

TAREFA DE LIVRO DIDÁTICO DE MATEMÁTICA: UMA EXPLORAÇÃO SOB O OLHAR DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA

MATHEMATICS TEXTBOOK TASK: AN EXPLORATION FROM THE PERSPECTIVE OF REALISTIC MATHEMATICS EDUCATION

DIEGO BARBOZA PRESTES¹
REGINA LUZIA CORIO DE BURIASCO²

RESUMO

Este artigo apresenta um estudo a respeito de possíveis explorações que podem ser realizadas no trabalho de sala de aula com tarefas da temática Probabilidade e Estatística da coleção de livros didáticos de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental mais distribuída pelo governo federal no PNLD 2017, à luz da Educação Matemática Realística. Para isso, foi realizada uma pesquisa qualitativa em que as tarefas das unidades escolhidas foram agrupadas de acordo com o que era solicitado que o aluno fizesse em cada uma delas, e, a partir disso, realizadas considerações sobre tarefas dos dois agrupamentos que apresentaram as maiores frequências. Essas considerações tiveram como foco apresentar possibilidades de intervenção baseadas em questionamentos que os professores podem fazer ao trabalhar com as tarefas. Este estudo deixou evidente que é possível realizar um trabalho que favoreça os processos de ensino e de aprendizagem, mesmo utilizando tarefas usuais de livros didáticos.

Palavras-chave: Educação Matemática Realística, Tarefas de Livros Didáticos de Matemática, Probabilidade e Estatística, Oportunidade de Aprendizagem.

ABSTRACT

This article presents a study regarding possible explorations that can be carried out in classroom work with tasks on the theme of Probability and Statistics of the collection of Mathematics textbooks of the final years of Elementary School which were most distributed by the federal government in the PNLD program in 2017, in light of Realistic Mathematics Education. For this, a qualitative research was carried out in which the tasks of the chosen units were grouped into descriptors according to what the student was asked to do in each of them, and from that, considerations were made about the tasks of the two groups that presented the highest frequencies. These considerations were focused on presenting possibilities of interventions based on questions that teachers can ask when working with the tasks. This study made it evident that it is possible to carry out work that favors teaching and learning processes, even when working with commonly used textbook tasks.

Keywords: Realistic Mathematics Education, Tasks of Mathematics Textbooks, Probability and Statistics, Learning opportunity.

¹ Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina. Docente colaborador da Universidade Estadual de Londrina. E-mail: d.b.p. diegoprestes@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0356-9166>.

² Doutora em Educação pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho. Docente associada da Universidade Estadual de Londrina. E-mail: reginaburiasco@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5845-1619>.

INTRODUÇÃO

Pode-se dizer que, por um lado, muitos professores que ensinam Matemática na Educação Básica em escolas públicas de todo o Brasil utilizam o livro didático como um de seus principais materiais de apoio, se não o único. Por outro lado, o trabalho pedagógico em sala de aula vem recebendo cada vez mais atenção e interesse de pesquisadores em Educação Matemática. Nesse contexto, julgou-se relevante apresentar um estudo articulando tarefas de livro didático e trabalho pedagógico do professor à luz da Educação Matemática Realística (RME³), abordagem para o ensino de Matemática que lida diretamente com tarefas e seus desdobramentos.

Assim, o objeto de estudo deste artigo são tarefas contidas nas unidades específicas que abordam a temática Probabilidade e Estatística, da coleção de livros didáticos de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental mais distribuída pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático - PNLD 2017, ou seja, a 4ª edição renovada da coleção *Praticando Matemática*⁴, da Editora do Brasil, de autoria de Álvaro Andrini e Maria José Vasconcellos. Tem-se como foco apresentar possibilidades de explorações de tarefas, tais como estão nos livros, para um trabalho em aulas de matemática à luz da Educação Matemática Realística, abordagem em que o professor tem a função essencial de guiar os alunos a elaborarem seus conhecimentos.

Escolheu-se essa temática, principalmente, porque há unidades específicas desse conteúdo em cada um dos quatro volumes da coleção *Praticando Matemática*, por ser um assunto matemático relativamente novo do currículo do Ensino Básico do Brasil, introduzido oficialmente pelos Parâmetros Curriculares Nacionais em 1997 (BORBA et al., 2011), e por sua inegável relevância.

Ao mostrar ser factível uma alternativa para desenvolver esse trabalho na perspectiva da Educação Matemática Realística adotada pelo GEPEMA⁵, isto é, um trabalho mais próximo dos alunos com as tarefas usuais de uma coleção de livros didáticos de Matemática, acredita-se estar, de alguma maneira, contribuindo para a área de Educação Matemática, porque, ao lado do trabalho de Forster (2020)⁶, poderá gerar um material interessante para o uso do professor que ensina Matemática na Educação Básica e em outros níveis de ensino, podendo servir de sugestão ou mote para suas aulas.

Nessa direção, a pesquisa que gerou este artigo (PRESTES, 2021) buscou descrever, discutir e analisar, à luz da RME, tarefas de matemática que abordam a temática Probabilidade e Estatística da coleção selecionada de livros didáticos, por meio de uma abordagem qualitativa de cunho interpretativo com etapas propostas na Análise de Conteúdo, conforme a Figura 1.

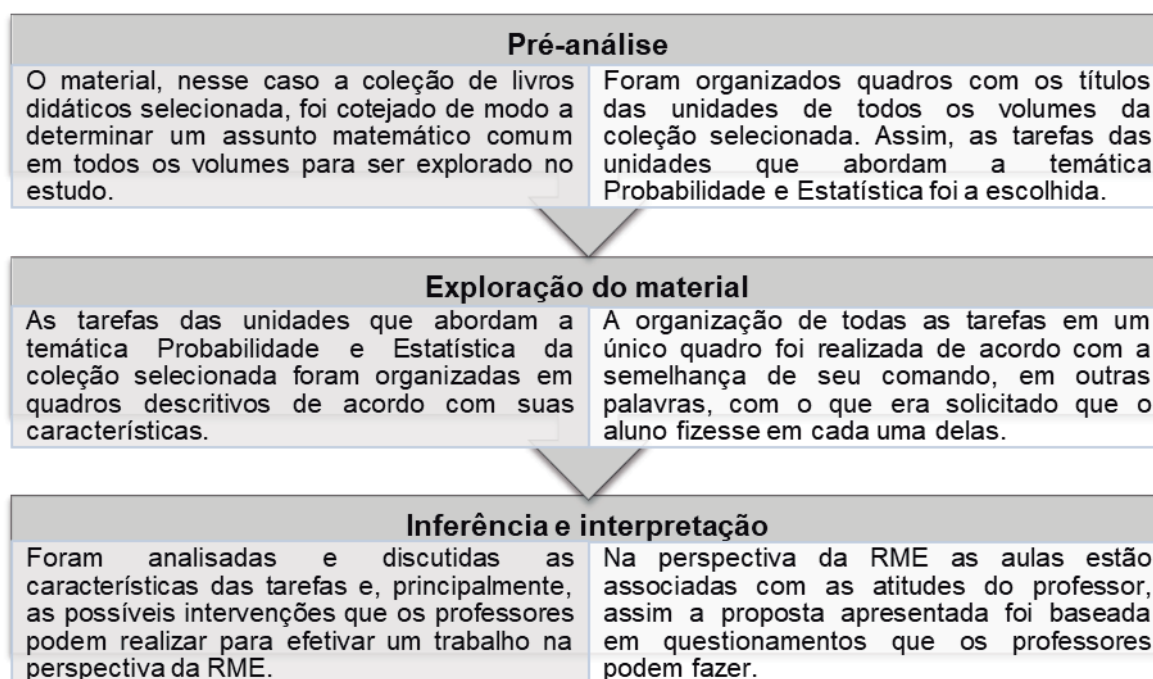
3 RME - *Realistic Mathematics Education*.

