

ANÁLISE DE ERROS E PROPORCIONALIDADE: UMA EXPERIÊNCIA COM ALUNOS DE GRADUAÇÃO E PÓS-GRADUAÇÃO

*ERROR ANALYSIS AND PROPORTIONALITY:
AN EXPERIMENT WITH UNDERGRADUATE AND GRADUATE STUDENTS*

ELENI BISOGNIN*
LEANDRA ANVERSA FIOREZE**
HELENA NORONHA CURY***

RESUMO

Neste trabalho, estão organizados resultados parciais do projeto de pesquisa *Análise de Erros em Disciplinas Matemáticas de Cursos Superiores*, do qual participaram oito instituições de ensino superior do Rio Grande do Sul. Inicialmente, indicam-se algumas teorizações sobre análise de erros e, em seguida, apresenta-se um breve relato da análise de uma das questões do teste, aplicado a calouros da área de Ciências Exatas, versando sobre proporcionalidade. Discute-se a importância do conceito de proporcionalidade no ensino de Matemática e apresenta-se a experiência desenvolvida na UNIFRA, com alunos de graduação em Matemática e pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática. O estudo aponta diferenças significativas de conceitualização e de escrita entre os dois grupos, bem como nas justificativas apresentadas e procedimentos de resolução das atividades. Essas análises servirão de subsídios à proposição de alternativas para o ensino desse conteúdo em disciplinas de graduação.

Palavras-chave: Proporcionalidade; Análise de erros; Estratégias de ensino.

ABSTRACT

In this paper, we present partial data of the research project "Error analysis in mathematics subjects in undergraduate courses. Eight universities of the State of Rio Grande do Sul had participated in this research. Initially, we indicate some ideas on error analysis and, after that, a brief relate about error analysis of one of the test questions, applied to freshmen of Exact Sciences area, concerning proportionality. It is argued the importance of the concept of proportionality in mathematics teaching and we present the experiment developed in UNIFRA, with undergraduate in Mathematics and post-grade students of a master course in Teaching of Physics and Mathematics. The study points significant differences of conceptualization and writing between the two groups, as well as in the justifications and solving procedures of the activities. These analyses will serve of subsidies to consider alternatives for the teaching of this content in undergraduate subjects.

Keywords: Proportionality; Error analysis; Teaching strategies.

* Doutora em Matemática, Professora em Ensino de Física e de Matemática do Centro Universitário Franciscano.

** Mestre em Matemática Aplicada, Professora do Curso de Matemática do Centro Universitário Franciscano.

*** Doutora em Educação, Professora da Faculdade de Matemática da PUCRS.

INTRODUÇÃO

A análise dos erros cometidos por alunos de Matemática, ao resolverem oralmente ou por escrito alguma questão dessa disciplina, tem sido considerada fonte de conhecimento para os professores, especialmente para aqueles que estão em formação inicial ou continuada. Conhecer as concepções dos alunos sobre algum conceito, analisar como ele pensa ao resolver um problema são elementos que podem fazer da análise de erros uma forma de pesquisar a própria prática pedagógica. Shulman (1987) comenta que “o estudo das concepções errôneas do estudante e sua influência sobre a aprendizagem subsequente estão entre os mais férteis tópicos da pesquisa cognitiva” (p. 10).

Muitas vezes, as pesquisas sobre erros são parte de investigações mais abrangentes, outras vezes são o núcleo dos questionamentos. Têm sido variados os conteúdos e níveis de ensino abordados em análises de erros, desde que as primeiras pesquisas sistemáticas surgiram nos Estados Unidos e na Europa, no início do século passado (RADATZ, 1980). As investigações iniciais estavam focadas no número de erros de cada tipo, para remediar os problemas detectados. Posteriormente, os objetivos da análise se voltaram para o conhecimento do aluno ou para a exploração de um determinado conteúdo a partir dos erros.

Borasi (1996) apresenta exemplos de aproveitamento dos erros como ferramentas para a aprendizagem, desenvolvendo questionamentos a partir das respostas dos estudantes. Por exemplo, ao perguntar qual a probabilidade de retirar uma carta de espadas ou uma rainha, ao pegar uma carta de um baralho, podem ocorrer as respostas 17/52, 18/52 ou 16/52. Borasi

(1996) propõe que os alunos discutam suas justificativas para as respostas, até descobrirem a fórmula para a probabilidade de dois eventos não-independentes.

