $d = a$ e $e = c$, pois são ângulos alternos internos entre duas retas paralelas. Assim, $d + b + e = 180^\circ$, pois estão sob uma linha reta. Logo, $a + b + c = 180^\circ$. Portanto, a afirmação é verdadeira.



Fonte: construção dos autores.

Assim como a resposta fornecida por Dani, Igor também utilizou uma argumentação excessivamente algébrica e contraditória, conforme ilustra a Figura 11.

⁴ FISCHBEIN, E. Intuition and Proof. *For the Learning of Mathematics*, v. 3, n. 2, p. 9-18, 1982.

Figura 11 - Argumentação do Igor.

Resposta do Igor: Eu dividi o triângulo ABC em dois triângulos menores ADC e BCD , e chamei de x a soma dos ângulos de um triângulo. Desta forma, no triângulo ADC se tem $a + c_1 + d_1 = x$ e no triângulo BCD se tem $b + c_2 + d_2 = x$. Portanto, $a + b + c_1 + c_2 + d_1 + d_2 = 2x$, o que resulta em $a + b + c + 180^\circ = 2x$. Como a soma dos ângulos internos no triângulo ABC é dada por $a + b + c = x$, substituindo na equação anterior se tem $x + 180^\circ = 2x$, e, portanto $x = 180^\circ$. Logo, a afirmação é verdadeira.

Fonte: Van Asch (1993, p. 303).

Ao afirmar que a soma dos ângulos internos nos triângulos ADC e BCD é igual a x , Igor parte da premissa que tal soma é sempre a mesma para quaisquer triângulos. Logo, ele utiliza aquilo que se quer provar (tese), no caso mostrar que essa soma é sempre igual a 180° , como algo já conhecido (hipótese), não constituindo uma demonstração. Deste modo, elege-se a resposta do Igor como um esquema baseado em elementos externos (ritual e simbólico). Além disso, não é possível classificá-la na tipologia de provas por ser contraditória.

O Quadro 2 sintetiza a classificação dos nove argumentos descritos anteriormente, com base nos modelos teóricos adotados.

Quadro 2 - Classificação teórica dos argumentos descritos pelos alunos fictícios.

ARGUMENTOS DOS ALUNOS	TIPOLOGIA DE PROVAS	ESQUEMAS DE PROVA
Ana	Empirismo ingênuo	Indutiva
Bruno	Experiência crucial	Perceptiva
Carlos	Experiência mental	Analítica
Dani	Sem classificação	Ritual e simbólico
Edu	Experiência crucial	Perceptiva
Fábio	Exemplo genérico	Transformacional
Gabi	Sem classificação	Autoritária
Helena	Experiência mental	Analítica
Igor	Sem classificação	Ritual e simbólico

Fonte: construção dos autores.

A partir do Quadro 2 foi possível agrupar os nove argumentos em três níveis decrescentes de validade:

1. Por utilizarem o raciocínio dedutivo, as respostas do Carlos, da Helena e do Fábio são as que mais se aproximam da noção de demonstração descrita por Balacheff (1987), pois validam a propriedade geométrica para qualquer triângulo;

2. Ainda que as respostas da Ana, do Bruno e do Edu não garantam a validade da afirmação para todos os triângulos, acredita-se que tais justificativas, por meio do uso de figuras e exemplos, auxiliam na investigação da propriedade e fornecem *insights* sobre a veracidade da sentença;
3. Já as respostas da Dani, do Igor e da Gabi não validam a propriedade geométrica, uma vez que os argumentos são logicamente inconsistentes.

É importante ressaltar que esses níveis refletem apenas a interpretação dos autores sobre o que constitui um argumento válido, pois segundo Weber (2003⁵ *apud* ORDEM, 2015), o que pode ser considerado ou não, depende da autoridade de quem avalia a produção. E esta questão, em particular, a situação I, foi elaborada na tentativa de compreender como os ingressantes interpretam e avaliam as argumentações de alunos.

A seguir são apresentadas, em três seções, as análises *a posteriori* das situações I, II e III, respectivamente.

