

## ENSINO E APRENDIZAGEM DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL: UM MAPEAMENTO DE ALGUMAS TESES E DISSERTAÇÕES PRODUZIDAS NO BRASIL

*DIFFERENTIAL AND INTEGRAL CALCULUS TEACHING AND LEARNING:  
A MAPPING OF THESES AND DISSERTATIONS PRODUCED IN BRAZIL*

ÉRICA MARLÚCIA LEITE PAGANI\*  
NORMA SUELY GOMES ALLEVATO\*\*

### RESUMO

Neste artigo, relatamos uma pesquisa cujo propósito é apresentar um mapeamento de algumas dissertações e teses produzidas no Brasil que abordam o ensino de Cálculo Diferencial e Integral. Trata-se de uma pesquisa do tipo “estado do conhecimento” cuja coleta de dados foi realizada nos repositórios digitais de instituições de Educação Superior, públicas ou privadas, com programas de pós-graduação que contemplam mestrado e/ou doutorado em Educação Matemática ou Ensino de Matemática. Foram selecionadas 28 dissertações e teses que abordam o tema de nosso interesse, ou seja, o ensino de Cálculo, mais especificamente o de derivadas. A partir da leitura de seus resumos e, em alguns casos, do trabalho na íntegra, foram criadas categorias e subcategorias nas quais agrupamos os trabalhos, a partir da identificação de características semelhantes emergentes dos dados. As categorias e subcategorias nos revelaram os tipos de pesquisas, o nível de ensino em que vem sendo realizadas, bem como os conteúdos específicos abordados. O mapeamento nos permitiu, ainda, verificar que os altos índices de reprovação nos cursos iniciais de Cálculo constituem a principal motivação para realização dos trabalhos analisados.

**Palavras-chave:** Cálculo Diferencial e Integral. Derivadas. Ensino e Aprendizagem. Mapeamento.

### ABSTRACT

*In the present article, we report a research that aims to show a mapping of some dissertations and theses produced in Brazil regarding the teaching of Differential and Integral Calculus. It is a research like “state of knowledge”, and the data were collected in the digital repositories of public or private higher education institutions where post graduation programs involve masters or doctorate courses in Mathematics Education or Mathematics Teaching. We selected 28 dissertations and theses that meet our topic of interest, i.e. the Calculus teaching, particularly derivatives. From reading their Abstracts and, in some cases, the full texts, we created categories and subcategories to group the papers according to similar characteristics their data presented. The categories and subcategories show the types of research, the teaching level they are related to as well as the specific contents they are approaching. Such mapping also allowed us to understand that the high failing rates in the first Calculus courses are the main topic of the analyzed papers.*

**Keywords:** Differential and Integral Calculus. Derivatives. Teaching and Learning. Mapping.

\* Doutoranda do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo/SP. Docente do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais-CEFET-MG, Belo Horizonte/MG/Brasil. E-mail: ericapagani@terra.com.br

\*\* Doutora em Educação Matemática pela UNESP-Rio Claro/SP. Docente, pesquisadora e vice-coordenadora do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo/SP/Brasil. E-mail: normallev@gmail.com

## INTRODUÇÃO

O ensino e a aprendizagem de conteúdos de Cálculo Diferencial e Integral, há alguns anos, têm sido objeto de estudo e debate. As dificuldades observadas nos cursos iniciais de Cálculo Diferencial e Integral se traduzem nos altos índices de reprovação dessas disciplinas. Propostas pedagógicas têm surgido na tentativa de minimizar as dificuldades encontradas nesse processo de ensino e aprendizagem, como a utilização de *softwares*, o ensino na perspectiva da Modelagem Matemática, o ensino através da Resolução de Problemas, dentre outros.

Durante os anos de experiência no Ensino Médio integrado ao técnico e alguns anos na Educação Superior, as dificuldades, particularmente, no ensino e na aprendizagem de derivadas de funções reais de uma variável real<sup>1</sup> foram, também, por nós observadas e questionadas: O que poderia ser feito na tentativa de favorecer essa aprendizagem? Que papel o ensino de derivadas tem no Ensino Médio de uma escola técnica? Que metodologias poderiam favorecer o ensino e a aprendizagem nesse caso?

Apesar de o Cálculo<sup>2</sup> ser uma disciplina ministrada em cursos da Educação Superior, o ensino de suas ideias, conceitos e elementos tem sido considerado bastante pertinente, nos dias de hoje, também no Ensino Médio. Isso decorre, especialmente, de dois aspectos: (1) de que esses conteúdos podem estar ao alcance de alunos desse nível de ensino, e (2) de que o Cálculo é uma disciplina de relevante importância no desenvolvimento da ciência e tecnologia, integrando, assim, as grades curriculares de vários cursos técnicos no Ensino Médio.

Ávila (2006) defende que a derivada seja ensinada no Ensino Médio, e considera que o fato de a derivada ser considerada inadequada e difícil nessa fase é devido ao seu ensino muitas vezes ser, desnecessariamente, precedido de um enfadonho capítulo sobre limites. Ocorre que a abordagem desse conteúdo é, muitas vezes, pouco intuitiva, caracterizada por atividades com excesso de manipulação algébrica e pouco significativas para os alunos. Ele afirma: “devemos enfatizar que a derivada foi inventada há mais de três séculos; e, juntamente com o conceito de integral, ela é o alicerce de toda a ciência e tecnologia dos últimos trezentos anos” (ÁVILA, 2006, p. 37).