Partindo do pressuposto de que as dificuldades dos alunos são motivo para retomada dos tópicos estudados, foi desenvolvida uma pesquisa envolvendo calouros de oito instituições de ensino superior do Rio Grande do Sul, aos quais foram propostas questões sobre conteúdos matemáticos da Educação Básica. Assim, neste artigo, apresenta-se a análise dos erros em uma questão dessa pesquisa que envolve raciocínio proporcional, sugerem-se considerações sobre o conceito de proporcionalidade e citam-se atividades aplicadas a estudantes de graduação e pós-graduação, com vistas ao trabalho com erros.

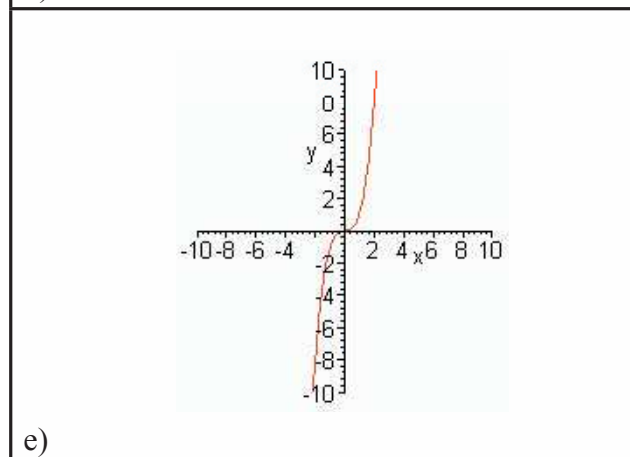
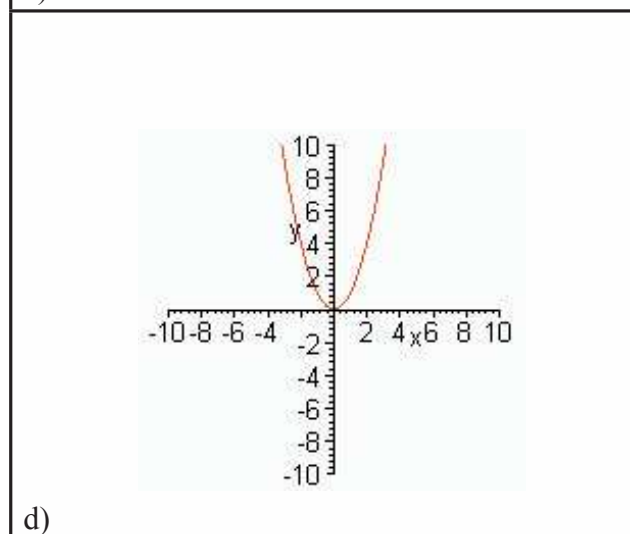
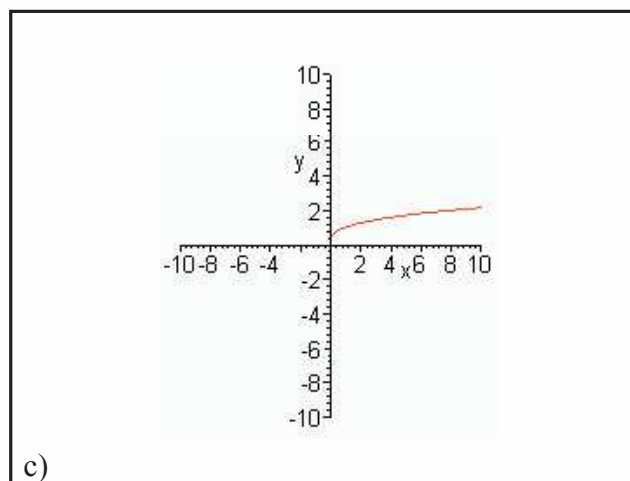
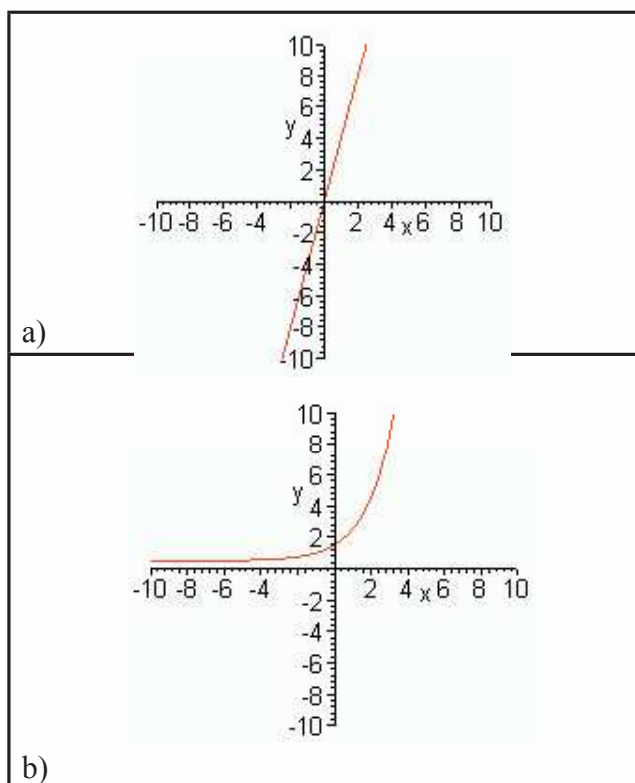
1 A PESQUISA COM CALOUROS DE CIÊNCIAS EXATAS E A ANÁLISE DE UMA QUESTÃO DO TESTE