4 No decorrer deste artigo, sempre que for feita referência à coleção *Praticando Matemática* será à sua 4ª edição renovada.

5 Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática e Avaliação.

6 O objeto de estudo do trabalho de Forster (2020) é composto por um capítulo específico de todas as coleções de livros didáticos de Matemática aprovados no PNLD 2018 (Ensino Médio).

Figura 1 - Etapas do trabalho.



Fonte: Prestes (2021, p. 35).

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA

A Educação Matemática Realística (RME) é uma abordagem para o ensino de Matemática desenvolvida na Holanda a partir do final da década de 1960. Baseia-se principalmente, nas ideias de Hans Freudenthal (1905-1990), e surgiu como uma alternativa às influências do Movimento da Matemática Moderna (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996).

Uma das principais características dessa abordagem é que as situações consideradas realísticas permeiam todo o processo de aprendizagem e são utilizadas como fonte para iniciar o desenvolvimento de conceitos, ferramentas ou procedimentos matemáticos e, como contexto, no qual os estudantes podem, no decorrer do trabalho, aplicar seus conhecimentos matemáticos, que gradualmente, vão se tornando mais formais e gerais e menos específicos pertencentes a um único contexto, com o professor atuando como guia nesse processo (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN; DRIJVERS, 2014).

Na RME a interpretação do termo realístico está relacionada com o verbo neerlandês “*zich REALISE-ren*”, que não foi traduzido como realista por estar mais atrelado ao significado de imaginar, realizar, fazer ideia, lidar, tomar consciência de. Assim, o “mundo da fantasia dos contos de fadas, de ficção e até mesmo o mundo formal da matemática podem proporcionar contextos adequados para uma tarefa, na medida em que sejam reais nas mentes dos estudantes” (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2005, p. 2, tradução nossa).

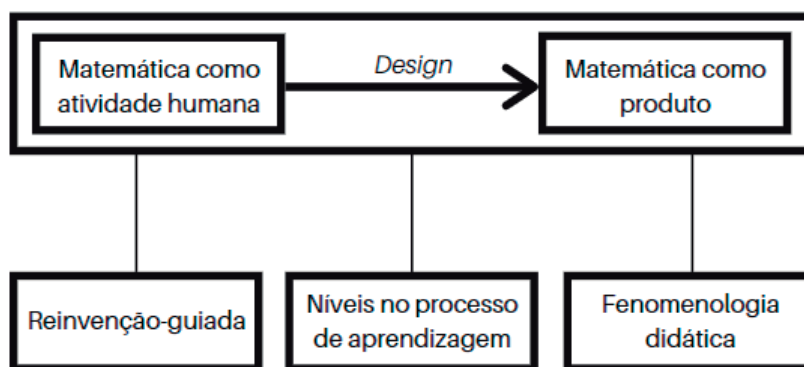
A forma atual da RME é caracterizada, principalmente, pela visão que Freudenthal tinha da Matemática. Para ele, a Matemática deveria estar conectada com a realidade, permanecer próxima aos

estudantes e ser relevante para a sociedade a fim de ser de valor humano (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2001). De maneira geral, a visão de Freudenthal pode ser resumida como segue.

A matemática deve ser vista acima de tudo como um processo, uma atividade humana. No entanto, ao mesmo tempo, essa atividade deve resultar em matemática como um produto. Isso leva à questão (design) de como moldar uma educação matemática que integre os dois objetivos. O trabalho de Freudenthal foi baseado em várias ideias sobre como lidar com essas questões. Essas ideias podem ser discutidas sob os títulos de 'Reinvenção-Guiada', 'Níveis no processo de aprendizagem' e 'Fenomenologia Didática' (GRAVEMEIJER; TERWEL, 2000, p. 786, tradução nossa).

Essa visão de Freudenthal pode ser representada pela Figura 2.

Figura 2 - Visão geral de Freudenthal da Educação Matemática



Fonte: Prestes (2021, p. 51).

Ao invés de tomar a Matemática como um produto, um assunto a ser apresentado aos estudantes, como geralmente era considerado em sua época [e ainda, infelizmente, muitas vezes ainda é], Freudenthal enfatizou a ideia de Matemática como uma atividade humana (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996, 2001).

[...] uma atividade de resolução de problemas, de procura por problemas, mas é também uma atividade de organização de um determinado assunto. Esse pode ser um assunto da realidade, que deve ser organizado de acordo com padrões matemáticos caso os problemas da realidade tenham que ser resolvidos. Também pode ser um assunto matemático, resultados novos ou antigos, seus próprios ou de outros, que deve ser organizado de acordo com novas ideias, para ser mais bem compreendido, em um contexto mais amplo ou por meio de uma abordagem axiomática. (FREUDENTHAL, 1971, p. 413-414, tradução nossa).

Assumindo a Matemática como uma atividade humana, não faz sentido algum o ensino partir de conteúdos matemáticos sistematizados, porque é a sistematização própria da Matemática que os estudantes devem aprender. Para Freudenthal (1968) apresentar conteúdos prontos, como um

sistema fechado para os estudantes operacionalizarem não caracteriza a Matemática como uma atividade humana, pois uma máquina também é capaz de operar em um sistema fechado. “Segundo Freudenthal, isso significa colocar a ‘carroça na frente dos bois’, tirar dos estudantes a oportunidade de eles mesmos desenvolverem alguma matemática” (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996, p. 11, tradução nossa).

Gravemeijer (1999) indica que, no design educacional, para a RME, a intenção é fomentar um processo no qual a Matemática formal é reinventada pelos próprios estudantes. Para isso, são indicados três princípios heurísticos: Reinvenção-Guiada, Modelos Emergentes e Fenomenologia Didática. A diferença entre esses três princípios e as ideias de Freudenthal a respeito do design - Reinvenção-Guiada, Níveis no processo de aprendizagem e Fenomenologia Didática - apresentadas anteriormente, parece residir principalmente na ênfase dada aos modelos emergentes.

De acordo com Gravemeijer (1999), a filosofia subjacente à ideia dos modelos emergentes é que a Matemática formal pode ser constituída pelos próprios alunos. A experiência cotidiana e a Matemática formal não devem ser consideradas disjuntas, uma vez que, a matemática mais formal vai sendo desenvolvida a partir de tarefas de contexto realístico, com os modelos emergentes. As tarefas iniciais devem permitir estratégias para modelos informais e, conforme os alunos forem tendo experiências com modelos similares, os modelos tendem a se tornar mais formais e a atenção dos estudantes deve se voltar às relações matemáticas envolvidas. Assim, os modelos começam a servir como meio para desenvolver uma matemática cada vez mais formalizada.

Ao assumir a Matemática como uma atividade humana que está continuamente em construção, Freudenthal (1991) acreditava que deveria ser oferecida aos estudantes a oportunidade de “reinventar” a matemática fazendo-a. “Isto significa possibilitar que os alunos experimentem um caminho ‘semelhante’ ao processo pelo qual a matemática foi elaborada historicamente e, então, atribuir algum sentido à sua utilidade em situações diversas” (FERREIRA; BURIASCO, 2016, p. 244).