Esses interesses e aspectos mencionados foram a mola propulsora de uma pesquisa maior que estamos iniciando e que pretende averiguar como se dá o ensino e a aprendizagem de derivadas através da resolução de problemas nesse nível de ensino. No presente artigo, apresenta-se uma parte dos resultados dessa pesquisa.

A partir desse interesse e considerando que a pesquisa será desenvolvida em uma escola técnica, julgamos importante fazer um levantamento das teses e dissertações que, de alguma forma, tratassem do ensino e aprendizagem dos conteúdos de Cálculo Diferencial e Integral, mais especificamente os que abordassem a derivada, com o intuito de construir um balanço que aponte os rumos que essas pesquisas estão seguindo e quais contribuições têm trazido em seus textos. Certamente, a maior parte dessas pesquisas discute o Cálculo na Educação Superior, mas cabe aqui uma análise de quais resultados podem ser aproveitados no Ensino Médio Técnico.

Oportunamente, dividimos o artigo em 4 (quatro) seções. Na primeira, apresentamos os procedimentos metodológicos adotados por nós para realizar o mapeamento, apresentando os objetivos de nossa busca. Na seção 2 (dois), apresentamos um retrato geral das teses e dissertações constantes no fichamento no que diz respeito às suas origens (instituição de origem), ano de

<sup>1</sup> Ao longo do texto utilizaremos apenas o termo derivadas para nos referirmos às derivadas de funções reais de uma variável real, a fim de evitar repetições.

<sup>2</sup> A partir deste ponto, algumas vezes, usaremos apenas a palavra Cálculo para nos referirmos ao Cálculo Diferencial e Integral.

publicação, produção por curso (**mestrado acadêmico, mestrado profissional, doutorado**) e os conteúdos abordados para, em seguida, na seção 3 (três), apresentarmos e discutirmos as categorias constituídas. Encerramos com as considerações finais e as referências.

## PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Para analisarmos como as pesquisas envolvendo o ensino do Cálculo vêm sendo desenvolvidas e que rumos elas estão seguindo, foi bastante oportuno fazer esse mapeamento das pesquisas apresentadas na forma de dissertações ou teses. Segundo Romanowski e Ens (2006), estudos que realizam um balanço em uma determinada área através da análise de teses e dissertações, produções em congresso, publicações e periódicos são denominados “estado da arte”, e estudos como o nosso, que abordam apenas um setor de publicações sobre o tema estudado (resumos de dissertações e teses) são chamados de “estado do conhecimento”.

Analisamos, inicialmente, os resumos das teses e dissertações<sup>3</sup> relacionadas ao ensino de Cálculo que foram produzidas no Brasil, considerando que os resumos desse tipo de trabalho acadêmico costumam nos informar os objetivos do trabalho, os procedimentos metodológicos seguidos, referencial teórico utilizado e alguns resultados alcançados. Desse modo,

[...] pode-se estabelecer, a partir de uma certa ordenação de resumos, uma rede formada por diferentes elos ligados a partir do mesmo *suporte material* que os abriga, pela *opção teórica* manifesta, pelo *tema* que anuncia, pelo *objetivo* explicitado da pesquisa, pelo *procedimento metodológico*, pelo pesquisador. Um conjunto de resumos organizados em torno de uma determinada área do conhecimento (Alfabetização, Leitura, Formação do Professor, Educação Matemática, por exemplo) pode nos contar **uma** História de sua produção acadêmica. Mas, é necessário pensar que nesta História foram considerados alguns aspectos dessa produção e que nela há certas limitações. (FERREIRA, 2002, p. 268).

Estávamos interessadas, particularmente, no ensino de derivadas; então, para a coleta, as expressões de busca utilizadas foram: educação matemática e derivadas, resolução de problemas, ensino de derivadas, ensino de cálculo, ensino técnico. Vale ressaltar que as configurações dos bancos de teses e dissertações encontradas nos programas de pós-graduação variam muito de uma instituição para outra e por isso a busca se deu de forma diferente em cada caso. Em algumas instituições, as palavras foram inseridas no campo assunto e em outras, no campo palavra-chave. Além disso, a busca foi realizada nos portais dos programas de pós-graduação de algumas universidades<sup>4</sup> e esse tipo de busca nos trouxe algumas dificuldades. Em algumas instituições esses programas estão inseridos no departamento de Matemática; em outras, no departamento de Educação. Outros programas, ainda, se mostraram independentes sem apresentar vínculo com nenhum departamento da referida instituição de ensino.

Tendo em vista os objetivos dessa busca, após fazer o levantamento foi necessário fazer o fichamento dos resumos lidos tentando extrair informações gerais e informações específicas. Em in-

<sup>3</sup> Iniciamos nossa busca por teses e dissertações produzidas no Brasil nos últimos 10 (dez) anos; mas, em função da relevância dos trabalhos encontrados, estendemos esse período de modo que este mapeamento inclui trabalhos produzidos no período de 1999 a 2013.