ANÁLISE A POSTERIORI DA SITUAÇÃO I: AS AVALIAÇÕES DOS LICENCIANDOS SOBRE AS ARGUMENTAÇÕES

Na situação I os participantes deveriam avaliar cada um dos nove argumentos, numa escala de 0 a 10, justificando as notas atribuídas. A partir das justificativas dos ingressantes, foram elaboradas oito categorias, com base na análise de conteúdo. Embora existam diversos pesquisadores que proponham diferentes descrições do processo da análise de conteúdo, adotou-se a de Bardin (2016), a qual afirma que o processo se organiza em torno de três etapas cronológicas: a pré-análise; a exploração do material; e o tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação. Neste artigo não foi detalhado o que constitui cada uma das etapas.

O Quadro 3 apresenta cada uma das categorias e a distribuição das justificativas dos licenciandos em relação aos argumentos dos alunos fictícios.

Quadro 3 - Categorização das justificativas dos licenciandos na situação I.

CATEGORIAS Justificativas que:	ARGUMENTOS DOS ALUNOS ⁶									Frequência (em %) ⁷
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	
Valorizaram a argumentação	19	31	67	21	21	38	27	64	45	47,4%
Destacaram a imprecisão do método utilizado ou a ausência de rigor matemático	21	26	0	4	30	6	32	0	1	17,1%
Afirmaram que a argumentação era válida apenas para os casos listados	18	16	0	34	0	0	0	0	0	9,7%
Afirmaram que a argumentação não era convincente ou não era válida	17	2	0	1	12	0	4	0	1	5,3%
Observaram a inconsistência lógica dos argumentos	0	0	0	13	0	0	3	0	15	4,4%

5 WEBER, K. Students' difficulties with proof. *The Mathematical Association of America*, n. 8, jun. 2003 (não paginado).

6 Por uma questão estética, optou-se por utilizar apenas a primeira letra do nome para se referir ao argumento do(a) aluno(a), no caso, A para a resposta da Ana, e assim sucessivamente.

7 Para o cálculo da frequência (em %), como a amostra era composta por 78 ingressantes e cada um deveria apresentar 9 justificativas, o número total é 702. Deste modo, somou-se o número de justificativas presentes em cada uma das categorias e a porcentagem foi calculada em relação ao número total.

Evidenciaram equívocos conceituais dos licenciandos	1	0	6	1	1	2	0	8	3	3,1%
Alegaram que o raciocínio apresentado era confuso ou complexo.	0	0	0	0	2	14	0	1	3	2,8%
Sem justificativa	2	3	5	4	12	18	12	5	10	10,1%
Total	78	78	78	78	78	78	78	78	78	100%

Fonte: construção dos autores.

Para a elaboração destas categorias, o ponto de partida foi interpretar como o licenciando justificava cada nota atribuída. Ressalta-se que as categorias criadas são disjuntas, em consonância com a análise de conteúdo de Bardin (2016). Caso uma dada resposta apresentasse elementos pertencentes a mais de uma categoria, esta foi inserida na categoria mais representativa, levando em consideração a nota atribuída e as demais justificativas daquele participante.

Com o intuito de atribuir significado aos índices do Quadro 3, foi apresentado a seguir uma síntese das justificativas dos licenciandos para cada uma das categorias listadas.

A primeira categoria diz respeito às **justificativas que valorizaram a argumentação**, ainda que a nota atribuída não seja a máxima. Dentre os licenciandos que se propuseram a apresentar alguma resposta, foi a única que apresentou indivíduos em todas as colunas, atingindo o maior percentual com 47,4% do número total de justificativas. Isto significa que independentemente do nível de validade, todas as respostas foram valorizadas por uma parte da amostra. Dentre as 9 argumentações, as que mais se destacaram foram do Carlos e da Helena, as quais eram baseadas no raciocínio dedutivo e apresentaram índices superiores a 80% de aceitação. Para exemplificar, considere o extrato do L68, ilustrado na Figura 12:

Figura 12 - Avaliação do licenciando L68 para o argumento do Carlos.

Nota do Carlos: 10 Justificativa: Usou conhecimentos prévios (ângulos alternos, etc) generalizou para qualquer caso e usou de um argumento visual.

Fonte: dados da pesquisa.

Contudo, apesar dos dois argumentos mais valorizados pelos respondentes serem pautados na dedução lógica, a resposta do Igor, mesmo sendo inconsistente, também obteve índice de aceitação superior à metade da amostra, com 45 licenciandos. Uma dessas justificativas foi dada pelo L2: “9, ótima utilização algébrica e do raciocínio lógico”.

