VIDYA, v. 28, n. 2, p. 59-71, jul/dez, 2008 - Santa Maria, 2009. **ISSN** 0104-270 X

ORGANIZANDO O ESPAÇO GEOMÉTRICO POR CAMINHOS TOPOLÓGICOS

ORGANIZING THE GEOMETRIC SPACE FOR WAYS TOPOLOGICAL

JOSÉ CARLOS PINTO LEIVAS*

RESUMO

Este artigo parte da escrita de um texto elaborado para um curso de Organização dos Tempos e Espaços na Infância, destinado ao ensino a distância do Curso de Pedagogia. Apresenta convicções sobre a importância dos propriedades topológicas, tais como vizinhança, separação, ordem, fronteira, envolvimento e continuidade no desenvolvimento cognitivo dos estudantes, especialmente na construção do espaço geométrico. Para tal, está fundamentado nos estudos de Piaget e Inhelder em relação às estruturas perceptivas e no desenvolvimento do plano perceptivo ou sensório motor, bem como no plano representativo ou intelectual. Busca introduzir invariantes topológicos por meio de atividades lúdicas e recreativas, as quais venham a estimular futuros professores da Educação Infantil, assim como dos anos iniciais do Ensino Fundamental, de modo a incentivar o gosto pela aprendizagem geométrica.

Palavras-chave: Educação Infantil; Propriedades topológicas; Organização do espaço.

ABSTRACT

This article begins with the writing of a text prepared for a course on Organization of the Times and Spaces of Childhood, for use in distance learning for a Pedagogy Course. It shows my beliefs how topological properties, such as neighborhood, separation, order, border, involvement and continuity are important in cognitive development of students, especially in the construction of geometric space. For this I rely on perceptual structures and development of the plan perceptual or sensory-motor and intellectual or representative plan, according to the studies of Piaget and Inhelder. I introduce topological invariants by means of play and recreational activities, which will encourage future teachers of early childhood education and early years of elementary school in order to stimulate and encourage a love of learning geometry.

Keywords: *Childhood education; Topological properties; Organization of the space.*

* Doutor em Educação (Matemática). Professor Titular Aposentado da Universidade de Rio Grande – FURG. Professor Adjunto do Curso de Matemática da Universidade Luterana do Brasil - ULBRA.

INTRODUZINDO PROPRIEDADES TOPOLÓGICAS ELEMENTARES

Os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN - constituem um dos documentos norteadores do ensino básico brasileiro, no qual os professores e a escola podem buscar apoio para a construção de seus projetos políticos pedagógicos, com as seguintes orientações:

> • desenvolver o conhecimento ajustado de si mesmo e o sentimento de confiança em suas capacidades afetiva, física, cognitiva, ética, estética, de inter-relação pessoal e de inserção social, para agir com perseverança na busca de conhecimento e no exercício da cidadania;
> • utilizar as diferentes linguagens - verbal, matemática, gráfica, plástica e corporal - como meio para produzir, expressar e comunicar suas ideias, interpretar e usufruir das produções culturais, em contextos públicos e privados, atendendo a diferentes intenções e situações de comunicação;
> • saber utilizar diferentes fontes de informação e recursos tecnológicos para adquirir e construir conhecimentos;
> • questionar a realidade formulando-se problemas e tratando de resolvê-los, utilizando para isso o pensamento lógico, a criatividade, a intuição, a capacidade de análise crítica, selecionando procedimentos e verificando sua adequação (BRASIL, 1997, p. 6).

Dessa forma, entendemos que a construção do conhecimento matemático deve ancorar-se em experiências vivenciadas pelo aluno, atentando para a evolução histórica desse conhecimento, uma vez que não há caminho **único** para essa realização.

> Recursos didáticos como jogos, livros, vídeos, calculadoras, computadores e outros materiais têm um papel importante no processo de ensino e aprendizagem. Contudo, eles precisam estar integrados a situações que levem ao exercício da análise e da reflexão, em última instância, a base da atividade matemática (Ibid., p. 15).

Espaço e forma constituem um dos blocos apresentados nos PCN que tem despertado interesse em nossa prática profissional e em nossas pesquisas, pois ainda há muitas dificuldades por parte de alguns professores na distinção do que significam os dois temas, especialmente entre os que atuam na Educação Infantil e nos primeiros ciclos do Ensino Fundamental. Assim, é importante apresentar algumas reflexões e sugestões que possam enriquecer a prática profissional daqueles que ensinam ou que atuarão no ensino de Geometria.