<sup>4</sup> O serviço do banco de teses e dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), que disponibiliza os resumos desses trabalhos defendidos a partir do ano de 1987, não estava disponível no momento em que realizamos a busca (outubro e novembro de 2013) e não tinha previsão de retorno.

formações gerais foram pesquisados instituição de origem, título do trabalho, autor, ano e nível de ensino; e, com relação às informações específicas foram observados palavras-chave, procedimentos metodológicos, objetivos do estudo, objeto de estudo, referencial teórico, resultados obtidos e contribuições da pesquisa.

Coletamos, inicialmente, 46 (quarenta e seis) trabalhos (32 dissertações e 14 teses) e, após essa leitura preliminar dos resumos, eliminamos alguns trabalhos mantendo, a princípio, os que mais se aproximavam do nosso objeto de investigação, qual seja o ensino de derivadas. Entretanto, consideramos relevante ir além e analisar os trabalhos que discutissem o ensino e a aprendizagem de elementos do Cálculo-limites, derivadas e integrais - e, por fim, realizamos o fichamento de 28 (vinte e oito) trabalhos, sendo 21 (vinte e uma) dissertações e 7 (sete) teses, estabelecendo, a partir daí, as categorias de análise.

## UM RETRATO GERAL DAS DISSERTAÇÕES E TESES ANALISADAS

Reiteramos que nossa busca foi realizada nos programas de pós-graduação de instituições de Educação Superior, públicas e privadas, em programas de doutorado e de mestrado acadêmico e profissional. Primeiramente, perguntamo-nos sobre as origens dos trabalhos selecionados; isto é, em quais instituições foram defendidos e a que tipo de programa de pós-graduação eles estão vinculados. Na tentativa de responder essa pergunta, observamos que duas instituições se destacam nessa produção: a Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP) e a Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), cada uma delas com 06 dissertações. Ambas as instituições possuem apenas o programa em nível de mestrado; a primeira na modalidade profissional em Educação Matemática e a segunda, na modalidade acadêmica em Ensino de Matemática. Segundo a CAPES, “Mestrado Profissional é a designação do Mestrado que enfatiza estudos e técnicas diretamente voltadas ao desempenho de um alto nível de qualificação profissional. Esta ênfase é a única diferença em relação ao acadêmico” (BRASIL, 2002).

Foi possível observar que instituições de grande expressão no cenário de pesquisas em Educação Matemática não apresentaram nenhum trabalho relacionado ao ensino de Cálculo, apesar de sabermos que elas contribuem com grande parte das teses e dissertações em Educação Matemática, produzidas no Brasil. Esse fato pode ser decorrente da fragilidade dos repositórios digitais dessas universidades que podem não estar devidamente atualizados; ou pode, efetivamente, retratar em que instituições se encontram pesquisadores e/ou grupos de pesquisa cujo interesse seja o tema pesquisado por nós.

Na tabela 01, é fornecido um quadro geral das instituições nas quais encontramos pesquisas relacionadas ao ensino e à aprendizagem de conteúdos de Cálculo:

**Tabela 01 - Produção por Instituição de Educação Superior.**

Instituição	Dissertações	Teses	Total
PUC-Minas	01	---	01
PUC-SP	00	01	01
ULBRA	01	---	01
UFOP	06	---	06
UFRJ	06	---	06
UFRN	01	00	01
UNESP-Rio Claro	02	02	04

UNICAMP	00	01	01
UNICSUL	02	00	02
UNIFRA	02	---	02
USP	00	03	03
<b>TOTAL</b>	<b>21</b>	<b>07</b>	<b>28</b>

Fonte: Elaborada pelo autor.

As tabelas a seguir retratam, em números, alguns resultados apresentados pela nossa coleta, com relação ao ano de conclusão dos trabalhos e à produção por curso (mestrado ou doutorado):

**Tabela 02 - Produção anual.**

Ano	Mestrado	Doutorado	Total
1999	00	02	02
2002	01	00	01
2003	00	01	01
2005	01	00	01
2006	00	00	00
2007	00	00	00
2008	03	01	04
2009	01	02	03
2010	07	00	07
2011	06	00	06
2012	02	00	02
2013	00	01	01
<b>TOTAL</b>	<b>21</b>	<b>07</b>	<b>28</b>

Fonte: Elaborada pelo autor.

A observação da tabela acima nos permite constatar que 15 (quinze) dos 28 (vinte e oito) trabalhos foram produzidos nos anos de 2010, 2011 e 2012, representando, aproximadamente, 54% do total.

Consideramos interessante apresentar, também, a tabela 03, a seguir, que mostra a produção acadêmica por tipo de curso de pós-graduação em que o trabalho foi produzido:

**Tabela 03 - Produção acadêmica percentual por tipo de curso de pós-graduação.**

Tipo/quantidade	Mestrado Acadêmico	Mestrado Profissional	Doutorado	Total de trabalhos
Total	9	12	7	28
Percentual	<b>32,1%</b>	<b>42,9%</b>	<b>25%</b>	<b>100%</b>

Fonte: Elaborada pelo autor.