Freudenthal (1973) argumentava que os alunos conseguem reinventar a Matemática por meio da matematização⁷, embora ele também reconheça que os alunos não conseguem simplesmente reinventar a Matemática que levou centenas de anos para matemáticos brilhantes desenvolverem. Por isso, ele propõe a Reinvenção-Guiada. Os professores e os manuais escolares devem ajudar os alunos no processo, enquanto tentam garantir que experienciem a aprendizagem da Matemática como um processo de reinvenção (GRAVEMEIJER, 2005, p. 92, tradução nossa).

Ao propor a Reinvenção-Guiada, Freudenthal (1991) enfatizou o caráter do processo de aprendizagem, pois a ideia geral é que os alunos se sintam autores e, conseqüentemente, responsáveis pelo seu próprio conhecimento. Eles devem ter a oportunidade de construir seu próprio conhecimento matemático com base nesse processo. Ele considerava a Reinvenção-Guiada como um tipo de maiêutica em que o professor é o responsável por antecipar as reações dos alunos e planejar ações para lidar com essas reações. A intenção é que o assunto a ser ensinado seja reinventado por meio dessa interação.

Os Níveis no processo de aprendizagem estão intimamente relacionados com a ideia de matematização progressiva, “em que os estudantes podem resolver problemas de contexto em diferentes níveis de compreensão, de tal modo que comuniquem suas resoluções a fim de que possam progredir para níveis mais avançados” (BURIASCO; SILVA, 2017, p. 3). Assim, aquilo que pode ser

⁷ Freudenthal (1991) nomeou de matematização a atividade de organização de assuntos utilizando ideias e/ou conceitos matemáticos. Para ele, a matematização é o núcleo da Educação Matemática.

entendido pelo professor como uma reinvenção deve ser experimentado pelo aluno como “matematização progressiva”, e, posteriormente, o próprio aluno deve analisar sua atividade como um todo.

Portanto, em certo nível, “determinado conceito pode ser o objeto da matematização, que, em outros níveis, pode ser utilizado como ferramenta útil para a organização de outros assuntos, na busca de matematizar e sistematizar outros objetos” (FERREIRA; BURIASCO, 2016, p. 245). Desse modo, na perspectiva da RME, em vez de propor modelos prontos aos alunos, é esperado um trabalho com modelos que, inicialmente, são operacionais, mas que tenham potencial para servir de base para obter um raciocínio matemático mais formal; isto é, de acordo com Gravemeijer (1999), como se fosse um processo em que o modelo passa a ser visto mais como um meio de raciocínio matemático do que como resultado de um contexto em particular.

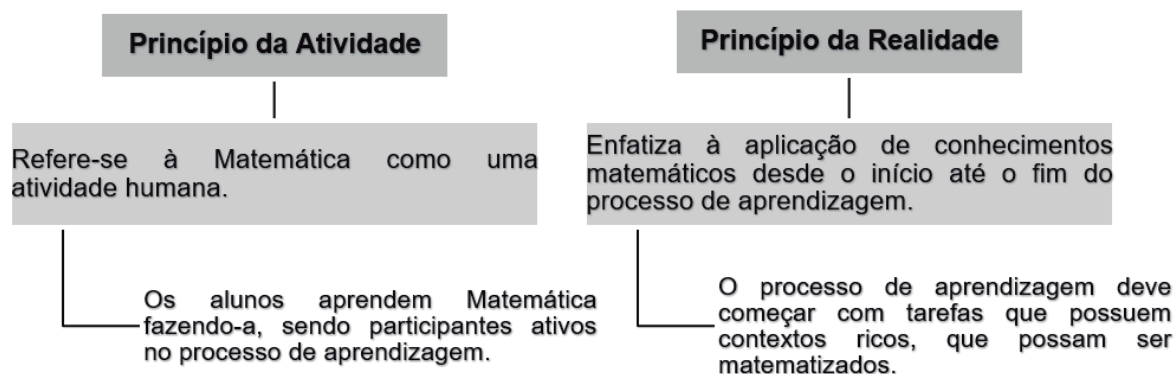
Segundo Gravemeijer e Terwel (2000), a ideia de Fenomenologia⁸ Didática surge em oposição às abordagens de ensino que iniciam com um conceito matemático pronto e sistematizado, uma vez que Freudenthal enfatizou a importância de uma incorporação fenomenológica de objetos matemáticos. Na Fenomenologia Didática, “as situações devem ser selecionadas de tal forma que possam ser organizadas pelos objetos matemáticos que os estudantes devem construir” (GRAVEMEIJER; TERWEL, 2000, p. 787, tradução nossa). Essa é uma tarefa desafiadora que envolve tornar um fenômeno acessível a alguma compreensão, representação e até mesmo ao cálculo e ao raciocínio.

Pode-se afirmar que, de modo geral, uma investigação fenomenológica se preocupa em encontrar tarefas específicas que possam ser generalizadas pelos alunos, o que faz todo o sentido se considerarmos o desenvolvimento e a evolução histórica da Matemática a partir de problemas específicos que passaram por um processo de generalização e formalização de conceitos. Logo, uma maneira de encontrar fenômenos que possam ser matematizados é buscar entender as origens de seu desenvolvimento histórico (GRAVEMEIJER; TERWEL, 2000).

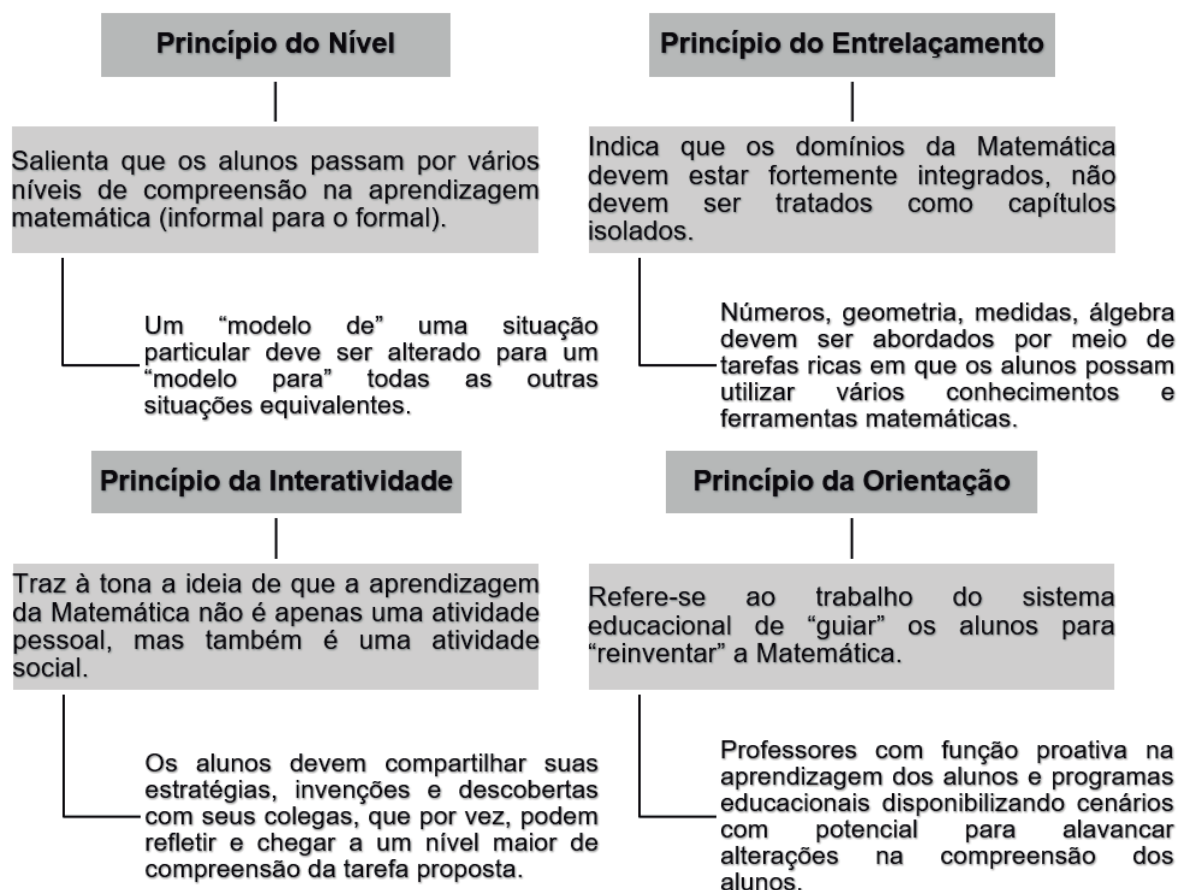
A Fenomenologia Didática também incorpora uma discussão em busca de identificar e entender como um conceito, estrutura ou ideia matemática se relaciona com o fenômeno do qual é o meio de organização e, como essa relação acontece nos processos de ensino e de aprendizagem (SANTOS, 2014).