O projeto *Análise de erros em disciplinas matemáticas de cursos superiores* teve apoio do CNPq, por meio de recursos do Edital Universal 2004. A equipe de investigadores foi formada por docentes de disciplinas matemáticas das universidades envolvidas e aplicou-se um teste com questões de múltipla escolha a uma amostra de conveniência, formada por 368 alunos calouros de cursos de Ciências Exatas, como Matemática, Engenharia e Informática. A pesquisa teve como objetivos: a) analisar e classificar erros cometidos por alunos ingressantes em disciplinas matemáticas de cursos superiores; b) elaborar e desenvolver atividades de sala de aula para explorar as dificuldades detectadas; c) avaliar os resultados

da experiência e a possibilidade de reaplicação em diferentes Instituições de Ensino Superior do Rio Grande do Sul e do País.

As questões do teste abordavam conteúdos de Ensino Fundamental e Médio, especialmente aqueles tópicos que, em geral, são exigidos para o estudo de conceitos do Cálculo Diferencial e Integral e de Álgebra Linear. Além de assinalar a alternativa considerada correta, o aluno devia apresentar os cálculos e justificativas para a resolução, visto que foi feita análise quantitativa e qualitativa das respostas.

A questão 2 do teste tinha o seguinte enunciado: *Dois grandezas representadas por x e y são diretamente proporcionais. Um modelo gráfico para a representação dessa relação é*



Após a digitação de todos os dados em planilha eletrônica, foi possível determinar a frequência de respostas a cada alternativa, em cada questão do teste. Para a questão 2, acima apresentada, temos os seguintes resultados:

Alternativa	Frequência	Porcentagem
a	192	52,5
b	40	10,9
c	19	5,2
d	62	16,8
e	23	6,3
em branco	32	8,7
Total	368	100,0

Quadro 1 – Distribuição de respostas da questão 2.

A alternativa “a”, que é a correta, teve efetivamente o maior percentual de acertos, mas, considerando-se que o teste foi aplicado a alunos calouros, esperava-se que o assunto já fosse conhecido e que os estudantes pudessem relacionar, sem maiores dificuldades, o gráfico de uma função do tipo $y=ax$ com a informação de que as duas grandezas eram diretamente proporcionais. No entanto, vemos que cerca de 17% dos respondentes consideraram que o gráfico deveria ser o de uma função do tipo $y=x^2$. Levantam-se hipóteses sobre isso, como, por exemplo, considerar que o erro se deve ao fato de que a função quadrática mais estudada na Educação Básica de Matemática é aquela representada por uma parábola de vértice na origem; o aluno pode ter se confundido entre esta função e uma linear que passa pela origem. No entanto, para discutir essa hipótese, seria necessário aprofundar a investigação, entrevistando os alunos que cometeram erros ou que não responderam à questão.