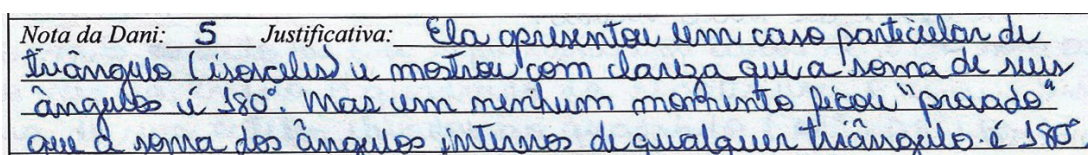
A segunda categoria se refere às **justificativas que destacaram a imprecisão do método utilizado** (por exemplo, baseados em aproximações ou meramente intuitivos) **ou a ausência do rigor matemático** (por exemplo, baseado em figuras ou escassez de argumentos algébricos), e representa 17,1% do número total de justificativas, a segunda maior frequência. Dentre elas, as respostas da Gabi e do Edu apresentaram os maiores índices.

As justificativas de 32 ingressantes para a resposta da Gabi se enquadram nesta categoria, especialmente por ela ter assumido a fórmula da soma dos ângulos internos de um polígono convexo como verdadeira, sem ao menos demonstrá-la. E com relação à resposta do Edu, 30 licenciandos

evidenciaram a imprecisão do método empregado por ele, principalmente por ser baseado na intuição. O extrato do L38 corrobora isso: “5, esta prova está baseada muito no achismo, estabeleça afirmações e demonstrações mais concretas”.

A terceira categoria diz respeito às **justificativas que afirmaram que a argumentação era válida apenas para os casos listados** e não para todos os triângulos. Ela emergiu apenas para as respostas descritas por Ana, Bruno e Dani, a qual representa 9,7% do número total de justificativas. De certo modo, é compreensível esta percepção, visto que eles fizeram uso de casos particulares em suas investigações. Em especial, no caso da Dani, ainda que sua resposta fosse contraditória, ela se restringiu a um determinado triângulo isósceles. Possivelmente em virtude disso, as justificativas de 34 ingressantes se enquadram nesta categoria. Uma delas foi descrita pelo L22, como mostra a Figura 13:

Figura 13 - Avaliação do licenciando L22 para o argumento da Dani.



Nota da Dani: 5 Justificativa: Ela apresentou um caso particular de triângulo (isóscelo) e mostrou com clareza que a soma de seus ângulos é 180°. Mas um pequeno detalhe ficou "preso" que é a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180°.

Fonte: dados da pesquisa.

A quarta categoria se refere às **justificativas que afirmaram que a argumentação não era convincente ou não era válida** para o resultado geométrico. Essas últimas, em geral, não descreviam os motivos para isso e zeraram as notas (por exemplo, respostas como “não prova”, “errado”, “incorreto”, “não é adequada”). Essa categoria representa 5,3% do número total de justificativas e, dentre elas, se destacaram aquelas que foram descritas para os argumentos da Ana e do Edu.

Verificou-se que 17 participantes invalidaram ou não se convenceram com a resposta descrita por Ana, alegando, principalmente, que vários exemplos não eram suficientes para justificar uma afirmação, conforme dissertou o L52, após zerar a nota: “Uma série de exemplos a respeito de uma proposição não prova, necessariamente, a mesma”. No caso da resposta do Edu, as justificativas de 12 licenciandos se enquadram nesta categoria. Dentre eles, houve quem afirmou que o argumento não era convincente, como o L71 que ao atribuir nota 4, descreveu o seguinte questionamento: “[...] não me convenceu. Quem me garante que os ângulos serão 180°?”.

A quinta categoria diz respeito às **justificativas que observaram a inconsistência lógica dos argumentos**, no caso, dos que foram propostos por Dani, Gabi e Igor. Entretanto, foram poucos os licenciandos que conseguiram evidenciar tais contradições, tanto que essa categoria representa apenas 4,4% do número total de justificativas.