A Figura 3 apresenta os princípios que podem ser utilizados para caracterizar resumidamente a RME. Esses princípios, porém, devem ser vistos relacionados entre si a partir de uma rede de relações.

Figura 3 - Princípios da RME.



⁸ Para Freudenthal (1983) o termo “fenomenologia” é utilizado com um sentido mais próximo de acontecimento ou evento.



Fonte: Prestes e Buriasco (2019, p. 93-94).

Esses princípios articulam algumas ideias comuns, relacionadas entre si, da concepção de ensino e de aprendizagem na perspectiva da RME.

DAS TAREFAS

Nesse texto, o objetivo principal é apresentar uma possível exploração de tarefas de Matemática de um livro didático. Para isso, considera-se que

[...] uma tarefa designa o item ou o conjunto de itens (exercício, problema) que o professor apresenta (ou atribui) aos alunos como proposta de trabalho, algo que um professor usa para demonstrar matemática, buscar interativamente com os alunos ou para pedir que os alunos façam alguma coisa. Tarefa também pode ser qualquer coisa que os alunos decidam fazer por si mesmos em uma situação particular (FORSTER, 2020, p. 31).

Nos livros didáticos de Matemática, frequentemente se encontra uma seção nomeada Exercícios, que podem ser entendidos como tarefas que, na maioria das vezes, envolvem assuntos puramente matemáticos, propostos para os alunos praticarem uma técnica ou habilidade matemática em particular. Os problemas, por sua vez, podem ser entendidos como tarefas escritas em palavras que

podem ser situações em que se aplique ou se forneça um contexto para um conceito matemático (HATTIE et al., 2016).

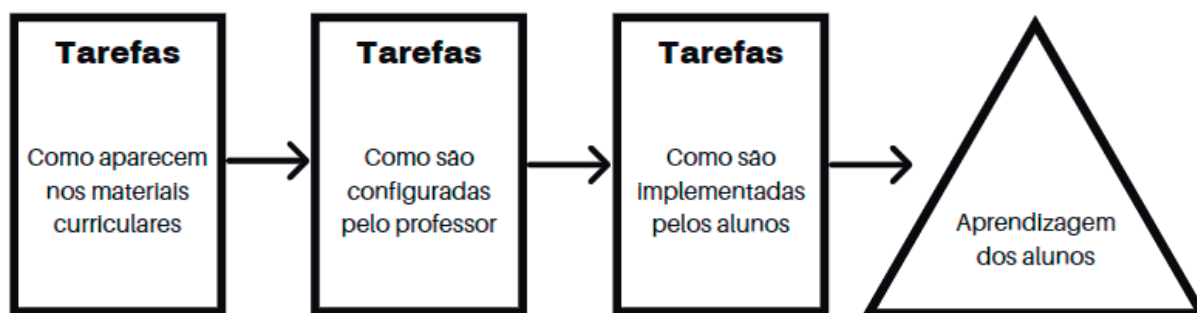
Independentemente do entendimento que se tenha dos tipos de tarefas, o fato é que elas são as ferramentas mediadoras tanto para ensinar quanto para aprender matemática (WATSON et al., 2013).

Tarefas que solicitam aos alunos a execução de um procedimento memorizado de maneira rotineira conduzem a um tipo de oportunidade para o aluno pensar; tarefas que exigem que os alunos pensem conceitualmente e que estimulam os alunos a fazerem conexões conduzem a um diferente grupo de oportunidades para os alunos pensarem (STEIN; SMITH, 1998, p. 269, tradução nossa).

Assim, julga-se relevante que o professor reflita na importância e nas consequências que cada tarefa proposta aos seus alunos pode acarretar, pois “estas vão além dos conteúdos que devem ser mobilizados para sua realização. Elas envolvem processos cognitivos relativos à compreensão, ao estabelecimento de estratégias e procedimentos, e à validação” (CYRINO; JESUS, 2014, p. 753).

A Figura 4 mostra uma representação dos desdobramentos das tarefas em sala de aula na dinâmica dos processos de ensino e de aprendizagem.

Figura 4 - Quadro de tarefas matemáticas.



Fonte: Stein e Smith (1998, p. 270).

A primeira fase desse esquema refere-se ao modo como as tarefas são propostas nos materiais didáticos. A segunda fase diz respeito ao modo como as tarefas são configuradas, anunciadas ou propostas pelo professor aos alunos, por exemplo, se devem ser resolvidas individualmente ou em grupo, se é necessário registrar sua resolução ou não, se devem utilizar algum recurso, ou seja, a maneira pela qual os alunos devem proceder. A terceira fase refere-se ao modo como as tarefas são implementadas pelos alunos, isto é, à maneira pela qual eles realmente a realizam. “Todas [essas fases], mas especialmente a fase de implementação, são vistas como influências importantes sobre o que alunos realmente aprendem” (STEIN; SMITH, 1998, p. 269, tradução nossa).

Esse quadro de tarefas explicita a responsabilidade do professor no trabalho com as tarefas matemáticas em sala de aula, que tem por objetivo a aprendizagem dos alunos. Segundo Cyrino e Jesus (2014, p. 754), com isso o professor pode:

- escolher tarefas adequadas a seus objetivos de ensino;
- iniciar um processo de ensino que priorize tarefas desafiadoras, nas quais o aluno pode estabelecer conexões com significados ou com ideias e conceitos matemáticos;
- reconhecer que as tarefas podem expressar mais do que o conteúdo;
- perceber como as tarefas influenciam o seu ensino e, conseqüentemente, a aprendizagem dos alunos;
- proporcionar um ambiente de aprendizagem durante as aulas de matemática e
- perceber qual o impacto de suas ações no processo de ensino e de aprendizagem.

Na RME, o foco do trabalho em sala de aula está diretamente relacionado com sequências de tarefas, muitas vezes com Trajetórias de Ensino e Aprendizagem⁹ e não com tarefas independentes (STEPHAN; AKYUZ, 2013). No Brasil, grande parte dos professores que ensina Matemática utiliza o livro didático como seu principal material de apoio, e eles geralmente propõem tarefas para a aplicação de um assunto matemático específico. As tarefas usualmente vão sendo abordadas de maneira independente e não como uma sequência proposta com a intenção de que um assunto matemático seja reinventado pelos alunos. A utilização de tarefas com base em determinado conteúdo matemático trabalhado pode passar a ideia de lista de exercícios, “nas quais o trabalho dos estudantes se limita a resolvê-las de forma mecânica e, em alguns casos, tendo como ponto de partida um “exercício-modelo” explicado anteriormente pelo professor” (CYRINO; JESUS, 2014, p. 753).