Na questão 2, o aluno deveria também justificar a sua escolha. Com relação à justificativa, embora a maioria tenha escolhido a alternativa correta, muitos alunos que marcaram corretamente a questão explicaram suas escolhas devido ao fato de que “sendo $x = y$, se x cresce, y também cresce e, se x decresce, y também decresce na mesma proporção” (fala de um dos alunos).

Verifica-se que o aluno não conceitua corretamente a proporcionalidade, identificando o modelo matemático somente como um caso específico da função linear, que é a função identidade, e também que, para ser proporcional, a função deve ser crescente. Quanto a esse tipo de erro, apoiamos-nos em Brousseau (apud PINTO, 1998), ao afirmar que os erros não são simplesmente ausência de conhecimento, mas expressam conhecimentos mal formados que, depois, tornam-se resistentes. Na realidade, os alunos, ao escolherem a opção correta, possuem uma noção de proporcionalidade, mas não em relação à conceituação, à consciência do porquê da escolha obtida e explicitação dos motivos dessa escolha.

2 O CONCEITO DE PROPORCIONALIDADE E SUA IMPORTÂNCIA PARA A APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA

O conceito de proporcionalidade, introduzido no Ensino Fundamental, vai ser exigido dos estudantes novamente no Ensino Médio, em problemas que envolvem razões e proporções ou, ainda, na representação gráfica de uma função que relaciona grandezas direta ou inversamente proporcionais. Também outros conteúdos têm como uma de suas fundamentações a proporcionalidade, como, por exemplo, trigonometria, semelhança de figuras geométricas, lei de Boyle, Lei de Hooke, problemas envolvendo porcentagem, dentre outros. Nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006), é sugerido que sejam proporcionadas, aos alunos, situações em que eles sejam capazes de

[...] resolver problemas do cotidiano, tais como: operar com números inteiros e decimais finitos; operar com frações,

em especial com porcentagens; fazer cálculo mental e saber estimar ordem de grandezas de números; usar calculadora e números em notação científica; resolver problemas de proporcionalidade direta e inversa [...] (BRASIL, 2006, p. 70).

O raciocínio proporcional vem sendo abordado em muitas avaliações em grande escala, como o Indicador Nacional de Alfabetização Funcional (INAF). Ferreira e Gomes (2004), ao discutir esse constructo no âmbito das habilidades matemáticas, avaliadas pelo 2º INAF, em 2002, apóiam-se em Kishimoto para explicar como estão entendendo o raciocínio proporcional:

1) capacidade de identificar relações de proporcionalidade direta e inversa; 2) habilidade de, conhecida a existência de uma relação de proporcionalidade entre duas grandezas, inferir o valor de uma delas quando a outra é alterada (2004, p. 129).

Analisando sete questões do INAF, as autoras concluem que os participantes mostram um desempenho muito superior no que se refere à capacidade de identificar relações de proporcionalidade, mas uma dificuldade muito grande nos cálculos. Esse levantamento não é uma avaliação de rendimento escolar, porque é feito com uma amostra retirada da população brasileira jovem e adulta, inserida ou não no sistema escolar; no entanto, em outros exames, específicos para determinados níveis de ensino, como o do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) e o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), pode-se verificar que a proporcionalidade é um conceito sempre avaliado.

Entre os temas e descritores da prova de Matemática do SAEB, para a 8ª série do Ensino Fundamental, encontra-se, sobre “Números

e Operações”, o descritor D29, “Resolver problema que envolva variações proporcionais, diretas ou inversas entre grandezas”. Já, para o 3º ano do Ensino Médio, sob o mesmo tema, encontra-se o descritor D15, igual ao D19 e, ainda, os descritores D21 (“Identificar o gráfico que representa uma situação descrita em um texto”) e D24 (“Reconhecer a representação algébrica de uma função do primeiro grau, dado o seu gráfico”), que mostram a adequação da questão 2, por nós proposta no teste aos calouros (BRASIL, 2005).