Observamos que o crescimento na produção acadêmica constatada no triênio 2010-2012 acompanha o número de dissertações apresentadas em mestrados profissionais, o que nos leva

a supor que a abertura de novos cursos de mestrado em Educação Matemática na modalidade profissionalizante, ocorrida no Brasil nesse período, tenha alavancado tal produção. Ademais, indica uma expressiva presença de profissionais/docentes que atuam na Educação Superior nesses mestrados, embora eles tenham sido concebidos, originalmente, para atender à Educação Básica. Lembramos que o ensino de limites, derivadas e integrais é, na maior parte das vezes, conteúdo ministrado em cursos superiores. De fato, muitos professores que atuam na Educação Superior têm recorrido aos cursos de mestrado profissional em busca de qualificação e desenvolvido pesquisas interessantes voltadas ao seu contexto de atuação.

**Tabela 04 - Produção por tipo de instituição.**

Produção/instituição	Públicas	Privadas	Total
Dissertações	15	06	21
Teses	06	01	07
<b>Total</b>	<b>21</b>	<b>07</b>	<b>28</b>

Fonte: Elaborada pelo autor.

Na tabela 04 acima, percebemos que o percentual de trabalhos oriundos das instituições públicas é de 75% do total. Esse número tem consonância com o fato de que, no Brasil, o número de instituições públicas com programas de mestrado e doutorado é superior ao número de instituições privadas, além de os programas de pós-graduação das instituições públicas serem, em geral, mais antigos.

Com relação aos conteúdos de Cálculo abordados e discutidos nos trabalhos desse mapeamento, identificamos alguns que apresentam novas propostas para ensino e aprendizagem dos conceitos, propriedades e aplicações de limites, derivadas ou integrais, e outros que discutem os problemas relacionados ao ensino desses conteúdos. Há, ainda, trabalhos que utilizam novas metodologias para o ensino de Cálculo associadas ao uso de recursos computacionais a fim de favorecerem o ensino e a aprendizagem desses conteúdos em cursos de Ensino a Distância (EAD).

Na tabela a seguir, apresentam-se os dados encontrados com relação aos conteúdos abordados em cada trabalho (dissertação ou tese):

**Tabela 05 - Distribuição dos conteúdos abordados.**

Conteúdo abordado/total absoluto e percentual de trabalhos	Nº de trabalhos	Percentual
Limites e continuidade	04	14,30%
Derivadas	09	32,14%
Integrais Indefinidas	02	7,14%
Integrais Definidas	02	7,14%
Integrais de funções de duas variáveis	01	3,57%
Elementos do Cálculo de maneira geral	10	35,71%
<b>Total</b>	<b>28</b>	<b>100%</b>

Fonte: Elaborada pelo autor.

Após realizarmos o fichamento, organização e análise dessas informações gerais e específicas, fizemos novas leituras dos resumos a fim de criar categorias nas quais pudéssemos agrupar os trabalhos, sendo observadas características semelhantes a partir dos dados. Entretanto, vale ressaltar que nem sempre os resumos lidos forneceram os elementos ou evidenciaram aspectos importantes ao levantamento; por isso, por vezes, recorremos às considerações finais dos trabalhos ou mesmo realizamos a leitura do trabalho na íntegra.

## CONSTITUIÇÃO DAS CATEGORIAS

Dando continuidade ao estudo, concentramo-nos em explorar os textos das teses e dissertações, procurando entender seus objetivos e destacar os referenciais teóricos e procedimentos utilizados no decorrer dos trabalhos, a fim de agrupá-los em categorias que pudessem nos ajudar a fazer um retrato mais preciso destes, bem como identificar os que mais se aproximam dos nossos interesses, ou seja, aqueles que discutem o ensino de derivadas. Como em Biembengut e Dorow (2008), levamos em consideração pontos relevantes e significativos que nos guiassem em direção ao entendimento do assunto pesquisado. Nessa fase em que buscávamos estabelecer as categorias de análise, verificamos, ainda: conteúdos de cálculo abordados, nível de ensino, contexto e natureza da pesquisa.

Dentre todos os trabalhos analisados, notamos que 04 (quatro) deles (ANDRÉ, 2008; PEREIRA, 2009; PINTO; 2010a; SPINA, 2002) abordam, de alguma forma, o cálculo no Ensino Médio, seja ele integrado ao Ensino Técnico ou não. As demais teses e dissertações analisadas discutem o Cálculo na Educação Superior, uma vez que as disciplinas que abordam esses conteúdos são ministradas em cursos superiores de engenharia, tecnologias, bacharelados e de formação de professores (licenciaturas) de Física, Química e Matemática, entre outros. Verificamos, ainda, que a maior parte deles relata pesquisas no contexto dos cursos de Licenciatura em Matemática e que, nesses trabalhos, além da discussão sobre o ensino e a aprendizagem dos conteúdos relativos ao Cálculo Diferencial e Integral, os autores também apontam que a pesquisa contribuiu para melhoria da formação do professor de Matemática, tornando-o mais preparado para trabalhar esses conteúdos, no Ensino Médio ou na Educação Superior.

Muitos aspectos, como observado anteriormente, não puderam ser compreendidos a partir da análise dos resumos e, nesses casos, recorremos aos textos das considerações finais dos trabalhos. Surpreendentemente, por vezes o que estava anunciado nos resumos não era condizente com o texto das considerações finais e foi necessário ler, num terceiro momento, o trabalho na íntegra. No exercício de leitura dos resumos e demais partes dos trabalhos que se fizeram necessárias, constatamos o que afirma Morais (2003, p. 199): “O desafio é exercitar uma dialética entre o todo e a parte, ainda que dentro dos limites impostos pela linguagem, especialmente dentro da sua formalização em produções escritas”.

Esse exercício de leitura nos permitiu identificar 02 (dois) tipos de pesquisas - as empíricas e as teóricas - e algumas características comuns que nos levaram a agrupar os trabalhos em categorias e subcategorias, descritas e apresentadas na tabela a seguir:

**Tabela 06** - Distribuição dos trabalhos em categorias e subcategorias.

CATEGORIA	SUBCATEGORIA/ DESCRIÇÃO	Número de trabalhos
A - Trabalhos de natureza empírica	A <sub>1</sub> -Trabalhos que implementam e analisam uma prática de ensino	18
	A <sub>2</sub> -Trabalhos que resultam em uma proposta de ensino com abordagens baseadas na teoria cognitiva e na aprendizagem significativa	05
	A <sub>3</sub> -Trabalhos que discutem e analisam concepções apresentadas pelos alunos no processo de aprendizagem	02
B- Trabalhos de natureza teórica	Trabalhos que abordam as dificuldades no ensino e aprendizagem de Cálculo	03
TOTAL		28

Fonte: Elaborada pelo autor.

A primeira categoria, categoria A, é constituída de trabalhos que apresentam algum tipo de investigação empírica, ou seja, trabalhos que apresentam alguma experiência de ensino realizada com alunos e/ou professores e está subdividida em 03 (três) subcategorias. De acordo com Houaiss (2009), uma das acepções para o adjetivo empírico é aquilo que é “baseado na experiência e na observação, metódicas ou não”.

Os trabalhos dessa categoria estão agrupados nas subcategorias A<sub>1</sub>, A<sub>2</sub>, e A<sub>3</sub>. Na subcategoria A<sub>1</sub>, reunimos os trabalhos cujo objetivo foi implementar e analisar, no ensino de Cálculo, metodologias e/ou estratégias de ensino - a Resolução de Problemas, a Modelagem Matemática e as práticas com a utilização de Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) - investigando suas contribuições para a aprendizagem desses assuntos, nos níveis Médio e Superior.

Em algumas pesquisas relacionadas nessa subcategoria (ABDELMALACK, 2011; LUZ, 2011; PINTO, 2010b; RIBEIRO, 2010; ROSSI, 2012; SANGOI, 2010), observamos que a Resolução de Problemas é utilizada como metodologia de ensino. Como sabemos que existem diferentes formas de conceber a Resolução de Problemas, achamos conveniente ressaltar que essas pesquisas se utilizam da Resolução de Problemas como um meio através do qual se pode ensinar Matemática, ou seja, uma metodologia de ensino, no sentido apontado por Onuchic apud Allevato (2005) em que

[...] o problema é olhado como um elemento que pode disparar um processo de conhecimento. Sob esse enfoque, problemas são propostos ou formulados de modo a contribuir para a formação dos conceitos antes mesmo de sua apresentação em linguagem matemática formal. (p. 60).

Ainda nessa subcategoria, a Modelagem Matemática é vista como estratégia de ensino (BELTRÃO, 2009; RILHO, 2005; SPINA, 2002) que favorece o aprendizado, de maneira que o “aluno partiria de um problema real para, através dele, estudar conceitos matemáticos relevantes, que viabilizariam uma análise mais profunda do problema e de suas possíveis soluções” (RILHO, 2005, p. 48). Outros trabalhos (ALVES, 2010; AMORIM, 2011a; BARBOSA, 2009; GONÇALVES, 2012; MACHADO, 2008; VILLARREAL, 1999) têm como principal objetivo investigar o ensino e aprendizagem de Cálculo em ambientes informatizados, analisando as contribuições que *softwares* ou aplicativos educacionais podem trazer a esse processo. Há ainda, nessa subcategoria, 02 (dois) trabalhos que apresentam uma proposta para o ensino valendo-se, também, da história do Cálculo (RIBEIRO, 2010; OLIVEIRA, 2011) e 02 (dois) outros (PEREIRA, 2009; PINTO, 2010a) que desenvolvem suas propostas de ensino à luz da Engenharia Didática.

Na subcategoria seguinte, subcategoria  $A_2$ , agrupamos os trabalhos de natureza empírica que apresentam propostas para o ensino de Cálculo conduzidas e analisadas sob a ótica do Pensamento Avançado (ABREU, 2011; AMORIM, 2011b; ANDRÉ, 2008; ESCALARTE, 2008), apoiadas, fundamentalmente, em Tall e Vinner<sup>5</sup>, e outro (MIRANDA, 2010) que apresenta sua proposta de ensino sob o olhar da Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel<sup>6</sup>.