No intuito de descrever possíveis explorações por meio de intervenção na perspectiva da RME para as tarefas¹⁰ mais frequentes das unidades que abordam a temática escolhida, da coleção de livros didáticos de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental (6º ao 9º ano) mais distribuída pelo governo federal no PNLD 2017, decidiu-se agrupá-las; porque a discussão individualizada de cada tarefa tornaria a análise enfadonha e descontextualizada do objetivo principal. Os agrupamentos foram realizados de acordo com a semelhança das tarefas no que diz respeito ao seu “comando”, isto é, com o que a tarefa solicita que os alunos façam.

Os dois tipos de tarefas mais frequentes nas unidades específicas da temática Probabilidade e Estatística da coleção *Praticando Matemática*, apresentadas neste artigo, se enquadram em dois dos descritores construídos pelos autores¹¹.

- Relacionar informações explícitas em quadros, tabelas, gráficos (barras verticais, de setores, pictóricos ou de segmentos). Para esse descritor, foram agrupadas 116 das 388 tarefas distribuídas pelos quatro volumes da coleção, com maior predomínio no volume do 7º ano, com 55 tarefas.
- Determinar a probabilidade de ocorrência de um evento retirando informações do enunciado, de uma imagem ou de um quadro. Para esse descritor, foram agrupadas 55 das 388 tarefas distribuídas pelos quatro volumes da coleção, com maior predomínio no volume do 9º ano, com 52 tarefas.

A seguir, por meio de intervenções à luz da RME, apresenta-se uma possibilidade de exploração de duas tarefas de Matemática, que se enquadram nos descritores mais frequentes das tarefas das unidades específicas da temática investigada.

9 “Uma trajetória de ensino e aprendizagem é uma descrição de caminhos que podem ser percorridos pelos estudantes e contém: a elaboração da trajetória de aprendizagem que diz respeito ao processo de aprendizagem do estudante, a trajetória de ensino que contém orientações didáticas e indicações de elementos do currículo (Conteúdos)” (ROSSETTO, 2016, p. 92).

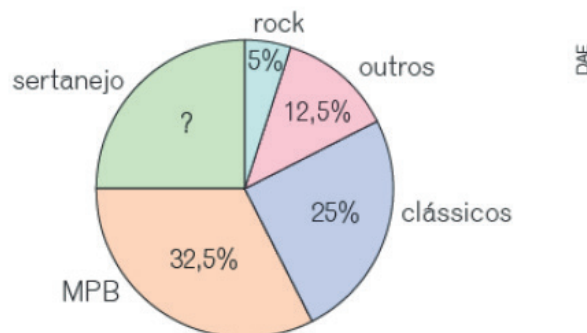
10 Considerou-se cada item como uma tarefa independente, exceto para as tarefas de múltipla escolha que não foram desmembradas.

11 A lista completa dos descritores construídos pelos autores pode ser acessada nas páginas 77 e 78 do trabalho de Prestes (2021).

O tipo de tarefa mais frequente na unidade específica da temática Probabilidade e Estatística do volume do 7º ano da coleção *Praticando Matemática - intitulada Construindo e Interpretando Gráficos* - enquadra-se no descritor mais frequente da coleção, a saber: relacionar informações explícitas em quadros, tabelas, gráficos (barras verticais, de setores, pictóricos ou de segmentos). Para resolver as tarefas desse agrupamento, os alunos precisam inicialmente realizar a leitura e a interpretação de um quadro, tabela, gráfico de barras verticais, de setores ou pictórico e depois relacionar as informações, de acordo com o solicitado no texto de seu enunciado, para obter uma resposta. A Figura 5 mostra uma tarefa do volume do 7º ano que foi agrupada nesse descritor.

Figura 5 - Tarefa que se enquadra no descritor que apresenta a maior frequência no volume do 7º ano da coleção *Praticando Matemática*.

6. Certo dia, uma loja vendeu 120 CDs. O gráfico abaixo mostra como foi a venda por gênero de música.



- Qual é o gênero musical mais vendido? Quantos CDs? **MPB; 39 CDs.**
- Qual é o gênero musical menos vendido? Quantos CDs? **Rock; 6 CDs.**
- Quais gêneros musicais tiveram vendas iguais? **Clássicos e Sertanejo.**
- Qual gênero musical vendeu 15 CDs? **Outros.**

Fonte: Andrini e Vasconcellos (2015a, p. 137).

Nesse caso, o tema - venda de CDs - talvez esteja desatualizado¹², mas é possível que os alunos consigam imaginar a situação apresentada.

Tarefas desse tipo possibilitam a realização de diferentes explorações com situações que podem estar mais próximas da realidade da maioria dos alunos com os quais se está trabalhando. Por exemplo, ao utilizar a situação do gênero musical preferido de cada aluno da turma, o tema da tarefa continuaria o mesmo, mas os alunos poderiam se sentir mais próximos da situação envolvida na tarefa.

Tanto nessa tarefa, que diz respeito à venda de CDs, quanto em qualquer outra tarefa que trate de gráficos de setores, é importante que os alunos estejam cientes de certas ideias que podem

¹² A contemporaneidade discutível desse e de outros temas abordados no decorrer da coleção *Praticando Matemática* pode estar relacionada ao fato de que essa versão é a 4ª edição renovada da obra. Talvez, no período histórico do lançamento da 1ª edição, os temas fossem atuais.

ser utilizadas para embasar a leitura e compreensão de gráficos de setores. Para isso, podem ser propostos alguns questionamentos, como os apresentados no Quadro 1, que também mostra uma intencionalidade por trás de cada um deles.

Quadro 1 - Questionamentos a respeito de gráficos de setores e suas intenções.

QUESTIONAMENTO	INTENÇÃO
O gráfico de setores também é popularmente conhecido como gráfico <i>pizza</i> . A que se deve essa denominação popular?	Provocar os alunos para que façam relações entre características do gráfico de setores e sua denominação popular.
De que outra maneira as informações do gráfico de setores podem ser apresentadas?	Possibilitar que os alunos relacionem gráficos de setores com outros meios de apresentação de informações.
O gráfico de setores é o mais indicado para apresentar essas informações? Por quê?	Oportunizar um momento para que os alunos possam investigar outros tipos de gráficos que podem ser utilizados para representar tais informações.
É possível que um gráfico de setores não seja representado por uma figura com formato circular? Em caso afirmativo, qual seria outra maneira?	Propor uma reflexão a respeito do formato do gráfico de setores.
Em um gráfico de setores, existe alguma relação entre a área de cada setor e o valor atribuído a ele? Em caso afirmativo, qual?	Provocar os alunos a relacionar a área de cada setor e o valor atribuído a ele.
Em um gráfico de setores, existe alguma relação entre o ângulo central de cada setor e o valor atribuído a ele? Em caso afirmativo, qual?	Incitar os alunos a relacionar a medida do ângulo central de cada setor e o valor atribuído a ele.
Em um gráfico de setores, existe alguma relação entre o ângulo central de cada setor e a área do setor correspondente? Em caso afirmativo, qual?	Estimular os alunos a relacionar a medida do ângulo central de cada setor e sua respectiva área.
Para quais situações, o gráfico de setores é o mais indicado?	Oportunizar um momento para que os alunos possam pensar nas situações em que o gráfico de setores geralmente é utilizado.