No caso da resposta da Dani, apenas 13 licenciandos conseguiram observar a inconsistência. Um deles foi o L52, que após zerar a nota, dissertou: “A sua lógica foi cíclica, ou seja, usou um argumento para justificar o mesmo. Isso não prova nada. Você afirmou o que quis provar”. Com relação à Gabi, somente três ingressantes evidenciaram a contradição do seu argumento. Apenas 15 foram capazes de interpretar a resposta do Igor e apontar fundamentos inconsistentes como, por exemplo, o L53 ao atribuir nota 3, justificando que o aluno “assumiu que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual”. Além disso, houve alguns participantes que apesar de evidenciarem a

contradição lógica do Igor, atribuíram boas notas (entre 7 e 8), alegando que o seu raciocínio algebrico estava correto. O fragmento do L64 corrobora isso: “7, *ele fez manipulações corretas nas equações, porém usa do próprio enunciado para demonstrá-lo*”.

A sexta categoria se refere às **justificativas que evidenciaram equívocos conceituais dos licenciandos** relacionados a tópicos de Geometria ou à noção de demonstração. Apenas 3,1% do número total de justificativas se enquadram neste grupo. Curiosamente, os argumentos do Carlos e da Helena, os mais valorizados, também apresentaram os maiores índices de justificativas com equívocos conceituais.

Na resposta do Carlos, por exemplo, seis participantes apresentaram esses equívocos, relacionados especialmente à noção de prova matemática. Verifica-se isso na justificativa do L70, que atribuiu nota 7 e apontou a necessidade de realizar uma investigação empírica antes da demonstração. Já o L10 não foi capaz de compreender a generalidade do argumento, ao afirmar que Carlos “*usou somente um caso, ficando vago a resposta*”. E o L29 julgou que esta resposta não estava totalmente correta, pois “*demonstra a veracidade da informação com a ajuda de uma reta auxiliar*”. Essa justificativa sugere uma visão equivocada para a noção de prova, em que não seria aceitável o uso de uma reta suporte. Contudo, o L29 não adotou os mesmos critérios em sua avaliação, visto que atribuiu nota máxima à resposta da Helena.

A sétima categoria diz respeito às **justificativas que alegaram que o raciocínio apresentado era confuso ou complexo**. Ela emergiu apenas nas respostas propostas por Edu, Fábio, Helena e Igor, representando 2,8% do número total de justificativas. Dentre elas, o argumento do Fábio foi o que apresentou o maior índice. Ao todo, 14 ingressantes o consideraram complicado e que gerava dúvidas, conforme afirma o L40: “4, *raciocínio confuso, prolongado. Existe uma lógica, porém poderia ser mais simples*”. Arelado a esse fato, a resposta do Fábio obteve o maior número de licenciandos que não apresentaram justificativas. Acredita-se que o fato de não ser um argumento usual pode ter dificultado a interpretação dos participantes.

A oitava e última categoria se refere aos que deixaram as **argumentações sem justificativas**, seja por não saber como validá-las ou por não compreendê-las ou ainda por não respondê-las. Ao todo, 10,1% do número de justificativas estiveram em branco por um dos motivos citados.

Para finalizar esta análise foi adotada alguns parâmetros estatísticos. O Quadro 4 mostra o comportamento das notas atribuídas para os nove argumentos, em função das medidas de posição (média aritmética, mediana e moda) e dispersão (desvio-padrão).

Quadro 4 - Medidas estatísticas das notas atribuídas pelos licenciandos na situação I.

MEDIDAS DE POSIÇÃO E DISPERSÃO	ARGUMENTOS DOS ALUNOS FICTÍCIOS								
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Média aritmética	5,7	7,2	9,3	5,7	5,7	7,9	6,6	9,3	8
Mediana	6	8	10	6	6	9	7	10	9
Moda	10	10	10	10	10	10	10	10	10
Desvio-padrão	3	2,5	1,5	3,1	3,3	2,9	3	1,3	2,8

Fonte: construção dos autores.

A seguir são destacadas algumas considerações sobre as notas dos licenciandos:

- É possível observar que os argumentos do Carlos e da Helena foram os preferidos pelos ingressantes, visto que tiveram a maior média e mediana e tiveram os menores índices de dispersão;
- As respostas do Igor e do Fábio apresentaram, respectivamente, o terceiro e o quarto maiores percentuais de valorização (Quadro 3). Isso explica o porquê obtiveram, nesta ordem, a terceira e a quarta melhores médias das notas;
- Dentre as três respostas (Ana, Bruno e Edu) que não se enquadravam como prova matemática, mas que forneciam *insights* sobre a veracidade da afirmação, a do Bruno foi a preferida, detendo a quinta melhor média e o terceiro menor desvio-padrão;
- Com relação às três respostas que não validavam a propriedade geométrica (Dani, Gabi e Igor), observa-se que não houve um consenso entre os participantes. Isso é reforçado pelas medidas de dispersão, as quais foram próximas ou superiores a 3 pontos.