Já, no ENEM, as questões não são específicas para um determinado conceito, mas exploram competências e habilidades apontadas nos Parâmetros Curriculares Nacionais, tais como: “Construir e aplicar conceitos das várias áreas do conhecimento para a compreensão de fenômenos naturais [...]” ou “Selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações representados de diferentes formas, para tomar decisões e enfrentar situações-problema” (BRASIL, 1998, p. 62-63). Nas questões do exame, pode-se, efetivamente, verificar a necessidade de aplicação do raciocínio proporcional em outras áreas do conhecimento, além da Matemática.

O ensino e a aprendizagem do conceito de proporcionalidade vêm sendo investigados por pesquisadores de vários países e sob distintas abordagens. Schwartz e Moore (1998), realizando uma pesquisa com estudantes de 6º ano, apresentados a situações que exigiam raciocínio proporcional, notaram que a centralização dos alunos em uma só das dimensões da informação é a fonte mais comum de erros em problemas de proporção.

Aguilar (1994), ao estudar representações de variação, apontou um dos aspectos impor-

tantes no trabalho com proporcionalidade, a saber, o relacionamento desse conceito ao desenvolvimento da noção de variação, com a utilização de tabelas, gráficos e fórmulas, que está estreitamente vinculada à promoção, no estudante, de atitudes de observação, registro e utilização de linguagem matemática.

No entanto, o uso de gráficos de funções que representam uma situação de proporcionalidade entre duas grandezas traz, ainda, outras dificuldades para os estudantes. Duval (2006) define dois tipos de transformação de representações semióticas, o *tratamento* (quando a transformação se dá dentro de um mesmo registro) e a *conversão* (quando há mudança de registro). Se uma regra de conversão é dada explicitamente, como acontece no fornecimento aos alunos da regra que permite associar a cada par ordenado de reais um ponto de um plano cartesiano, então não deveria haver dificuldades para a construção de um gráfico de uma função linear, por exemplo. No entanto, Duval (2006) apresenta resultados de uma situação em que, mostradas as representações gráficas das funções $y=x$ e $y=2x$ a alunos de 15 anos, em média, solicitados a indicar as respectivas leis das funções, 60% deles reconheceram a função identidade e 25% reconheceram a função definida por $y=2x$. Assim, ao planejar atividades de ensino que contemplem a conversão, é necessário entender que elas devem trabalhar os dois sentidos da conversão.

Em nossa pesquisa, a questão 2 tinha a dificuldade adicional de que o aluno deveria saber o significado de grandezas diretamente proporcionais para, posteriormente, pensar em uma função do tipo $y=ax$ e, finalmente, localizar a representação gráfica correspondente. Assim, para auxiliar os estudantes a reconhecerem

aspectos da dependência entre variáveis, é necessário planejar cuidadosamente as atividades de ensino. Moretti (2003) aponta a noção de translação como uma possibilidade de trabalho com curvas, de modo a estabelecer a correspondência entre as representações algébrica e gráfica de uma função.

Tendo analisado os erros cometidos pelos calouros, na pesquisa descrita no item 2, uma das equipes do projeto estabeleceu um plano para a implementação de estratégias para o estudo do conceito de proporcionalidade, trabalhando com alunos de um curso de Licenciatura em Matemática e com professores em formação continuada, em um curso de Mestrado em Ensino de Física e Matemática, ambos no Centro Universitário Franciscano (UNIFRA), em Santa Maria, RS.

3 A EXPERIÊNCIA NA UNIFRA

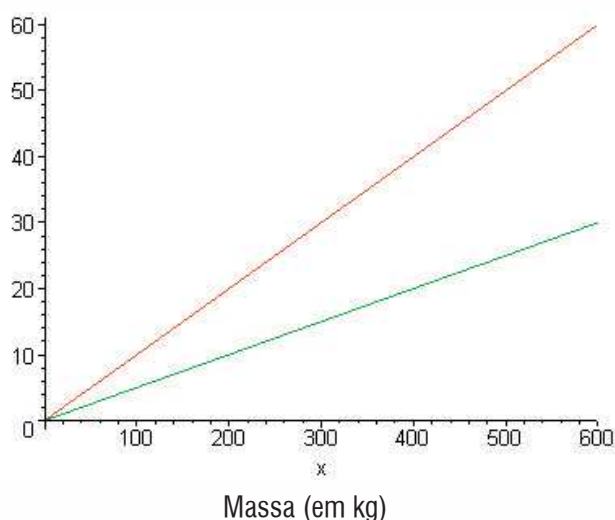
A experiência aqui relatada foi realizada com os estudantes da UNIFRA durante o primeiro semestre de 2006. Foi aplicado um teste com questões envolvendo a proporcionalidade, as quais foram respondidas por 18 alunos do 2º semestre do Curso de Licenciatura em Matemática e por oito alunos do Curso de Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática, na disciplina de Fundamentos de Matemática.

O objetivo desse estudo consistiu em realizar uma comparação entre os conceitos que os alunos dominavam como estudantes de Matemática, em relação ao que era conhecido por professores já formados em Matemática, bem como fazer uma análise de cada grupo, levando em conta que cada um deles constitui uma popu-

lação com suas especificidades. Também se teve como objetivo a compreensão dos erros, a partir das respostas dos alunos e a constatação de quais eram suas dificuldades de aprendizagem e como poderiam ser auxiliados a superá-las.

A questão analisada tem o seguinte enunciado:

Na figura a seguir, são apresentados os gráficos que fornecem os alongamentos, em centímetros, de duas molas em função das massas (em kg) penduradas em suas extremidades. A massa (em kg) é representada no eixo x e o alongamento da mola (em cm) é representado no eixo y .



Pergunta-se:

- a) Qual é a mola que se alonga mais facilmente?
- b) Analisando o gráfico acima, determine o alongamento da mola 1 para uma massa de 100 kg, 200 kg, 300 kg e 400 kg. Que conclusões você pode obter a partir dos cálculos realizados?
- c) Qual é o modelo matemático que descreve o alongamento da mola 1 em função da massa aplicada em sua extremidade?
- d) Analisando o gráfico acima, determine o alongamento da mola 2 para uma massa

de 100 kg, 200 kg, 300 kg e 400 kg. Que conclusões você pode obter a partir dos cálculos realizados?

- e) Qual é o modelo matemático que descreve o alongamento da mola 2 em função da massa aplicada em sua extremidade?
- f) Pode-se concluir que os alongamentos das molas 1 e 2 são proporcionais às massas nelas aplicadas?
- g) Qual é a constante de proporcionalidade?
- h) O que representa essa constante?

Foram analisadas as respostas de doze alunos da graduação e oito do mestrado. Alguns estudantes da graduação a deixaram em branco e os motivos podem ser diversos. Entende-se que, no segundo semestre letivo de um curso de Matemática, o aluno ainda apresenta dificuldades na resolução de problemas. Essa realidade não é constatada nos alunos do curso de Mestrado, porque já atuam em sala de aula e, por isso, possuem um perfil bastante diferenciado quanto a esse aspecto.

A tabela abaixo apresenta o número de erros dos alunos referentes à questão 4.

Tabela 1- Percentual de erros dos alunos do Curso de Licenciatura em Matemática com relação à questão 4

Erros relacionados a:	Número e percentual dos alunos que erraram:					
	Totalmente		Parcialmente		Não apresentam erros	
	nº.	%	nº.	%	nº.	%
Análise e Interpretação do gráfico	1	8	-	-	11	92
Identificação das coordenadas (m, a)	6	50	2	17	4	33
Formulação do conceito de proporcionalidade	8	67	3	25	1	8
Formulação do modelo matemático	10	83	-	-	2	17
Total	25	52	5	10	18	38

Essa categorização dos erros leva em conta:

- análise e interpretação do gráfico: verificar se o aluno discrimina a mola que se alonga mais facilmente;

- identificação das coordenadas: verificar se o aluno identifica as coordenadas no plano cartesiano dadas pelas massas (em kg) e os respectivos alongamentos (em cm) das molas 1 e 2;

- formulação do conceito de proporcionalidade: verificar se o aluno consegue explicitar corretamente o conceito de proporcionalidade;

- formulação do modelo matemático: verificar se o aluno consegue formular um modelo que represente o alongamento das molas 1 e 2 em função das massas nelas aplicadas, utilizando para isso uma representação algébrica.

Na análise qualitativa das respostas, com relação à mola que se alonga mais facilmente (no item “a” da questão proposta), um aluno colocou que “são iguais, pois as duas partem do zero”. Essa afirmativa induz que, no seu entendimento, retas que partem do mesmo ponto têm necessariamente o mesmo comportamento. Pode-se considerar que há, por trás desse raciocínio, a seguinte idéia: fazendo uma relação com movimentos, basta dois carros partirem ao mesmo tempo, do mesmo ponto, para que a distância percorrida seja igual em um mesmo período de tempo. Nessa representação do pensamento, observou-se que faltou integração dos vários conhecimentos matemáticos e da realidade, não estabelecendo relações com outros campos da Matemática e áreas afins, como, por exemplo, a Física.

Com relação à proporcionalidade entre alongamento e massa, 33% dos alunos colocaram que a mola 1 não é proporcional à massa colocada, embora 75% tenham respondido que a

mola 2 é proporcional à massa aplicada. Nenhum aluno respondeu que a mola 2 não era proporcional à massa aplicada; portanto, houve 25% de respostas em branco em relação a essa pergunta. Os erros cometidos se devem a uma interpretação equivocada dos pontos marcados no gráfico correspondente aos dados da mola 1, pois alguns alunos calcularam o coeficiente angular da reta, verificando que este coeficiente angular “variava” conforme os pontos escolhidos.

Apresenta-se abaixo a escrita de um aluno que retrata este entendimento:

$$F = 0,04 A$$

$$F = 0,046 A$$

$$F = 0,05 A \Rightarrow \text{não é proporcional}$$

Não foi analisado que o traçado do gráfico era uma reta e, desse modo, não foram estabelecidas as relações necessárias para uma boa compreensão e utilização dos conhecimentos matemáticos relativos ao conceito de proporcionalidade.

Um outro aluno colocou que “a mola 2 é proporcional à massa colocada, pois à medida que coloca a massa, aumenta o alongamento”. Para ele, proporcionalidade significa função crescente. Há um reconhecimento de causa/efeito, sem considerar uma conceituação da relação proporcional.

Também se verificaram erros de escrita, como por exemplo: $100 \text{ kg} = 10$. Ao estabelecer essa igualdade, o aluno desconsiderou o fato de que as unidades de medida eram diferentes, não empregando uma linguagem matemática adequada a essa situação. Ele poderia ter identificado os pares ordenados ou construído uma tabela para as diferentes massas e seus respectivos alongamentos.

Com relação à obtenção do modelo matemático que descreve as situações apresentadas, encontraram-se muitas variações em sua formulação, desde ações mecânicas, sem reflexão, até a construção do modelo obtido através dos métodos matemáticos estudados, apresentados de forma a mostrar uma linguagem adequada na sua resolução.

Os alunos do Curso de Mestrado também responderam às questões formuladas e seus erros estão apresentados na tabela 2:

Tabela 2: Percentual de erros dos alunos do Curso de Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática com relação à questão 4.

Erros relacionados a:	<i>Número percentual dos alunos que erraram:</i>					
	Totalmente		Parcialmente		Não apresentam erros	
	nº	%	nº	%	nº	%
Análise e Interpretação do gráfico	-	-	-	-	10	100
Identificação das coordenadas (m, a)	1	10	1	10	8	80
Formulação do conceito de proporcionalidade	1	10	7	70	2	20
Formulação do modelo matemático	1	10	-	-	9	90
Total	3	7,5	8	20	29	72,5

Observou-se, nesse caso, que os alunos demonstraram mais maturidade na escrita e na justificativa das soluções dos problemas. Além de encontrar o modelo matemático representativo da situação, os alunos foram capazes de estabelecer relações com a função linear e dar uma interpretação física ao coeficiente angular da equação obtida.

Sobre erros, Pinto (1998), em sua tese de doutorado, afirma que

[...] o grande desafio que colocam ao professor é ele aprender a identificá-los, perceber suas incidências e planejar situações didáticas pertinentes para provocar sua superação, evitando que se transformem em erros sistemáticos (p. 125).

A aprendizagem de conteúdos deve promover uma reflexão epistemológica do aluno. Segundo Sauer (2004), esse processo é lento. A condição para que seja aplicado o conhecimento construído, de forma crítica, com autonomia, envolve processos de decisão e tomada de consciência, e não pode ser realizado somente em um semestre por apenas um professor, mas durante toda a sua formação, trabalhando de forma integrada, com estudos em grupo promovidos pelo conjunto de docentes que atuam em cada semestre letivo.

CONCLUSÕES

A análise de erros, em qualquer circunstância, é relevante para o processo de ensino e aprendizagem, especialmente se, para cada questão proposta, for realizada uma análise crítica dos erros cometidos, para fazer com que os alunos pensem sobre seus próprios pensamentos ao resolver a questão. No caso desta pesquisa com alunos de graduação e mestrado, o fato de termos discutido com eles as dificuldades, especialmente voltando à relação entre o conceito de proporcionalidade e a função linear, permitiu, aos estudantes de graduação, revisarem esses tópicos sob um outro olhar. Aos professores mestrados, o conhecimento das dificuldades dos alunos de graduação mostrou que devem ser feitas tentativas no sentido de apresentar os conceitos de forma mais integrada e contextualizada.

De maneira geral, na pesquisa “Análise de erros em disciplinas matemáticas de cursos superiores”, que gerou o estudo aqui relatado, a possibilidade de testar estratégias de ensino para os diversos erros detectados foi importante para todos os docentes da equipe do projeto, pois lhes possibilitou uma fonte de conhecimento sobre suas aprendizagens. Para cursos de formação de professores, esse aspecto é fundamental e pode ser aproveitado pelos docentes.

A compreensão dos erros dos alunos sobre proporcionalidade e as justificativas aqui apresentadas servirão de subsídios para pensar e propor alternativas para o ensino desse conteúdo na disciplina introdutória, Fundamentos de Matemática, do Curso de Licenciatura em Matemática e das disciplinas introdutórias dos demais cursos de graduação nos quais esses conteúdos são trabalhados.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AGUILLAR, V. H. Un estudio exploratório sobre la asignación de sentido a las representaciones básicas de la variación, al término de la primaria y el inicio de la secundaria. **Educación matemática**, v. 6, n. 3, p. 65-81, dez.1994.
- BORASI, R. **Reconceiving mathematics Instruction: a Focus on Errors**. Norwood, NJ: Ablex Publishing Corporation, 1996.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Orientações curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília, 2006. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf. Acesso em: 08 jun. 2007.
- BRASIL. Instituto Nacional de Pesquisa Educacionais. **Temas e descritores da matriz de referência de matemática: Saeb/Prova Brasil**. 2005. Disponível em: http://www.inep.gov.br/basica/saeb/matriz/matricos_descritores_mat.htm. Acesso em: 08 jun. 2007.
- BRASIL. Instituto Nacional de Pesquisa Educacionais. **Exame Nacional do Ensino Médio: Fundamentação teórico-metodológica**. 1998. Disponível em: <http://www.publicacoes.inep.gov.br/>. Acesso em: 08 jun. 2007.
- DUVAL, R. A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. **Educational Studies of Mathematics**, n. 61, p. 103-131, 2006.
- FERREIRA, M.C.C.; GOMES, M.L.M. O raciocínio proporcional no contexto da avaliação das habilidades matemáticas pelo 2º INAF. In: FONSECA, M. C. F. R. (org.). **Letramento no Brasil: habilidades matemáticas**. São Paulo: Global, 2004. p. 127-152.
- MORETTI, M. T. A translação como recurso no esboço de curvas por meio da interpretação global de propriedades figurais. In: MACHADO, S. D. A. (org.). **Aprendizagem em matemática**. Campinas: Papirus, 2003. p. 149-160.
- PINTO, N. B. **O erro como estratégia didática no ensino de matemática elementar**. 1998. 319 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, USP, São Paulo, 1998.
- RADATZ, H. Students’ errors in the mathematical learning process: a survey. **For the Learning of Mathematics**, v.1, n.1, p.16-20, July 1980.
- SCHWARTZ, D. L.; MOORE, J. L. On the role of mathematics in explaining the material world: mental models for proportional reasoning. **Cognitive Science**, v. 22, n. 4, p. 471-516, 1998.
- SAUER, L. Z. **O diálogo matemático e o processo de tomada de consciência da aprendizagem em ambientes telemáticos**. 2004. 196 f. Tese (Doutorado em Informática na Educação) - Faculdade de Educação, UFRGS, Porto Alegre, 2004.
- SHULMAN, L. S. Those who understand: knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, v. 15, n. 2, p. 4-14, 1987.