Os Referencias Curriculares Nacionais para a Educação Infantil – RCNEI – formam um segundo documento orientador da prática pedagógica para o desenvolvimento de nossas crianças. Nesse documento, encontramos:

> Para que as crianças possam exercer sua capacidade de criar é imprescindível que haja riqueza e diversidade nas experiências que lhes são oferecidas nas instituições, sejam elas mais voltadas às brincadeiras ou às aprendizagens que ocorrem por meio de uma intervenção direta (BRASIL, 1998, v. 1, p. 27).

Entendemos que, ao brincar, de forma orientada, as crianças podem iniciar a construção de seu conhecimento e desenvolvimento geométrico e, por que não, matemático, de uma forma saudável, agradável. Desse modo, podem ser evitados os obstáculos com os quais os professores de Matemática se defrontam em níveis mais elevados do ensino básico, quando um grande número dessas crianças já apresentam uma predisposição à rejeição dessa área do conhecimento.

No que diz respeito às orientações para a organização curricular do conhecimento de mundo na educação infantil, os RCNEI abordam a necessidade de construção de diferentes formas de linguagem, a exemplo do que preconizam os PCN, de modo que as crianças possam estabelecer relações com a diversidade de objetos que as rodeiam, de acordo com a própria cultura. Assim, os diversos conceitos, de forma progressiva, podem ser desenvolvidos nas brincadeiras que o professor orienta, as quais podem contribuir para o desenvolvimento infantil, dentre os quais, os movimentos, a natureza e a própria Matemática em sua linguagem oral e escrita.

Nesse documento,

> atividades permanentes são aquelas que respondem às necessidades básicas de cuidados, aprendizagem e de prazer para as crianças, cujos conteúdos necessitam de uma constância (Ibid., p. 56).

Dentre essas atividades, são indicados para serem realizados com frequência regular, diária ou semanal, ateliês ou oficinas de desenho, pintura, modelagem e música; com o que a Matemática, em especial a construção do espaço, se coaduna.

Levando em conta essas considerações a respeito dos dois documentos, e pela experiência realizada no Ensino a Distância para um Curso de Pedagogia, buscamos apoio em Piaget e Inhelder (1993) no tratamento da Organização do Espaço na Infância a partir de características topológicas, uma vez que os estudos e experiências desses autores mostraram que a criança desenvolve, inicialmente, as relações topológicas e não as euclidianas, pois as primeiras não utilizam os conceitos métricos que ocorrem posteriormente aos topológicos.

Para Piaget e Inhelder (1993), o desenvolvimento da noção de espaço tem sido estudado durante séculos tanto por filósofos quanto por psicólogos, os quais têm discutido sobre a forma como ocorre a natureza dessa construção. Chegaram à indicação de que essa pode ocorrer naturalmente, experimentalmente, devido à própria intuição perceptiva que a criança adquire em seu desenvolvimento [natureza empírica]. Pode ocorrer, também, antecipadamente, ou seja, ser previsível pelo fato de que o ser humano é racional e sensível [natureza *a priori*]. Por último, por ter característica de elaborar operações concretas ou mentais no seu desenvolvimento, tem a natureza operatória.

Dizem os autores que, muito antes de elaborar os processos de contagem, a criança explora a natureza e o espaço que a circunda e, por essa razão, as noções topológicas antecedem as noções euclidianas e as projetivas. Verifica-se, assim, no desenvolvimento infantil, que a percepção topológica é mais natural do que as outras duas.

No entanto, o que vem a ser cada uma dessas noções? A Geometria que o ser humano aprende na escola é de natureza euclidiana, isto é, o que temos estudado há séculos é uma Matemática oriunda dos gregos, que considera, primordialmente, questões de medidas. Lembrando que, na antiguidade, Tales projetou a medida da altura de pirâmides (o que intriga muitas pessoas até os dias de hoje), temos que considerar os pontos de visão do observador. Assim, ao pensarmos sobre esses aspectos matemáticos, estamos pensando numa matemática projetiva, isto é, como percebemos, visualmente, o espaço circundante.

Por outro lado, desde os primeiros anos de vida, segundo estudos de Piaget e Inhelder (1993), a criança vai reconhecendo seu espaço circundante em contínua transformação, de forma natural. Assim, ela passa a reconhecer a mãe, os familiares mais próximos e sua casa, por exemplo. A esse tipo de construção de noções do espaço, que se transforma continuamente, sem rupturas, denominamos topológica, de forma bem superficial.

Faz sentido, atualmente, iniciar a construção do espaço infantil pelas intuições topológicas, sendo esse o objetivo principal deste artigo, acreditando que muito ganhamos na construção do espaço geométrico da criança.