É importante destacar que a moda das notas em todos os argumentos foi 10, ainda que alguns deles apresentassem raciocínios equivocados e bem diferentes.

ANÁLISE A POSTERIORI DA SITUAÇÃO II: UMA AULA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Na situação II os ingressantes deveriam escolher o(s) argumento(s) que eles utilizariam durante uma aula na Educação Básica e o Quadro 5 sintetiza a frequência dessas escolhas. Como eles poderiam indicar mais de um, a frequência total superou o número de participantes.

Quadro 5 - Distribuição das escolhas dos licenciandos na situação II.

ARGUMENTO(S) ESCOLHIDO(S) PARA UTILIZAR NO:	ARGUMENTOS DOS ALUNOS FICTÍCIOS								
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Ensino Básico (Situação II)	15	28	33	9	14	6	10	44	11

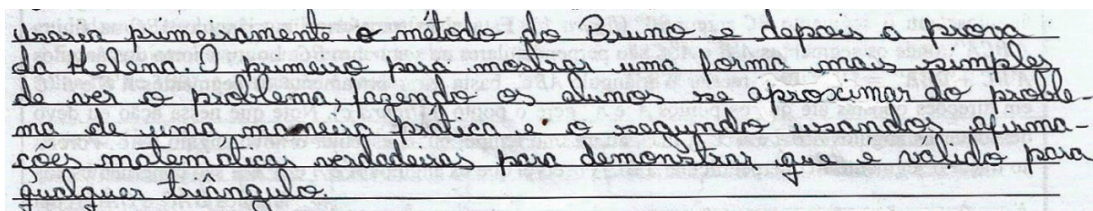
Fonte: construção dos autores.

É possível verificar no Quadro 5 que a escolha dos ingressantes tende para os raciocínios dedutivos, no caso, de Carlos e da Helena. Em geral, a justificativa para tal escolha era porque eles descreveram “*os pensamentos mais fáceis de compreender*” (Justificativa do L4). Isso pode ser um indicativo de que, em geral, as motivações eram mais baseadas na compreensão do argumento do que no nível de escolaridade em que hipoteticamente seria desenvolvido. Além disso, constatou-se que a resposta da Helena, ainda que fosse semelhante à do Carlos, foi a preferida pela amostra, tanto para o teste de Geometria Euclidiana quanto para lecionar na Educação Básica. Uma justificativa plausível é que a resolução da Helena costuma ser mais frequente nos livros-texto e, portanto, mais usual no ensino de Matemática.

Por outro lado, a resposta do Fábio, que também era baseada no raciocínio dedutivo, teve pouquíssima adesão, sendo o menos preferido para ser ensinado na Educação Básica. De acordo com o Quadro 3, apesar de 48,7% da amostra terem validado essa argumentação, 41% não apresentaram justificativas na situação I ou alegaram que o raciocínio do Fábio era complexo e gerava dúvidas. Acredita-se que esse último dado interferiu no voto dos respondentes, pois uma vez que eles não tenham compreendido muito bem o argumento apresentado, dificilmente o escolheriam.

Para uma aula na Educação Básica, uma resposta notável foi eleger o raciocínio de Bruno, o terceiro mais indicado e depois utilizar os argumentos do Carlos ou da Helena para validar o resultado, conforme dissertou o L74 (Figura 14):

Figura 14 - Resposta do licenciando L74 para a situação II.



Usaria primeiramente o método do Bruno e depois a prova da Helena. O primeiro para mostrar uma forma mais simples de ver o problema, fazendo os alunos se aproximarem do problema de uma maneira prática e o segundo usando afirmações matemáticas verdadeiras para demonstrar que é válido para qualquer triângulo.

Fonte: dados da pesquisa.

Além disso, cinco participantes não souberam responder ou responderam incorretamente e um afirmou que não escolheria nenhum dos nove argumentos, pois não os considerava adequados em termos de linguagem e clareza para serem ensinados na Educação Básica.