As pesquisas inseridas na subcategoria  $A_3$  (MESCOLIN, 2010; PINTO, 2008) analisam e discutem as concepções apresentadas pelos alunos sobre derivadas e/ou limites, procurando identificar nessas concepções elementos que possam contribuir para elaboração de propostas de ensino para esses conteúdos.

A partir da sistematização e análise dos dados, feitas para que pudéssemos estabelecer as categorias, observamos que os *softwares* utilizados nos trabalhos são o *Geogebra* e o *Winplot*, em sua maioria, além do *Maple* e o ambiente *MPP (Mathematic Plotting Package)*. Em alguns trabalhos (BELTRÃO, 2009; PINTO, 2010b), o *software* foi considerado como um mediador no processo de ensino e aprendizagem, associado a alguma metodologia, estratégia ou abordagem de ensino e, em outros, o *software* é o centro nas discussões e nas atividades exploradas (AMORIM, 2011a; MACHADO, 2008).

Ainda que a utilização das tecnologias não seja o tema central do trabalho, os autores concordam que elas favorecem a visualização, permitindo ao aluno enriquecer sua compreensão a respeito do tema, relacionando o tratamento algébrico ao geométrico. Em síntese, as TICs são vistas como facilitadoras do processo de ensino e aprendizagem.

Na categoria B, reunimos os trabalhos de natureza teórica. Aqui se encontram os trabalhos que abordam e discutem as dificuldades no ensino e aprendizagem de Cálculo (BARUFI, 1999; REZENDE, 2003; VIEIRA, 2013). No esforço de mapear e analisar as dificuldades de natureza epistemológica específicas do ensino de Cálculo, Rezende (2003) apresenta, em sua tese, cinco macro espaços de dificuldades de natureza epistemológica, denominados por ele de: o eixo discreto/contínuo, o eixo variabilidade/permanência, o eixo finito/infinito, o eixo local/global e o eixo sistematização/construção.

Barufi (1999) analisa as dificuldades na construção dos significados no estudo de conteúdos de Cálculo, logo, segundo ela,

o professor precisa ter bastante clareza sobre as características do conhecimento desejado, de quais diferentes relações podem ser estabelecidas, a fim de possibilitar articulações, mais ou menos estáveis, até por aproximações sucessivas possibilitar a construção de significados importantes. (BARUFI, 1999, p. 38).

Já Vieira (2013) verifica os limites e potencialidades do uso de novas Tecnologias da Informação no ensino desses conteúdos e acredita que

[...] um novo desafio docente na educação, e em particular no estudo de Cálculo Diferencial e Integral será o de construir uma nova metodologia capaz de articular as competências conjuntamente com uma melhor apropriação do objeto em estudo, por meio das possibilidades oriundas da utilização de novas tecnologias. (VIEIRA, 2013, p. 24).

<sup>5</sup>David Tall e Shlomo Vinner, pesquisadores da Teoria Cognitiva do Pensamento Matemático Avançado. Para referências dessa teoria, ver TALL, D. (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking*. Londres: Kluwer Academic Publisher, 2002.

<sup>6</sup>Teoria fundada por David Paul Ausubel. Para referências dessa teoria, ver MOREIRA, M. A. **Teorias da Aprendizagem**. EPU, p. 151-165, 1999.

Vale ressaltar que todos os trabalhos agrupados nessa categoria são teses de doutorado.

Observamos que apenas 09 (nove) dos trabalhos categorizados (ABDELMALACK, 2011; ANDRÉ, 2008; BARBOSA, 2009; OLIVEIRA, 2011; GONÇALVES 2012; PINTO, 2008; PINTO, 2010b; RILHO, 2005; SANGOI, 2010) abordam, especificamente, o ensino de derivadas, seja na Educação Superior, seja no Ensino Médio. Dentre os demais, observamos que há aqueles em que o assunto da pesquisa é exclusivamente o ensino de limites, ou o de integrais. Outros abordam o ensino e a aprendizagem dos elementos do Cálculo (limites, derivadas e integrais), discutindo, em um mesmo trabalho, as dificuldades encontradas e detalhando instrumentos didático-pedagógicos que possam auxiliar nesse processo de ensino e aprendizagem.

Entre tantas pesquisas desenvolvidas no âmbito da Educação Superior e algumas poucas no Ensino Médio, encontramos 01 (um) único trabalho (ANDRÉ, 2008) envolvendo o ensino de derivada de função real de uma variável real no Ensino Médio. Em sua dissertação, apresenta uma proposta para o “ensino do conceito de derivada no Ensino Médio baseada na teoria de imagens de conceito e raiz cognitiva” (ANDRÉ, 2008, p. 90). Vale ressaltar que não encontramos trabalhos que investiguem o ensino de Cálculo no contexto do Ensino Técnico. Isso nos leva a crer que há carência de investigações sobre o ensino de Cálculo na Educação Básica e nos leva a inferir que esse é um campo fértil para novas pesquisas relacionadas ao ensino e à aprendizagem de derivadas no Ensino Técnico.

## **CONSIDERAÇÕES FINAIS**

Esta investigação a respeito da produção acadêmica existente nos repositórios de teses e dissertações mostrou-nos que o número de trabalhos que investigam o ensino de Cálculo ainda é pequeno, apesar de também evidenciar que há uma grande preocupação em torno desse assunto. Além disso, ficou claro que os autores dos trabalhos concordam que, no ensino de Cálculo, há sempre a prevalência da técnica sobre o significado. Barufi (1999) e Rezende (2003) trazem dados alarmantes a respeito das reprovações nas disciplinas de Cálculo na Universidade de São Paulo (USP) e na Universidade Federal Fluminense (UFF), respectivamente. Os trabalhos analisados são todos de natureza qualitativa e os procedimentos metodológicos empregados são, em sua maioria, questionários, entrevistas, análise documental e aplicação de sequências de atividades.

Observamos, ainda, que os repositórios de teses e dissertações nem sempre estão atualizados. Isso foi possível perceber, pois alguns trabalhos, que não constavam nesses bancos, foram encontrados em outros ambientes, após tomarmos conhecimento por citações em apresentações de pesquisas em congressos e nas listas de referências de outras teses e dissertações. Romanowski e Ens (2006) já relataram esse tipo de limitação com a qual nos deparamos ao realizar esse tipo de busca.

Reiteramos, também, que nem sempre os resumos analisados evidenciavam os elementos que buscávamos e, por isso, foram lidas também as considerações finais de cada trabalho e, em alguns casos, o trabalho na íntegra.

Outra dificuldade que precisa ser relatada aqui é que nem todos os programas de pós-graduação em Matemática ou Educação do país puderam ser pesquisados, uma vez que isso demandaria um tempo que não se justificaria em função dos objetivos deste trabalho.

Apesar dessas dificuldades, nesse exercício de leitura, constatamos que vários trabalhos apresentam uma revisão histórica do desenvolvimento do Cálculo; alguns deles, como os de Barufi (1999), Mescolin (2010) e Amorim (2011b), analisam e fazem crítica aos livros didáticos de Cálculo que são adotados com maior frequência nas instituições de Ensino Superior do Brasil.

Vale destacar, ademais, que metade das pesquisas empíricas foi conduzida em cursos de Licenciatura em Matemática, de modo que percebemos, nesses trabalhos, uma preocupação a mais por parte dos pesquisadores em contribuir, via estudo do Cálculo, para formação de um professor que seja capaz de repensar sua prática pedagógica, que possa assumir a posição de mediador em sala de aula, que seja flexível frente a novas abordagens didáticas; e, capaz de romper com contratos didáticos estabelecidos ao longo de sua trajetória como aluno e professor.

O mapeamento dessas teses e dissertações nos permitiu construir um panorama das pesquisas que envolvem o ensino de Cálculo e, apoiando-nos nesse panorama, pudemos identificar lacunas que nos possibilitarão investir no que ainda há por ser feito.

Essa compreensão do estado de conhecimento sobre um tema, em determinado momento, é necessária no processo de evolução da ciência, a fim de que se ordene periodicamente o conjunto de informações e resultados já obtidos, ordenação que permita indicação das possibilidades de integração de diferentes perspectivas, aparentemente autônomas, a identificação de duplicações ou contradições, e a determinação de lacunas e vieses. (SOARES, 1987 apud FERREIRA, 2002, p. 259).

Percebemos com este mapeamento que as dificuldades existentes no ensino e na aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral, evidenciadas pelos altos índices de reprovação nos cursos iniciais de Cálculo, constituem a principal motivação para realização dos trabalhos analisados.

Este estudo revelou, ademais, que há uma gama de questões a serem investigadas e que é necessário, ainda, que novos trabalhos sejam realizados levando-se em conta o ensino e a aprendizagem de elementos de Cálculo no Ensino Médio. Esperamos que este trabalho incentive professores e pesquisadores a utilizarem novos ambientes de aprendizagem a fim de favorecer o ensino e a aprendizagem desses conteúdos.

## REFERÊNCIAS

ABDELMALACK, A. **O Ensino-Aprendizagem-Avaliação da Derivada para o Curso de Engenharia Através da Resolução de Problemas**. 2011. 145 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2011.

ABREU, O. H. **Discutindo algumas relações possíveis entre intuição e rigor e entre imagem conceitual e definição conceitual no ensino de limites e continuidade em Cálculo I**. 2011. 98 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Departamento de Matemática, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2011.

ALLEVATO, N. S. G. **Associando o computador à Resolução de Problemas fechados: análise de uma experiência**. 2005. 370 f. Tese (Doutorado) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2005.

ALVES, D. O. **Ensino de funções, limites e continuidade em ambientes educacionais informatizados: uma proposta para cursos de introdução ao cálculo**. 2010. 152 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Departamento de Matemática, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2010.

AMORIM, F. V. **Experiência de atividades para o cálculo diferencial e integral com o software geogebra**. 2011. 186 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2011a.

AMORIM, L. I. F. **A (re) construção do conceito de limite do Cálculo para a Análise**: estudo com alunos do curso de Licenciatura em Matemática. 2011. 133 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Instituto de Ciências Exatas de Biológicas, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2011b.

ANDRE, S. L. C. **Uma proposta para o ensino do conceito de derivada no ensino médio**. 2008. 232 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

AVILA, G. Limites e derivadas no Ensino Médio? **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 60, p. 30-38, 2006.

BARBOSA, S. M. **Tecnologias da informação e comunicação, função composta e regra da cadeia**. 2009. 199 f. Tese (Doutorado) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2009.

BARUFI, M. C. B. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral**. 1999. 184 f. Tese (Doutorado) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999.

BELTRÃO, M. E. P. **Ensino de Cálculo pela Modelagem Matemática e Aplicações**: teoria e prática. 2009. 322 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

BIEMBENGUT, M. S.; DOROW K. C. Mapeamento de pesquisas sobre modelagem matemática no ensino brasileiro: análise das dissertações e teses desenvolvidas no Brasil. **Dynamis revista técnico-científica**, v.1, p. 54-61, jan./mar., 2008.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. **CAPES**. Disponível em <<http://www.capes.gov.br/duvidas-frequentes/62-pos-graduacao/2376-qual-e-a-diferenca-entre-o-mestrado-academico-e-o-mestrado-profissional>>. Acesso em: 30 jun. 2014.

ESCARLATE, A. de C. **Uma investigação sobre a aprendizagem de integral**. 2008. 152 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática)- Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

FERREIRA, N. S. A. As pesquisas denominadas "Estado da Arte". **Educação & Sociedade**, Campinas, ano 23, n. 79, p. 257-272, ago. 2002.

GONÇALVES, D. C. **Aplicações de derivadas em Cálculo I**: atividades investigativas utilizando o *geogebra*. 2012. 110 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2012.

HOUAISS, J. **Dicionário Houaiss de Língua Portuguesa**. Rio de Janeiro: Objetiva, 2009.

LUZ, V. M. da. **Introdução ao cálculo**: uma proposta associando pesquisa e intervenção. 2011. 149 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2011.

MACHADO, R. M. **A visualização na resolução de problemas de cálculo diferencial e integral no ambiente computacional MPP**. 2008. 289 f. Tese (Doutorado) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2008.

- MESCOLIN, M. F. **Sobre definições em Cálculo**: discussões sobre o conceito de continuidade. 2010. 111 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2010.
- MIRANDA, A. M. **As tecnologias da informação no estudo de cálculo na perspectiva da aprendizagem significativa**. 2010. 152 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Departamento de Matemática, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2010.
- MORAES, R. Uma tempestade de luz: a compreensão possibilitada pela análise textual discursiva. **Ciência e Educação**, v. 9, n. 2, p. 191-211, 2003.
- OLIVEIRA, D. G. de. **Explorando o conceito de derivada em sala de aula, a partir de suas aplicações e sob uma perspectiva histórica**. 2011. 78 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Departamento de Matemática, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2011.
- PEREIRA, V. M. C. **Cálculo no ensino médio**: uma proposta para o problema da variabilidade. 2009. 182 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2009.
- PINTO, G. M. da F. **Compreensão gráfica da derivada de uma função real em um curso de cálculo semipresencial**. 2008. 115 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.
- PINTO, G. T. D. C. **Limite de função real no ensino médio**: uma proposta para o seu ensino e aprendizagem. 2010. 171 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2010a.
- PINTO, S. P. W. **Ensino e aprendizagem de derivada na educação matemática a distância por meio da metodologia da resolução de problemas**. 2010. 130 f. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática) - Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, 2010b.
- REZENDE, W. M. **O Ensino de Cálculo**: Dificuldades de Natureza Epistemológica. 2003. 450 f. Tese (Doutorado) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.
- RIBEIRO, M. V. **O ensino do conceito de integral, em sala de aula, com recursos da história da matemática e da resolução de problemas**. 2010. 324 f. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2010.
- RILHO, B. C. **Uma experiência em ensino e aprendizagem**: modelos de investimento e as derivadas. 2005. 155 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Luterana do Brasil, Canoas, 2005.
- ROMANOWSKI, J. P.; ENS, R. T. As pesquisas denominadas do tipo “Estado da Arte” em educação. **Revista Diálogo Educacional**, Curitiba, v. 6, n. 19, p. 37-50, set./dez. 2006.
- ROSSI, M. I. **A aprendizagem das aplicações das integrais indefinidas em equações diferenciadas através da resolução de problemas**. 2012. 141 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2012.

SANGOI, E. **Contribuições da resolução de problemas e do software *maple* para a aprendizagem significativa dos conceitos e propriedades da derivada.** 2010. 152 f. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática) - Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, 2010.

SPINA, C. de O. C. **Modelagem matemática no processo ensino aprendizagem do cálculo diferencial e integral para o ensino médio.** 2002. 162 f. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2002.

VIEIRA, A. F. **Ensino do Cálculo Diferencial e Integral: das técnicas ao *humans-with-media*.** 2013. 204 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 2013.

VILLARREAL, M. E. **O pensamento matemático de estudantes universitários de Cálculo e tecnologias informáticas.** 1999. 402 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 1999.

RECEBIDO EM: 07.07.2014.

CONCLUÍDO EM: 30.08.2014.