Dizemos, então, que Topologia é um ramo bastante novo da Matemática. Neste texto, não apresentaremos experimentos que incidem diretamente em um resultado, como é comum na Matemática, mas demonstraremos certas habilidades ou propriedades da Topologia, as quais não se assemelham, por exemplo, àquelas da aritmética, que é a arte de lidar com quantidades numéricas e suas relações, ou da álgebra, uma generalização dessa aritmética, ou até mesmo com a Geometria, ao tratar de propriedades das figuras planas e espaciais. A Topologia tem interesse pelas propriedades que não se alteram quando um objeto é modificado, alterado ou transformado continuamente. Tais propriedades são: vizinhança; separação; ordem; envolvimento e continuidade, detalhadas posteriormente.

Segundo Piaget e Inhelder (1993, p. 11):

> [...] Os tratados elementares da geometria são mais ou menos unânimes em nos apresentar as noções espaciais iniciais como repousando em intuições euclidianas: retas, ângulos, quadrados e círculos, medidas, etc. Esta opinião parece, aliás, confirmada pelo estudo da percepção e das 'boas formas' visuais ou táteis. Por outro lado, a análise abstrata dos geômetras tende a demonstrar que as noções espaciais fundamentais não são euclidianas: são 'topológicas', isto é, repousam simplesmente nas correspondências qualitativas bi-contínuas que recorrem aos conceitos de vizinhança e de separação, de envolvimento e de ordem, etc., mas ignoram qualquer conservação das distancias, assim como toda projetividade.

Para os autores, as relações topológicas elementares são de fundamental importância ao desenvolvimento da noção de espaço na criança, devendo ser previamente desenvolvidas e até mesmo preceder ao estudo da psicologia infantil.

De acordo com o filósofo Kant, o espaço apresenta uma estrutura de sensibilidade e para haver aprendizagem ou entendimento, basta submeter os dados perceptivos a uma sequência de infinitos raciocínios, sem esgotamento dos conteúdos.

Para o matemático Poincaré, citado por Piaget e Inhelder (1993, p. 13), a quem se deve um dos modelos de geometria hiperbólica,

> [...] a formação do espaço é ligada a uma intuição sensível, e relaciona suas vias profundas sobre a significação do grupo dos deslocamentos ao jogo das sensações propriamente ditas, como se o espaço sensório-motor fornecesse o essencial da representação geométrica e como se o intelecto trabalhasse sobre o sensível já previamente elaborado.

Uma questão importante consiste no que sempre é feito em Geometria. Primeiro, o plano representativo é desenvolvido. Posteriormente, ou quase nunca, o perceptivo. Talvez essa seja uma das questões para que ela seja tão pouco desenvolvida em nossas escolas e haja tão pouco interesse em estudá-la.

Segundo Piaget e Inhelder (1993), uma dificuldade da análise psicogenética do espaço é a construção progressiva das relações espaciais, que se enquadram em dois planos distintos, os quais veremos a seguir.

Plano perceptivo ou sensório-motor

Para Piaget e Inhelder (1993), as estruturas perceptivas ou sensório-motoras constituem o ponto de partida da construção do espaço infantil e apenas posteriormente é que ocorre a estrutura representativa do espaço. Segundo os autores, a interpretação mais comum das percepções é que todo "campo" perceptivo se organiza segundo as mesmas estruturas dos níveis superiores do desenvolvimento.

Plano representativo ou intelectual

Conforme os autores referidos, o aparecimento da linguagem e da representação figurada ocorre após os progressos da percepção e da motricidade e somente após acontece o desenvolvimento do espaço representativo.

Por exemplo, geometricamente, a criança consegue, inicialmente, de forma intuitiva, obter experiências sensório-motoras do que são retas, planos, ângulos, círculos, quadrados, entre outros, para, num segundo momento, avançar ao espaço representativo. Ela busca reunir, de forma global, todas as figuras em sistemas de coordenadas, obtendo eixos horizontais e verticais a partir da experiência física, interpretados geometricamente.

O modo de reconhecer sólidos, outro exemplo, tocando-os mesmo sem visualizá-los, é o que a psicologia experimental denomina de **reconhecimento tátil** e ao que Piaget e Inhelder (1993) denominaram de **percepção estereognóstica.** Para eles, isso leva crianças de 2 a 7 anos a passarem da percepção das formas à sua representação.

De acordo com os autores, o conhecimento dos objetos, resultante de um contato direto com eles, é denominado de **percepção**. A forma de evocar objetos sem eles estarem presentes é o que denominam de **representação**. Dessa forma, percepção pressupõe a presença do objeto e representação desperta a abstração para além da percepção. Portanto, a passagem da percepção para a representação espacial é galgada em imagem e pensamento.

Sugestão de atividade para ilustrar o plano representativo ou intelectual

A fim de mostrar o quanto o espaço perceptivo é importante para que a criança obtenha experiências sensório-motoras sobre retas, planos, ângulos, vértices, quadrados, triângulos, dentre outros, na geometria euclidiana e, num segundo momento, partir para a representação, pode ser usada a caixa de blocos lógicos.

Nessa atividade, o professor distribui uma caixa de blocos lógicos de madeira [peças de madeira tridimensionais coloridas], com formatos geométricos espaciais, como uma pirâmide de base triangular, uma de base quadrangular e outra qualquer. Cada grupo de dois participantes da turma recebe uma caixa, sendo solicitado que um aluno escolha duas peças para descrever suas características para o colega da dupla. A seguir, o colega da dupla explana ao grande grupo a peça do colega com as características que encontrar. O professor verifica se algum outro grupo escolheu a mesma peça em sua caixa e proporciona um debate sobre ambas as características encontradas pelas duplas. Esperamos que, ao final da atividade, as crianças tenham clareza sobre as características das peças da caixa de blocos lógicos, tais como: cores, espessura, tamanho, quantidade de cantinhos (vértices) ou ladinhos (faces) ou quinas (arestas). Não há necessidade de surgirem os nomes corretos. É importante a descoberta de diferenças obtidas pelo tato das peças. Por exemplo, percorrer uma quina (aresta) com o dedo é diferente de percorrer um ladinho (face) e encontrar um cantinho (vértice), apenas recorrendo ao encontro de percurso de, pelo menos, dois dedos simultaneamente.

RELAÇÃO DE VIZINHANÇA

A relação espacial mais elementar que a percepção pode apreender parece ser a **relação de vizinhança**, isto é, a descoberta dos elementos que podem ser percebidos num mesmo campo de observação, estudo ou trabalho, segundo Piaget e Inhelder. Essa função evolui com a idade, isto é, quanto menor for a criança, mais a proximidade leva vantagem sobre outros fatores da organização: semelhança e simetria, por exemplo.

Sugestão de atividade orientada para ilustrar a relação de vizinhança

Para visualizar essa relação, solicita-se que as crianças desenhem a figura de uma pessoa e observa-se se foram representados os braços, as pernas, o tronco e a cabeça. Se a criança representar as pernas e os braços ligados diretamente à cabeça e o tronco em outro lugar diferente é porque ainda não adquiriu a relação de vizinhança.

Solicita-se, em um segundo momento, que as crianças coloquem dedos na figura que fizeram, se não os representaram ainda. Pode-se perceber se os dedos estão ligados ao braço e não a uma mão, o que mostra a complexidade de conservação ou aquisição da relação de vizinhança.

A investigação sobre a aquisição ou não da relação de vizinhança pode também ser observada quando for solicitado que as crianças façam um desenho de um cão. Analisa-se, por exemplo, se o rabo do cão foi colocado antes ou depois do tronco, se está ligado diretamente à cabeça. Se assim o for, significa que o aprendiz ainda não adquiriu ou desenvolveu essa relação. Embora a vizinhança seja a relação mais elementar, ela é adquirida no desenvolvimento da criança e atividades de desenho podem estimá-lo. Durante a tarefa, pode-se fazer questionamentos reflexivos com ela, evitando barrar o aprendizado com críticas destrutivas, tais como, “não é assim, você colocou o rabo do cão ligado à cabeça.”

RELAÇÃO DE SEPARAÇÃO

A segunda relação espacial elementar é a de separação. Numa percepção global, um bebê vê um objeto numa certa vizinhança sem, contudo, identificar separação clara desse objeto do restante. Com o avançar da idade, as relações de separação aumentam e as de vizinhança diminuem de importância.

Sugestão de atividade para ilustrar a relação de separação

Na relação de separação, a criança pode perceber um objeto numa certa vizinhança do seu campo de observação. Para sentir mais de perto o que isso representa, apresenta-se uma figura em retroprojetor, como a figura 1, abaixo, solicitamdo que a criança a desenhe em partes separadas.

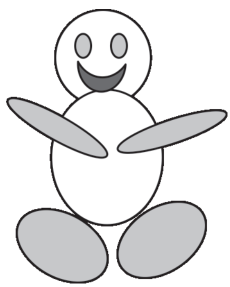


Figura 1 - Objeto a ser separado em partes.

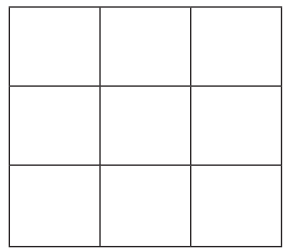
Observa-se como as crianças fazem as separações dos elementos, percebendo-os globalmente, no sentido mais amplo, ou nos detalhes menores, como, por exemplo, separar em cabeça, tronco e membros ou separar olhos e boca, supostamente, e deixar o restante junto.

RELAÇÃO DE ORDEM

A relação de ordem ou de sucessão espacial constitui a terceira relação espacial.

Sugestão de atividade para ilustrar a relação de ordem

O conhecido **jogo da velha** fornece um bom exemplo de relação de ordem. Usam-se os dois símbolos, ○ e X, para o jogo envolvendo duas crianças.



É importante lembrar que ganha a partida, a criança que conseguir três dos seus símbolos numa mesma linha ou coluna ou diagonal.

RELAÇÃO DE ENVOLVIMENTO OU CIRCUNSCRIÇÃO

A quarta relação espacial dada na percepção elementar é a de circunscrição. Para tentar compreendê-la, apresentamos a seguinte atividade perceptiva visual.

Sugestão de atividade para ilustrar a relação de envolvimento ou circunscrição

Quando uma figura se constitui de elementos simétricos, é mais fácil percebê-los agrupados em conjuntos do que os não simétricos. Por exemplo, na representação abaixo, as duas primeiras figuras, uma região retangular e uma hipérbole são figuras simétricas [a primeira apresenta um eixo de simetria horizontal e outro vertical e a segunda, quatro eixos de simetria] e podem ser percebidas como um grupo de forma mais simples do que o grupo composto pelas duas seguintes, que apresenta duas figuras não simétricas.

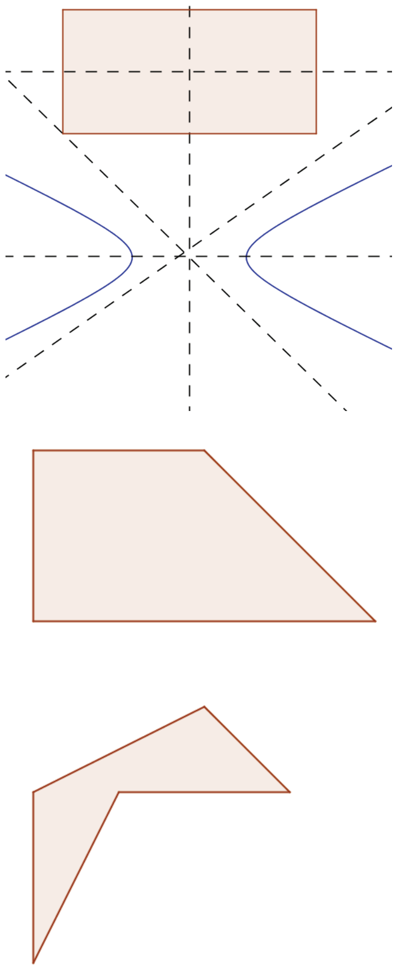


Figura 2 – representações simétricas e não simétricas.

Utiliza-se papel transparente para copiar as quatro figuras e dobraduras para perceber as simetrias, explorando-se as várias possibilidades de obter simetrias nessas figuras.

RELAÇÃO DE CONTINUIDADE

A quinta e última relação espacial é a de continuidade. No caso das linhas e das superfícies dadas, ela pode ser experimentada por meio da atividade orientada abaixo.

Sugestão de atividade para ilustrar a relação de continuidade

Recorta-se duas tiras de papel de dupla face de aproximadamente 2 cm de largura e 10 cm de comprimento, sendo uma de cada cor. Com uma das tiras, constrói-se uma superfície, como a da figura abaixo, da seguinte forma: cola-se as duas extremidades da tira, dando uma pequena torção na folha. A superfície obtida é denominada **Faixa de Möebius** e se caracteriza por transformar continuamente uma superfície plana, de dois lados, em uma superfície espacial com um único lado. Como curiosidade, essa superfície não é orientável no sentindo matemático, mas, no sentido psicológico, serviu de modelo para certo estado psíquico, definido por Lacan como aquele em que o indivíduo não distingue mais o seu interior do exterior.

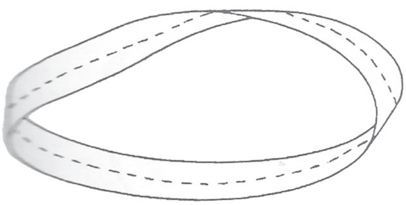


Figura 3 – Faixa de Möebius.

Com a segunda tira, constrói-se uma argola ou pulseira. Para a construção da figura 3, utiliza-se papel dupla face. Recorta-se uma tira do seguinte formato:

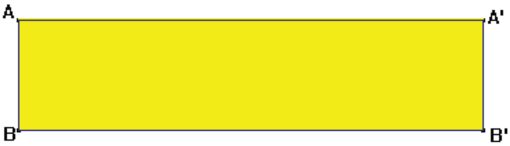


Figura 4 – Faixa retangular de dupla face.