ANÁLISE A POSTERIORI DA SITUAÇÃO III: UM TESTE NO ENSINO SUPERIOR

Na situação III os licenciandos deveriam escolher um dos nove argumentos que eles utilizariam ao responder a um teste no Ensino Superior e o Quadro 6 sintetiza a frequência dessas escolhas. Apesar da orientação para indicar apenas um, alguns não atenderam ao pedido.

Quadro 6 - Distribuição das escolhas dos licenciandos na situação III.

ARGUMENTO(S) ESCOLHIDO(S) PARA UTILIZAR NO:	ARGUMENTOS DOS ALUNOS FICTÍCIOS								
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Ensino Superior (Situação III)	2	2	21	4	3	3	2	31	13

Fonte: construção dos autores.

Com base no Quadro 6 é possível constatar que as argumentações do Carlos e da Helena também foram os preferidos no âmbito acadêmico, contudo, com índices mais expressivos do que na situação II. Entretanto, apesar da resposta do Igor ter recebido praticamente a mesma quantidade de votos nas situações II e III, é possível constatar que no Ensino Superior ele ocupou o terceiro lugar com folga, visto que a quarta colocada, a Dani, recebeu apenas quatro votos. Além disso, 16 participantes deixaram em branco ou responderam incorretamente e quatro afirmaram que não escolheriam nenhum dos argumentos, pois não eram formais o suficiente para serem caracterizados como uma demonstração.

UMA SÍNTESE DOS RESULTADOS: A PREFERÊNCIA E A “INCONSISTÊNCIA” DOS LICENCIANDOS

Com relação ao modo como os licenciandos interpretam e avaliam as argumentações dos alunos fictícios, observou-se uma preferência pelos raciocínios dedutivos, visto que as respostas do Carlos e da Helena receberam as melhores notas (situação I) e foram as eleitas pelos ingressantes para serem utilizadas tanto no âmbito da Educação Básica quanto no Ensino Superior (situações II e III). Esse resultado ratifica as considerações feitas por Aguilar Junior (2012) e por Nasser (2017), sobre a preferência pelas justificativas que estão mais próximas da prova conceitual. É importante destacar que a principal diferença entre essas duas pesquisas e a que foi descrita neste artigo se deve à articulação com os modelos teóricos de Balacheff (1988) e de Harel e Sowder (1998), os quais nortearam esta investigação desde a elaboração da questão até a análise dos dados.

Em virtude disto, com base nas notas atribuídas pelos ingressantes, é possível afirmar que após os esquemas de prova analítica (respostas do Carlos e da Helena), eles privilegiam os esquemas de prova transformacional (resposta do Fábio) em vez dos esquemas de prova empírica (respostas da Ana, do Bruno e do Edu), ou respectivamente, que preferem o exemplo genérico ao invés da prova pragmática.

Entretanto, o resultado que mais se destacou foi em relação aos três argumentos que eram inconsistentes, de Dani, Gabi e Igor. Esse último obteve o terceiro maior índice de valorização (Quadro 3) e também a terceira melhor média aritmética. Uma possível justificativa desses indicadores é que o Igor recorreu a um discurso excessivamente algébrico e isso repercutiu na convicção dos participantes, que se deixaram influenciar por esquemas de prova baseados em elementos externos (ritual e simbólico). Esse resultado converge para as considerações feitas por Ordem (2015) e por Knuth (2002b). Os pesquisadores afirmam, respectivamente, que os licenciandos não utilizam critérios adequados para avaliar demonstrações e que os professores tendem a se convencer mais pela forma do argumento do que pelo raciocínio apresentado.

Por outro lado, apenas 15 ingressantes (ou 19,2% da amostra) constataram que a argumentação do Igor era contraditória e somente 16,7% e 3,8% dos participantes, respectivamente, observaram isso nas respostas da Dani e da Gabi. E mesmo com esses índices baixíssimos, apenas o L78 conseguiu verificar que as três eram inconsistentes. Isso é um indicativo de que a simples aparência de uma justificativa associada à linguagem matemática pode influenciar fortemente a convicção e, conseqüentemente, a avaliação desses futuros professores.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Considerando que a amostra desta pesquisa foi constituída por licenciandos ingressantes, é possível inferir que as suas interpretações e avaliações estão enraizadas às suas visões sobre a Matemática, construídas ao longo dos anos escolares. Além disso, em geral, os estudantes oriundos da Educação Básica possuem uma visão estereotipada dessa ciência, marcada pelo formalismo e rigor, e isso se concretiza na supervalorização do raciocínio algébrico em detrimento de outros. Healy e Hoyles (1998), por exemplo, constataram que os estudantes eram mais propensos a escolher os argumentos formais, sejam eles corretos ou não, para obter a melhor nota do que aquele que mais se aproximava da sua própria resposta.