Fonte: Prestes (2021).

É desejável que esses questionamentos sejam trabalhados com pequenos grupos de alunos ou em um grande grupo formado por todos, pois desse modo é possível promover interações entre os envolvidos na aula.

As questões relacionadas com a área do setor circular podem ser interessantes para professores e alunos, porque, geralmente, esse assunto não é associado aos gráficos de setores. Ao realizar um trabalho associando esses assuntos, é dado um passo na direção da integração entre os domínios matemáticos indicados no Princípio do Entrelaçamento da RME, nesse caso, integração entre os domínios de Geometria com Probabilidade e Estatística.

Também é interessante propor questionamentos específicos para a temática das tarefas, como os apresentados a seguir.

- Você já foi a uma loja que vende CD? Por quê?
- O que representa a categoria “outros” no gráfico?
- Algum dos 120 CDs vendidos nesse dia era do gênero musical samba? Justifique sua resposta.

O primeiro questionamento possui um caráter não matemático, o que também pode ser explorado sempre que possível, porque a ideia desses questionamentos é explorar ao máximo a temática da tarefa.

Outro tipo de tarefa frequente na unidade específica da temática Probabilidade e Estatística do volume do 9º ano da coleção estudada enquadra-se em um dos descritores presentes apenas nos volumes do 8º e do 9º ano da coleção. Na maioria delas, cerca de 95%, pede-se para determinar a probabilidade de ocorrência de um evento retirando informações do enunciado, de uma imagem ou de um quadro.

Para resolver as tarefas desse agrupamento, os alunos precisam conhecer ou determinar a quantidade de elementos do conjunto formado por todos os resultados possíveis da situação apresentada (espaço amostral) antes de calcular a probabilidade de ocorrência de um evento definido pela razão entre a quantidade de casos favoráveis a esse evento e a quantidade total de possibilidades. A Figura 6 mostra uma tarefa do volume do 9º ano que foi agrupada nesse descritor.

Figura 6 - Tarefa que se enquadra no descritor que apresenta a maior frequência no volume do 9º ano da coleção Praticando Matemática.

27. Lançando-se simultaneamente dois dados, cujas faces são numeradas de 1 a 6, qual é a probabilidade de:

- a) serem obtidos números cujo produto seja ímpar? $\frac{1}{4}$
- b) serem obtidos números cujo produto seja par? $\frac{3}{4}$



Fonte: Andrini e Vasconcellos (2015b, p. 155).

Tarefas desse tipo também possibilitam a realização de diferentes explorações. Uma possibilidade seria um trabalho em três etapas. Primeiro, os alunos a resolveriam de maneira convencional, com lápis e papel. Em seguida, com um par de dados, não viciados, de seis faces em mãos, os alunos realizariam o lançamento simultâneo dos dois dados por dez vezes consecutivas e anotariam os resultados obtidos. Por fim, fariam uma comparação entre os valores determinados por meio de cálculos e os resultados obtidos com o lançamento dos dados.

Provavelmente os resultados obtidos não sejam equivalentes para todos. O professor deve, então, questionar os alunos sobre o porquê desse fato e conduzir uma discussão para que percebam que quanto maior a quantidade de lançamentos mais próximo dos valores obtidos por meio de cálculos o resultado será. Depois, caso algum aluno faça uma sugestão, o professor pode agrupar os resultados dos lançamentos de todos e verificar se os resultados obtidos por meio do lançamento dos dados se aproximam dos valores determinados por meio de cálculos.

Ao trabalhar com tarefas que envolvem probabilidade, é importante que os alunos estejam cientes de certas ideias que podem ser utilizadas para embasar o trabalho e que geralmente não são abordadas de maneira explícitas. No Quadro 2, estão alguns exemplos.

Quadro 2 - Questionamentos a respeito de probabilidade e suas intenções.

QUESTIONAMENTO	INTENÇÃO
Existe diferença entre possibilidade e probabilidade? Por quê?	Provocar os alunos a pensarem a respeito das ideias atreladas ao significado das palavras possibilidade e probabilidade em Estatística e fora dela.
Existe alguma relação entre a chance de ocorrência de um evento e a probabilidade de ocorrência do mesmo evento? Em caso afirmativo, qual?	Provocar os alunos a pensarem a respeito das ideias atreladas ao significado dos termos chance de ocorrência de um evento e probabilidade de ocorrência de um evento em Estatística.
É possível determinar a probabilidade de ocorrência de um evento em qualquer situação? Por quê?	Estimular os alunos a perceber que a probabilidade expressa por meio da razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis só é válida nas situações em que os casos possíveis forem igualmente prováveis.
O que o valor que expressa a probabilidade de ocorrência de um evento representa?	Oportunizar um momento para que os alunos reflitam no tema com o intuito de que verifiquem que o valor em questão é um meio de expressar o quanto é provável (diferente da certeza) a ocorrência de certo evento.
A probabilidade de ocorrência de um evento pode ser expressa por um número negativo? E por uma fração? E por um número positivo maior do que um? Por quê?	Possibilitar que os alunos percebam que a probabilidade de ocorrência de um evento pode ser expressa por um número real maior ou igual do que zero e menor ou igual do que um, escrito na forma de fração, na forma decimal, por meio de porcentagem.
Por que, ao expressar a probabilidade de ocorrência de um evento por meio da razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis, é necessário que a ocorrência de todos os casos possíveis seja igualmente provável?	Incitar os alunos a refletirem a respeito das condições necessárias para expressar a probabilidade de ocorrência de um evento.

Fonte: Prestes (2021).

Também é interessante propor questionamentos específicos para a temática das tarefas, como os apresentados a seguir.

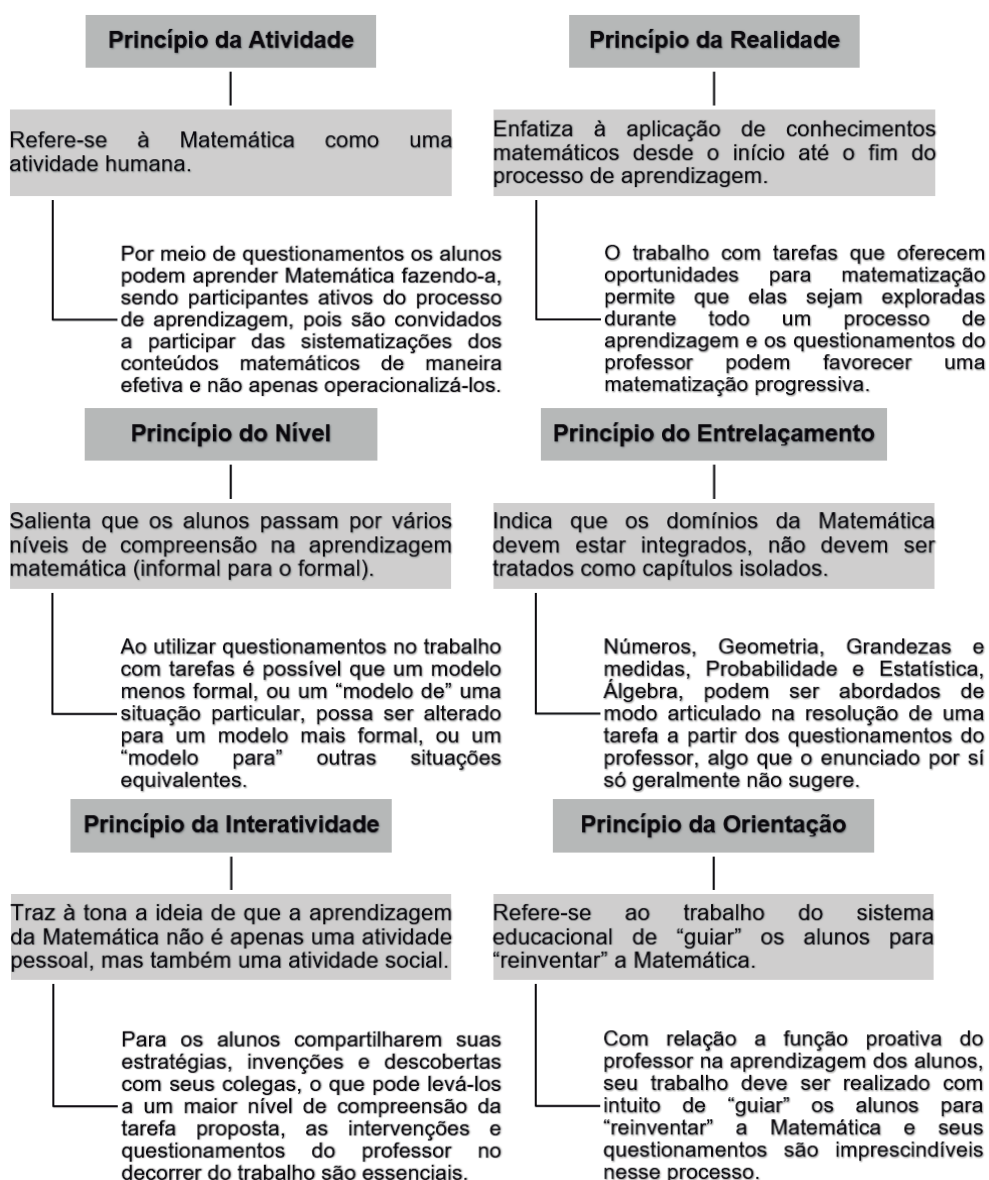
- Existem dados com uma quantidade de faces diferente de 6? Se sim, faça o esboço de um exemplo. Se não, por quê?
- Apesar de todos os resultados possíveis serem conhecidos, é possível prever com certeza qual deles ocorrerá? Por quê?
- O produto da pontuação obtida só pode ser par ou ímpar? Por quê?
- Qual é a probabilidade de serem obtidas pontuações cuja soma seja maior do que 8? E menor do que 5? Por quê?
- O que pode acontecer se pelo menos um dos dados for “viciado”, isto é, se a ocorrência de todos os resultados possíveis não for igualmente provável?
- Existe algum evento que você tenha certeza de que ocorrerá? Por quê?
- Existe algum evento que seja impossível de ocorrer? Por quê?

CONSIDERAÇÕES

Apenas por meio da análise de um descritor ou do enunciado de uma tarefa, não é possível afirmar se um princípio da RME está sendo contemplado, pois tais princípios estão atrelados às atitudes e às ações do professor, alguns mais outros menos. Para desenvolver um trabalho na perspectiva da RME, as atitudes do professor são imprescindíveis, pois ele pode explorar os assuntos matemáticos envolvidos nas tarefas, bem como as resoluções dos alunos por meio de questionamentos (intervenções), mediante a Reinvenção-Guiada, etapa em que os alunos têm a oportunidade de ser autores e, por conseguinte, elaborar seu próprio conhecimento matemático.

De certo modo, o trabalho com os questionamentos perpassa por todos os princípios da RME, conforme mostra o esquema da Figura 7, que apresenta a ideia principal dos princípios da RME e como os questionamentos podem se enquadrar em cada um deles.

Figura 7 - Questionamentos enquadrados nos princípios da RME.



Fonte: Prestes (2021, p. 99).

Assim, fica explícito que os questionamentos a respeito de uma tarefa podem se enquadrar nos princípios da RME. Quando se fala em princípios está se referindo ao seu caráter fundamental de base (FREUDENTHAL, 1991).

No desenvolvimento de um trabalho na perspectiva da RME, o professor pode explorar tanto o entorno social quanto os assuntos matemáticos envolvidos nas tarefas e nas resoluções dos alunos por meio de questionamentos, por meio da Reinvenção-Guiada. Esse tipo de trabalho é um meio de oferecer aos alunos a oportunidade de construir elaborar seu próprio conhecimento. Portanto, é possível situar as sugestões de questionamentos apresentados anteriormente de maneira que permeiem o modo como as tarefas são configuradas pelo professor e como são implementadas pelos alunos, conforme a Figura 8.

Figura 8 - Quadro de tarefas matemáticas com questionamentos do professor.



Fonte: Prestes (2021, p. 100).

Desse modo, ficam explícitos os momentos em que os questionamentos do professor se localizam na representação dos desdobramentos das tarefas em sala de aula na dinâmica dos processos de ensino e de aprendizagem propostos por Stein e Smith (1998). No entanto, é necessário ficar claro que não é qualquer tipo de questionamento (ou conjunto de) que caracteriza uma abordagem à luz da RME. De maneira semelhante ao trabalho de Forster (2020, p. 85), os questionamentos propostos têm como uma de suas principais intenções “possibilitar que as tarefas sejam implementadas de modo a colocar os alunos em movimento de aprendizagem, esperando que eles assumam um papel ativo no seu processo de aprender”. A ideia é que os questionamentos propostos possam ser adaptados ou servir de inspiração para um trabalho com outras temáticas, além dessa que aqui foi apresentada, e em outros níveis de ensino.

De modo geral, é possível realizar um trabalho que favoreça os processos de ensino e de aprendizagem com qualquer tarefa de livros didáticos de Matemática. Isso faz todo o sentido quando se trata da abordagem da RME, que tem suas ações diretamente relacionadas tanto com as atitudes do professor e seu compromisso com a aprendizagem, quanto com o envolvimento e as ações dos alunos.

Pelo fato de a abordagem da RME ser baseada em princípios, um trabalho nessa perspectiva pode ser realizado de diferentes maneiras, já que não há um único *modus operandi*. Inicialmente, tudo vai depender das atitudes e escolhas do professor. Para se ter uma ideia, caso os mesmos questionamentos presentes neste estudo fossem propostos para alunos de duas turmas distintas, possivelmente

o andamento das aulas tomaria caminhos diferentes, porque as respostas dadas pelos alunos tendem a não ser exatamente iguais, e o professor pode explorá-las nas direções que julgar mais convenientes.

Para um professor que “ensina” Matemática e a toma como uma ciência exata, pronta, acabada e entende a aprendizagem como algo a ser adquirido por meio de reprodução de procedimentos, a abordagem da RME não é viável. Para que seja realizado um trabalho à luz da RME, é necessário que o professor esteja convicto de que a Matemática está em constante evolução e que a aprendizagem é um processo que os alunos constroem, tanto individual quanto coletivamente, sob sua orientação, mas não apenas.

Entende-se que a utilização de descritores para analisar e discutir as tarefas “tira o peso” da coleção de livros didáticos em questão, porque qualquer coleção de livros didáticos, ou material didático, destinados aos anos finais do Ensino Fundamental podem ter suas tarefas das unidades que abordam a temática Probabilidade e Estatística agrupadas com o auxílio dos descritores aqui construídos. Desse modo, este estudo poderia ter sido realizado com outra coleção de livros didáticos aprovada no PNLD 2017. A escolha da coleção *Praticando Matemática* se deu por ser a mais distribuída nesse PNLD.

Em pesquisas envolvendo a área de Educação Estatística existem estudos, como o de Estevam e Cyrino (2016), que discutem a importância das tarefas no trabalho de sala de aula e vai ao encontro do apresentado nesta pesquisa, o que indica a preocupação de pesquisadores de diferentes áreas da Educação Matemática com o tema. Isso sugere que esta pesquisa pode ser diretamente útil tanto para seguidores da RME, quanto para quem lida com outras abordagens na Educação Estatística.

De modo geral, este artigo apresentou algumas das principais ideias da Educação Matemática Realística (RME), abordagem de ensino que fundamenta o trabalho mediante as considerações sobre as tarefas matemáticas com ênfase em sua importância nas aulas e possíveis explorações das tarefas mais frequentes da temática estudada.

Este estudo deixou evidente que é possível realizar um trabalho que favoreça os processos de ensino e de aprendizagem utilizando tarefas usuais de livros didáticos, desde que acompanhadas de determinadas intervenções do professor. É possível, também, ampliar os estudos utilizando como objeto outras coleções de livros didáticos de Matemática destinados aos anos iniciais do Ensino Fundamental e ao Ensino Médio, para identificar divergências e convergências entre os descritores obtidos ao agrupar as tarefas da temática Probabilidade e Estatística. Assim, seria possível ter uma ideia mais precisa dos tipos de tarefas mais frequentes dessa temática na Educação Básica e fazer uma análise do tipo de aprendizagem que essas tarefas oferecem aos alunos que concluem esse nível de ensino.

Enfim, as possibilidades de trabalho em sala de aula com tarefas matemáticas são grandes. Por meio de uma única tarefa, podem ser explorados diferentes assuntos, matemáticos ou não, que contribuem para a formação dos alunos. Para isso, o compromisso, a criatividade e as intenções dos professores são fundamentais, pois, nas escolas, são eles os responsáveis por possibilitar aos alunos um envolvimento em atividades de aprendizagens e por orientá-los no fazer matemática.

REFERÊNCIAS

ANDRINI, Álvaro; VASCONCELLOS, Maria José. **Praticando matemática 7**. 4. ed. renovada. São Paulo: Editora do Brasil, 2015b.

ANDRINI, Álvaro; VASCONCELLOS, Maria José. **Praticando matemática 9**. 4. ed. renovada. São Paulo: Editora do Brasil, 2015d.

BORBA, Rute Elizabeth de Souza et al. Educação estatística no ensino básico: currículo, pesquisa e prática em sala de aula. **EM TEIA - Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, Recife, v. 2, n. 2, 2011.

BURIASCO, Regina Luzia Corio de; SILVA, Gabriel dos Santos e. Aspectos da Educação Matemática Realística. **ReBECM**, Cascavel, v. 1, n. 1, p. 1-15, dez. 2017.

CYRINO, Márcia Cristina de Costa Trindade; JESUS, Cristina Cirino de. Análise de tarefas matemáticas em uma proposta de formação continuada de professoras que ensinam matemática. **Ciência & Educação**, Bauru, v. 20, n. 3, p. 751-764, 2014.

ESTEVAM, Everton José Goldoni; CYRINO, Márcia Cristina de Costa Trindade. Desenvolvimento profissional de professores em Educação Estatística. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 9, n. 1, p. 115-150, 2016.

FERREIRA, Pamela Emanuelli Alves; BURIASCO, Regina Luzia Corio de. Educação Matemática Realística: uma abordagem para os processos de ensino e de aprendizagem. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 18, n. 1, p. 237-252, 2016.

FORSTER, Cristiano. **Um olhar realístico para tarefas de função afim em livros didáticos**. 2020. 112f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2020.

FREUDENTHAL, Hans. Why to Teach Mathematics so as to Be Useful. **Educational Studies in Mathematics**, v. 1, n. 1, p. 3-8, 1968.

FREUDENTHAL, Hans. Geometry between the devil and the deep sea. **Educational Studies in Mathematics**, v. 3, n. 3-4, p. 413-435, 1971.

FREUDENTHAL, Hans. **Didactical phenomenology of mathematical structures**. Dordrecht: Reidel Publishing Company, 1983.

FREUDENTHAL, Hans. **Revisiting Mathematics Education**. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1991.

GRAVEMEIJER, Koeno. How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. **Mathematical Thinking and Learning**, v. 1, n. 2, p. 155-177, jun. 1999.

GRAVEMEIJER, Koeno. O que torna a Matemática tão difícil e o que podemos fazer para o alterar? In: SANTOS, Maria Leonor; CANAVARRO, Ana Paula; BROCARD, Joana. **Educação matemática: Caminhos e encruzilhadas**, Lisboa: APM. 2005. p. 83-101.

GRAVEMEIJER, Koeno; TERWEL, Jan. Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory. **Journal of Curriculum Studies**, v. 32, n. 6, p. 777-796, nov-dez. 2000.

HATTIE, John et al. **Visible Learning for Mathematics, Grades K-12: What works best to optimize student learning**. Thousand Oaks, CA: Corwin, 2016.

PRESTES, Diego Barboza. **Um olhar realístico para tarefas de probabilidade e estatística de uma coleção de livros didáticos de matemática do Ensino Fundamental**. 2021. 128f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2021.

PRESTES, Diego Barboza; BURIASCO, Regina Luzia Corio de. Prova-Escrita-em-Fases de matemática no 5º ano do Ensino Fundamental. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, v. 8, n. 15, p. 89-105, jan-jun. 2019.

ROSSETTO, Hallynnee Héllenn Pires. **Trajectoria Hipotética de Aprendizagem sob um olhar realístico**. 2016. 104f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

SANTOS, Edilaine Regina dos. **Análise da produção escrita em matemática: de estratégia de avaliação a estratégia de ensino**. 2014. 157f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2014.

STEIN, Mary Kay; SMITH, Margaret Schwan. Mathematical Tasks as a Framework for Reflection: From Research to Practice. **Mathematics Teaching in the Middle School**, v. 3, n. 4, p. 268-275, jan. 1998.

STEPHAN, Michelle; AKYUZ, Didem. An Instructional Design Collaborative in One Middle School. In: MARGOLINAS, Claire (Ed.). **Task Design in Mathematics Education**. Proceedings of ICMI Study 22, Oxford, United Kingdom. 2013. p. 509-518.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, Marja. **Assessment and Realistic Mathematics Education**. Utrecht: CD-β Press/Freudenthal Institute, Utrecht University, 1996.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, Marja. Realistic Mathematics Education as work in progress. In: LIN, F. L. (Ed.). **Common Sense in Mathematics Education**. Proceedings of 2001 The Netherlands and Taiwan Conference on Mathematics. Taipei, Taiwan. nov. 2001. p. 1-43.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, Marja. The role of contexts in assessment problems in mathematics. **For the Learning of Mathematics**. FLM Publishing Association, Edmonton, Alberta, Canada, v. 25, n. 2, p. 2-9, jul. 2005.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, Marja; DRIJVERS, Paul. Realistic Mathematics Education. In: S. Lerman (Ed.), **Encyclopedia of Mathematics Education**. Dordrecht, Heidelberg, New York, London: Springer. 2014, p. 521-525.

WATSON, Anne et al. Introduction. In: MARGOLINAS, Claire. **Task Design in Mathematics Education**. Proceedings of ICMI Study 22, Oxford, United Kingdom. 2013. p. 7-14.

RECEBIDO EM: 12 nov. 2021

CONCLUÍDO EM: 05 set. 2022