Cola-se o lado AB da tira ao lado A´B´, de modo que o ponto A coincida com o B´ e o ponto B coincida com A´. Deve-se proporcionar à criança percorrer o novo objeto construído com o dedo apoiado sobre o papel, sem retirá-lo em sua extensão. Ela poderá perceber que o dedo retorna ao ponto de saída sem ultrapassar nenhuma fronteira da figura acima, passando de uma face a outra. Esse é o significado de ser um objeto real, concreto, espacial, com um único lado, que proporciona refletir: você conhece algum outro objeto espacial com uma única face?

Para a construção da argola, cola-se o lado AB da tira ao lado A´B´, fazendo coincidir A com A´e B com B´.

Utilizando as duas construções, trabalha-se as diferenças em termos de continuidade das duas, sendo que, na Faixa de Möebius, percorre-se toda com o dedo ou com a caneta, sem deixar de se apoiar no papel, enquanto que, na argola, isso não é possível.

OUTRAS RELAÇÕES TOPOLÓGICAS

Ao falar em Topologia, usualmente, o pensamento vai para uma Matemática formal, bem estruturada, de fácil compreensão para matemáticos ou para pessoas de elevada compreensão dessa área. Entretanto, acreditamos que qualquer ramo do conhecimento matemático desenvolvido na formação de professores deve ser passível de compreensão, no devido nível, ao estudante ao qual o professor irá se dirigir. Como acreditamos que o ramo da Topologia é fundamental para uma compreensão moderna da Geometria, além daquela que herdamos dos egípcios e dos gregos, discutimos aqui alguns desses aspectos, em particular, relações acessíveis à infância e que permitirão, em nossa opinião, uma formação de pensamento matemático menos problemático, como tem sido ao longo dos tempos.

Para Dienes (1975), experiências relativas ao espaço deverão ser feitas logo no início da escolarização e levarão a criança a compreender como a Geometria pode separar partes do espaço que está construindo. Nesse sentido, pontos podem ser interpretados como separadores de partes de uma linha, linhas podem ser separadoras de partes de uma superfície e superfícies podem ser separadoras de partes do espaço.

Surgem, pois, propriedades matemáticas formais associadas a esse tipo de exploração do espaço, oriundas de relações básicas, as quais podem ser obtidas intuitivamente, desde que orientadas corretamente.

Algumas relações como **fora**, **dentro**, **interior**, **exterior**, **aberto**, **fechado**, **perto**, **longe**, **separado**, **unido**, **contínuo** e **descontínuo** podem ser consideradas relações topológicas.

A atividade a seguir busca reforçar relações de interior, exterior e fronteira em uma linha plana fechada (curva fechada).

Considera-se agora uma figura no plano formada por linhas que podem ser abertas ou fechadas (ou ainda uma figura no espaço, como uma caixa fechada). Se essa linha for uma reta, que é ilimitada nos dois sentidos, ela separará o plano em duas regiões também ilimitadas (ou, se for uma face da caixa, limitada, separando o espaço em duas porções). Se a linha for uma curva fechada, ela também separará o plano em duas regiões, sendo uma limitada e outra ilimitada. No primeiro caso, não teremos o conceito de interior e de exterior, enquanto, no segundo caso, teremos esse conceito. Nas duas situações, entretanto, para passar de uma região para a outra, devemos cruzar a linha, isto é, passar por uma **fronteira**. De forma análoga, é o que ocorre com a caixa; para entrarmos ou sairmos dela, devemos passar por uma de suas faces, isto é, por uma **fronteira**.

O conceito de fronteira, construído intuitivamente, vai propiciar, futuramente, uma boa compreensão dos conceitos de lados e vértices de polígonos, bem como vértices, arestas e faces de sólidos geométricos.

Sugestão de atividade para ilustrar fronteiras, interior e exterior

Esta atividade é recomendada para ser realizada ao ar livre com crianças pequenas. É necessário ter uma corda maior em mãos e vários pedaços menores. Solicita-se que, utilizando a corda maior, os alunos construam no chão uma grande ilha. Com os pedaços de cordas menores, divide-se o interior da ilha em pequenas regiões, tantas quantas desejar. Cada aluno ocupa uma região. Propõe-se aos alunos mudarem de região. O que ocorre? Há necessidade de ultrapassar fronteiras? Discutem-se os conceitos de interior, exterior e fronteira.

Outra atividade refere-se ao problema dos mapas, tanto planos quanto esféricos, que utilizam apenas quatro cores, sem demonstração matemática até 1976, segundo Pappas (1989), quando essa ocorreu com a utilização de computadores, por K. Appel e W. Halen, sendo que ainda há debates sobre sua validade.

O problema consistia em pintar qualquer mapa desenhado num plano com apenas quatro cores, de modo que países adjacentes ficassem com cores diferentes. Realiza-se com crianças maiores uma atividade similar, fazendo uma representação de uma ilha numa folha em branco e de suas separações, como se o desenho fosse feito sobre um mapa. Solicita-se que as regiões sejam coloridas com o seguinte critério: duas regiões vizinhas deverão ter cores diferentes, a menos que tenham um único ponto em comum.

Procuramos ver qual é o menor número possível de cores necessário para pintar todo o desenho e questionamos qual é o menor número possível de cores necessário em cada desenho. Ainda mais, será possível utilizar apenas quatro cores em algum dos mapas? E menos? É possível desenhar uma ilha na qual seja necessário utilizar um número maior de cores do que na obtida antes? Existe uma ilha que pode ser pintada com apenas duas cores? O que ela tem de especial? Essas atividades desenvolverão nos estudantes o espírito investigativo, a motivação para a descoberta e, com isso, eles serão introduzidos no ramo da Topologia.

Ao desenhar e colorir mapas em uma tira de papel de aproximadamente 2 cm de largura e 20 cm de comprimento, podemos obter uma faixa de Möebius e verificar se ainda é possível pintar com apenas quatro cores.

Sugestão de atividade para ilustrar transformações topológicas

Em folha do tipo A4 de material flexível como EVA ou camurça, assinala-se com uma caneta colorida os quatro vértices da folha e os denomine de A, B, C e D. Pede-se a quatro crianças que segurem firme os quatro vértices, uma em cada um, estirando a folha, sem rompê-la e verificando o seu formato. Solicita-se a duas outras crianças que façam representações em uma folha A4 das diversas formas que surgem quando a folha fica estirada.

Essa atividade possibilitará, posteriormente, a compreensão da deformação, por exemplo, de um quadrado num retângulo ou vice-versa.

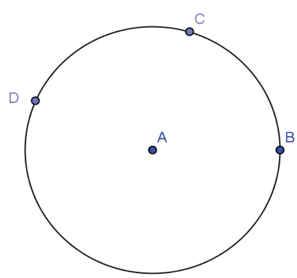
APRENDENDO UM POUCO MAIS SOBRE TOPOLOGIA

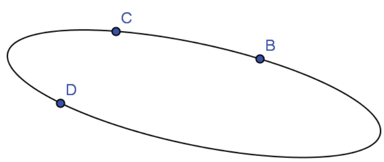
Segundo Pappas (1989), Königsberg (atualmente Leningrado) é uma cidade banhada pelo rio Preger, formada por duas ilhas que são ligadas por sete pontes. O rio corre ao redor das duas e as pontes ligam as margens às ilhas e essas entre si. O passeio de barco dominical despertou para o problema de passar uma única vez cada ponte, que foi resolvido por Euler, gerando a Teoria dos Grafos.

A Topologia tem também seu ramo "elástico" em contrapartida ao anterior. Ou seja, considera-se três pontos quaisquer não coincidentes de uma circunferência. Ao deformar a circunferência esticando-a, se for elástica, torcê-la ou dobrá-la, se for flexível, os três pontos manterão suas posições em relação aos outros. Essa propriedade caracteriza o que os matemáticos denominam de **invariante topológico**, uma vez que resistem a uma deformação topológica, ou seja, deformações contínuas, sem rompimentos. Esse é um dos motivos que caracterizam a Topologia como uma espécie de Geometria.

Alguns invariantes fundamentais no estudo de Topologia são as dimensões, o número de fronteiras e o de lados de objetos, os quais se mantêm inalterados embora o objeto seja deformado por torção, por dobras ou por alongamentos. Um exemplo característico é uma faixa obtida a partir de uma folha de papel de dupla face colorida. Sua dimensão é dois – uma largura e um comprimento – desconsiderando a espessura. Tem uma fronteira que é a borda da tira e dois lados – os quais podem ser identificados pelas cores distintas da folha – frente e verso. A figura 4, apresentada anteriormente é um exemplo de uma dessas faixas.

Outra possibilidade de perceber invariantes topológicos encontra-se na coleção das três figuras abaixo.





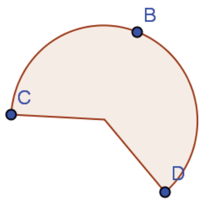


Figura 5 – Invariante “estar entre”.

Na primeira figura, uma circunferência de centro A apresenta três pontos (B, C e D), sendo que C se encontra entre B e D. Ao deformar a primeira figura, uma circunferência, na segunda figura, uma elipse, o ponto C continua entre B e D, da mesma forma que na terceira figura, um setor circular. Isso exemplifica essa relação como um invariante na transformação topológica, que poderia se associar à propriedade de vizinhança. Esse é um aspecto interessante ao pensarmos na Geometria Topológica. Nota-se que aqui não se fala em medidas, característica da Geometria Métrica Euclidiana.

No entanto, nem todas as propriedades são invariantes topológicos. Como exemplo, temos a própria Faixa de Möebius, dada pela figura 1, a qual é obtida de uma superfície de dois lados, como a figura 2 (frente e verso de uma faixa plana) em uma superfície de um único lado.

Em uma faixa como aquela da figura 4, marcamos uma linha no sentido do comprimento, colamos e transformamos na faixa de Möebius, como feito anteriormente na figura 3. Utilizando uma tesoura, corta-se a faixa ao longo da linha marcada e observa-se que a nova figura obtida passa a ser novamente uma superfície com dois lados.

A figura 6, a seguir, ilustra outro modelo denominado Garrafa de Klein, descoberto pelo matemático alemão Félix Klein em 1882, sendo uma forma matemática espacial constituída de um único lado como a Faixa de Möebius. Observe as flechas na figura, partindo de um determinado ponto e apontando em uma direção. A flecha percorre o modelo, alterando essa direção e voltando ao ponto de partida, apontando na direção oposta àquela original.

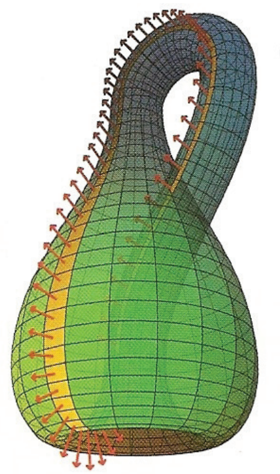


Figura 6 – Garrafa de Klein.

CONCLUINDO

A criança explora o espaço desde seu nascimento, sendo, entretanto, necessário que tenha desenvolvido certa maturidade, a fim de que seja possível perceber ideias de perspectiva, distância, profundidade e outras relações, como descritas anteriormente, nas atividades que integram o texto, as quais devem ser realizadas como forma complementar para a sua compreensão.

É importante que compreendamos que os conceitos matemáticos, desde os mais elementares, não são simplesmente ensinados ou transmitidos, como o senso comum indica, e sim que eles são construídos ao longo do desenvolvimento cognitivo dos indivíduos. Assim, quando dizemos que uma criança, um jovem, um adolescente ou um adulto não compreende a Matemática, ou sente ojeriza por ela, não há outra razão a não ser a de que os conceitos não foram **construídos**.

O que acreditamos ser viável para essa construção é oportunizar situações que auxiliem as crianças a formar os conceitos desde os mais elementares e isso pode ocorrer de muitas formas, inclusive lúdicas, como exemplificado neste texto, sugerindo atividades que, acreditamos, podem ser realizadas desde os anos iniciais.

Segundo o construtivismo piagetiano, por não envolver inicialmente noções de distância, ou seja, noções euclidianas, as quais são aquelas comumente utilizadas na escola desde os gregos, a construção do espaço ocorre por meio desse caminho, isto é, topológico.

Ao longo do desenvolvimento cognitivo das crianças e jovens, quando se encontrarem em níveis mais avançados, cremos que terão um raciocínio geométrico e, por que não, matemático, que lhes permitirá obter relações e resolver problemas mais avançados. Acreditamos, também, que, ao realizar atividades como as exemplificadas, os estudantes do nível médio, por exemplo, terão uma melhor compreensão da Relação de Euler para poliedros, estabelecendo adequadamente a relação entre o número de vértices, de arestas e de faces desses objetos geométricos, corroborando, dessa forma, os estudos de Piaget e Inhelder (1993), bem como os de Dienes (1975), em que a construção do espaço é natural no desenvolvimento genético e intelectual dos indivíduos.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: matemática. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997.

______. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Referencial curricular nacional para a educação infantil**. Ministério da Educação e do Desporto, Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

DIENES, Z. P.; GOLDING, E. W. **A geometria pelas transformações**. São Paulo: EPU; Brasília: INL, 1975.

PAPPAS, Theoni. **Fascínios da Matemática.** A descoberta da Matemática que nos rodeia. Lisboa: Replicação, 1998.

PIAGET, J.; INHELDER, B. **A representação do espaço na criança**. Trad. de Bernardina Machado de Albuquerque. Porto Alegre: Artes Médicas, 1993.