Em vista disso, os professores e coordenadores dos cursos de Licenciatura devem assumir práticas que problematizem tais interpretações e avaliações por parte dos ingressantes, a fim de que

no decorrer da formação inicial elas sejam modificadas e/ou ressignificadas. É importante ressaltar que, na amostra investigada, um argumento formal e inconsistente se sobressaiu em relação às evidências empíricas.

Por fim, com o intuito de atingir tais práticas, algumas posturas poderiam ser adotadas pelos docentes que atuam na formação inicial, como exigir justificativas em todas as tarefas propostas, explorar a análise de diferentes respostas apresentadas a um mesmo problema e incentivar a busca por soluções a conjecturas ou problemas em aberto.

AGRADECIMENTOS

Os autores manifestam os sinceros agradecimentos à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo fomento e incentivo a esta pesquisa, e aos licenciandos que gentilmente participaram desta investigação.

REFERÊNCIAS

AGUILAR JUNIOR, C. A. **Postura de docentes quanto aos tipos de argumentação e prova matemática apresentados por alunos do ensino fundamental**. 2012. 144 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2012. Disponível em: <https://bit.ly/3TgC76Q>. Acesso em: 16 set. 2022.

BALACHEFF, N. Processus de preuve et situations de validation. **Educational Studies in Mathematics**, n. 18, p. 147-176, 1987.

BALACHEFF, N. Aspects of proof in pupil's practice of school mathematics. In: D. PIMM (Ed.), **Mathematics teachers and children**. London: Hodder and Stoughton, 1988. p. 216-235.

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. Trad. Luís Antero Reto, Augusto Pinheiro. São Paulo: Edições 70, 2016. 288 p.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em: <https://bit.ly/2JrweUk>. Acesso em: 16 set. 2022.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular: educação é a base**. Versão final. Brasília: MEC/CONSED/UNDIME, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br>. Acesso em: 16 set. 2022.

CALDATO, J. **Argumentação, prova e demonstração: uma investigação sobre as concepções de ingressantes no curso de licenciatura em Matemática**. 2018. 219 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2018. Disponível em: <https://bit.ly/3CPFj2p>. Acesso em: 16 set. 2022.

HAREL, G.; SOWDER, L. Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In: SCHOENFELD, A.; KAPUT, J.; DUBINSKY, E. (Ed.), **Research in Collegiate Mathematics Education III**. Providence/RI: American Mathematical Society, 1998. p. 234-283.

HAREL, G.; SOWDER, L. Toward Comprehensive on the Learning and Teaching of Proof. In: LESTER, F. (Ed.), **Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**. Reston/VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2007. Disponível em: <https://bit.ly/3gg30xX>. Acesso em: 16 set. 2022.

HEALY, L.; HOYLES, C. **Justifying and Proving in School Mathematics**: Technical report on the nationwide survey. London: Institute of Education, University of London, 1998. 120 p.

KNUTH, E. J. Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v. 5, p. 61-88, 2002a.

KNUTH, E. Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 33, n. 5, p. 379-405, 2002b.

NASSER, L. Visão de licenciandos sobre as justificativas em geometria apresentadas na escola básica. **Revista Educação Matemática em Foco**, v. 6, n.1, p. 4-22, 2017.

ORDEM, J. **Prova e demonstração em geometria plana**: concepções de estudantes da licenciatura em ensino de Matemática em Moçambique. 2015. 341 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2015. Disponível em: <https://bit.ly/3yVkt09>. Acesso em: 16 set. 2022.

REID, D. A.; KNIPPING, C. **Proof in Mathematics Education**: Research, Learning and Teaching. Rotterdam: Sense Publishers, 2010. 251 p.

VAN ASCH, A. G. To prove, why and how? **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 24, n. 2, p. 301-313, 1993.

RECEBIDO EM: 03 maio 2022

CONCLUÍDO EM: 18 set 2022: