VIDYA, v. 28, n. 2, p. 37-45, jul/dez, 2008 - Santa Maria, 2009. **ISSN** 0104-270 X

A RESOLUÇÃO DE UM PROBLEMA: SOLUÇÕES ALTERNATIVAS E VARIAÇÕES NA FORMULAÇÃO

THE RESOLUTION BY ONE WHOLE QUESTION: ALTERNATIVE SOLUTIONS AND VARIANCES AT THE FORMULATIONS

ALCIBIADES GAZZONI*
AUGUSTO OST**

RESUMO

Neste trabalho, foi utilizado um método proposto por Polya (1978) para a resolução de problemas. Em seu livro **A arte de resolver problemas**, Polya (1978) expõe o seu método dividindo-o em quatro etapas: compreensão do problema, construção de uma estratégia, execução da estratégia e revisão da solução. Aplicou-se o processo proposto por Polya (1978) para a resolução de um problema com ênfase na obtenção de soluções alternativas. Posteriormente, ao fazer alterações na sua formulação, resolveu-se o problema com as condições introduzidas. O objetivo da aplicação foi exercitar a metodologia de resolução de problemas e relacionar diferentes conteúdos e estratégias na solução do problema selecionado neste trabalho. Com esta pesquisa, da área da Educação Matemática, conclui-se que aspectos aqui desenvolvidos podem servir como uma contribuição simples para a melhoria do processo de ensino e aprendizagem de alguns conteúdos do ensino básico, bem como ilustrar uma aplicação do conceito de limite.

Palavras-chave: Ensino; heurística; resolução de problemas.

ABSTRACT

*In this study, we used a method proposed by Polya (1978) for solving problems. In his book, **The art of solving problems**, Polya (1978) outlined his method by dividing it into four steps: understanding the problem, formulate a strategy, strategy implementation and review of the solution. We applied the procedure proposed by Polya (1978) for solving a problem with an emphasis on obtaining alternative solutions. Later, when making changes in its formulation, resolved the problem with the conditions introduced. The purpose of the application has been exercise the methodology of problem solving and relate different ideas and strategies in solving the problem in this work. With this research, the area of Mathematics Education, concluded that aspects developed here can serve as a single contribution to the improvement of teaching and learning of some content of basic education and to illustrate one application of the limit.*

Keywords: *Education; heuristics; problem-solving.*

* Mestre em Matemática; Professor do Centro Universitário Franciscano (UNIFRA).
** Acadêmico do Curso de Matemática do Centro Universitário Franciscano (UNIFRA).

INTRODUÇÃO

A atividade de resolver problemas teve seu início com os filósofos gregos que a praticavam como uma forma de exercitar o pensamento filosófico. Sócrates afirmava que para resolver um problema bastava fazer uma sequência lógica de perguntas. Descartes (1999) contribuiu com importantes ideias dizendo que é necessário método para raciocinar bem e procurar soluções nas ciências para descobrir as leis da natureza, ressaltando, com isso, a importância da sistematização. Para ele, só se deve aceitar o que se pode ver ou deduzir com clareza.

Conforme Pereira (2002), após Descartes surgiram outros pensadores como Graham Wallas (1858-1932) que, em sua obra **A arte de pensamento**, publicada em 1926, apresentou o seu método dividindo-o em 5 etapas: *preparação* (trabalho prévio sobre um problema que concentra a mente do indivíduo sobre o problema e explora as dimensões do problema), *incubação* (quando o problema é internalizado na mente subconsciente e nada parece estar a acontecer externamente), *intimação* (a pessoa criativa percebe um «sentimento» de que uma solução está a caminho), *iluminação* ou *insight* (na qual a ideia criativa emerge dos processos pré-conscientes e se manifesta na consciência) e *verificação* (quando a ideia é conscientemente verificada, elaborada e em seguida, aplicada). Em outras publicações, o processo de Graham Wallas é divido em quatro etapas, sendo que, a "intimação" é considerada como um subestágio. As ideias de Graham Wallas não tiveram muita aceitação na resolução de problemas por estarem ligadas a noções vagas de funcionamento da "mente".

Após, surgiram as ideias de Skinner (1904-1990), que são bastante contrárias às de Graham Wallas. A proposta de Skinner consistia em determinar as ações produtivas e reforçá-las. Na verdade, as suas ideias tiveram importância somente no treinamento de ratos e pombos. Em problemas de níveis de dificuldade elevados, mostraram-se insuficientes.

George Polya (1897-1985) publicou o seu livro **How to solve it** no ano de 1957, expondo as suas ideias sobre a heurística de resolução de problemas. Polya foi considerado um dos maiores matemáticos do século XX. Foi ele o primeiro a apresentar uma heurística de resolução de problemas específica para a matemática. Polya (1978) dividia o processo de resolução de um problema em quatro etapas: compreensão do problema; construção de uma estratégia de resolução; execução da estratégia e revisão da solução.

Atualmente, destaca-se Alan Schoenfeld como matemático que desenvolveu uma heurística para resolução de problemas, dividindo-a em quatro categorias de conhecimento ou habilidades que julga serem necessárias: *recursos* (conhecimento de procedimentos e questões matemáticas); *heurísticas* (estratégias e técnicas para resolução de problemas); *controle* (decisões sobre quando e quais recursos usar) e *convicções* (saber realmente o que está fazendo e para que utilizará o resultado). Schoenfeld (1985) ainda ressalta que para resolver um problema não basta apenas possuir o conhecimento sobre alguma heurística para sua resolução, é necessário ter capacidade de resolver problemas sobre o assunto.

Neste trabalho, estudou-se algumas heurísticas para resolução de problemas e foi realizada uma aplicação num problema específico com o objetivo de exercitar a metodologia de resolução de problemas e relacionar diferentes conteúdos e estratégias na solução do problema selecionado.

AS HEURÍSTICAS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE GEORGE POLYA

Polya (1978, p. 65) já afirmava que:

> Resolver problemas é uma habilidade prática, como nadar, esquiar ou tocar piano: você pode aprendê-la por meio de imitação e prática. [...] se você quer aprender a nadar você tem de ir à água e se você quer se tornar um bom 'resolvedor de problemas' tem que resolver problemas.

Ele acreditava na existência da arte da descoberta e que a habilidade de descobrir e inventar poderiam ser acentuadas por uma bem cuidada aprendizagem. Nela, o aluno é levado a perceber os princípios da descoberta e tem a oportunidade de exercitá-los.

Em seu livro **A arte de resolver problemas**, Polya (1978) afirma que o modo como se vê o problema pode sofrer alterações. No princípio, tem-se uma visão incompleta e complicada, mas quando se realizam algumas evoluções, essa percepção começa a mudar e ela ainda será diferente no momento em que se chegar à solução do problema.

Com a finalidade de agrupar melhor as indagações e sugestões, Polya (1978) dividiu o seu processo de resolução de um problema matemático em quatro etapas:

- **Compreender o problema**

O autor coloca como algo muito importante a compreensão do problema. Ele relata que é uma tolice se tentar responder uma pergunta sem saber qual o seu significado. Pode-se perceber que, já nesta primeira etapa, ele se preocupava com uma aprendizagem que pudesse vir a ser significativa.

Para compreender melhor o problema podemos realizar algumas perguntas como: Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionante? Também se devem considerar, sob vários pontos de vista, as partes que se julgarem importantes no problema. Devemos verificar se o problema pode ser representado através de uma figura e se é possível satisfazer as condições.

- **Estabelecer um plano**

Para Polya, deve-se muitas vezes iniciar com um plano para a resolução do problema a partir da seguinte pergunta: Conhece algum problema correlato?

Deve-se pensar num possível problema que já foi resolvido com a mesma incógnita, ou informação, e que possa vir a ser utilizada. Caso não seja encontrado nada que nos ajude, devemos verificar se é possível fazer uma reformulação no enunciado. Essa reformulação pode levar a um problema auxiliar adequado. Ao usarmos vários problemas ou teoremas conhecidos, realizando diversas modificações e ensaiando problemas auxiliares diferentes, podemos nos distanciar do problema original. Para voltar podemos realizar a seguinte indagação: Foram utilizados todos os dados? Foram usados todas as condicionantes?

- **Executar o plano**

O plano é apenas um roteiro geral. É preciso ter certeza de todos os detalhes que estão ali inseridos de modo que não reste nenhuma dúvida na qual possa estar escondido algum erro. A execução do plano é uma tarefa fácil, mas é necessário ter paciência e certeza de que cada passo executado está correto.

- **Revisar a solução**

Esta é uma etapa muito importante; executando-a teremos certeza de que resolvemos o problema de maneira correta, eliminando, assim, algum erro que possa ter ocorrido durante a execução do plano. Para tanto, podemos realizar o seguinte questionamento: É possível verificar o resultado? É possível verificar o argumento?

Também será necessário verificar se poderemos utilizar o resultado obtido ou o método utilizado em algum outro problema e se há a possibilidade de encontrarmos a solução utilizando outra estratégia.

A obra de Krulik e Reys (1997) igualmente salienta a importância do uso de estratégias na resolução de problemas e apresenta contribuições de vários estudiosos que discutem a eficiência no ensino de matemática e afirmam que os problemas são, muitas vezes, impulsionadores no desenvolvimento de tópicos da matemática.

METODOLOGIA

O procedimento metodológico utilizado foi do tipo pesquisa bibliográfica, com abordagem qualitativa, por meio da qual se estudou e analisou a metodologia de resolução de problemas e as contribuições no ensino-aprendizagem da matemática. Utilizou-se o método proposto por Polya, seguindo-se as quatro etapas, para a resolução do seguinte problema [5]:

Um fabricante produz bolas maciças em dois tamanhos, mas dispõe de um único modelo de caixa para transportá-las. Felizmente, essa caixa acondiciona perfeitamente uma bola grande, ou 216 pequenas. Sabendo que, independente do tamanho, as bolas são feitas do mesmo material, qual a caixa de bolas que pesará mais?

RESULTADOS

Utilizando o método de Polya para resolução do problema, tem-se:

1ª etapa: compreensão do problema. Para isso questionou-se:

- O que o problema pede ou qual a incógnita?

O problema solicita: Qual das caixas pesará mais, a que contém as bolas pequenas ou a bola grande?

- Quais são os dados?

Tem-se informação de que uma bola grande é acondicionada perfeitamente dentro de uma caixa; noutra caixa, do mesmo tamanho, cabem 216 bolas pequenas e todas as bolas são maciças e feitas do mesmo material.

- Podemos representar o problema através de uma figura?

Sim, pois, nesse caso, tem-se o seguinte desenho:

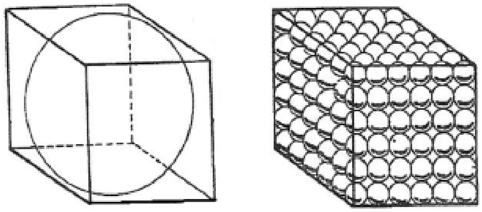

Figura 1 - De acordo com o problema teremos uma bola grande ou 216 bolas pequenas dentro de uma caixa.

2ª etapa: estabelecimento ou elaboração de um plano.

Nessa etapa, encontrou-se a ligação entre os dados e a incógnita do problema. Observou-se a distribuição das bolas pequenas no interior de uma das caixas, bem como o desenho das duas caixas e concluiu-se que:

- se "A" for a medida das arestas das caixas, "R" a medida do raio da bola grande e "r" a medida do raio das bolas pequenas, então: A = 2R = 2(6r);

- a caixa grande pode ser dividida em 216 caixas pequenas, cada uma acondicionando perfeitamente uma bola pequena.

Pensando num plano para se resolver o problema, percebeu-se que existem pelo menos três maneiras distintas de solucioná-lo:

1ª. utilizando-se proporções (fez-se a comparação entre o volume das esferas e suas respectivas caixas);

2ª. calculando-se o volume das esferas grande e pequena (aplicaram-se as fórmulas do cálculo do volume);

3ª. por semelhança (lembrou-se que duas figuras ou objetos no espaço são semelhantes quando têm a mesma forma e a mesma razão entre as medidas lineares correspondentes).

3ª etapa: execução do plano.

1ª solução: utilizando proporções.

Imaginando-se cada bolinha inscrita em uma caixinha, notou-se que a caixa grande fica dividida em 216 caixinhas imaginárias do mesmo tamanho. Como a razão entre o volume da esfera (bola) grande e o volume da caixa cúbica é a mesma que a razão entre o volume da esfera pequena e o volume da caixinha cúbica imaginária, tem-se:

$$\frac{vol.esf.grande}{vol.caixa.grande} =$$

$$\frac{vol.esf.pequena}{vol.caixa.pequena} =$$

$$\frac{216}{216} \cdot \frac{vol.esf.pequena}{vol.caixa.pequena} =$$

$$\frac{216vol.esf.pequena}{vol.caixa.grande}$$

Portanto,

$$\frac{vol.esf.grande}{vol.caixa.grande} = \frac{216vol.esf.pequena}{vol.caixa.grande}$$

daí, $vol.esf.grande = 216.vol.esf.pequena$

Assim, conclui-se que, como todas as bolas são feitas do mesmo material e possuem o mesmo volume, então as caixas terão o mesmo peso.

2ª solução: usando fórmulas.

Aplicando-se a fórmula do volume da esfera, calculou-se o volume das esferas grande e pequena, resultando que:

$$vol.esf.grande = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot R^3 = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot(6r)^3 =$$

$$\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot 216\cdot r^3 = 216.\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3 =$$

$$= 216\cdot vol.esf.pequena$$

Como todas as bolas são feitas do mesmo material e possuem o mesmo volume, então as caixas terão o mesmo peso.

3ª. solução: por semelhança.

Considerando-se que duas figuras ou objetos no espaço são semelhantes quando têm a mesma forma e a mesma razão entre as sua medidas lineares correspondentes, conclui-se que a esfera grande é semelhante à esfera pequena na razão 6, pois R = 6.r ou R/r = 6.

Considerando-se também que se dois sólidos são semelhantes na razão "K", então seus volumes estão na razão K^3, tem-se:

$$\frac{vol.esf.grande}{vol.esf.pequena} = 6^3 \Rightarrow$$

$$vol.esf.grande = 6^3.vol.esf.pequena \Rightarrow$$

$$vol.esf.grande = 216.vol.esf.pequena$$

Como todas as bolas são feitas do mesmo material e possuem o mesmo volume, então as caixas terão o mesmo peso.

4ª etapa*:* revisando a solução.

Pode-se verificar o resultado construindo-se bolas dos dois tamanhos, com material concreto, constatando-se com isso que a conclusão que se obteve é verdadeira.

Ainda, nessa etapa, reviu-se todos os argumentos e as manipulações algébricas feitas e verificou-se que tudo está correto.

Também, nessa etapa, questionou-se se é possível utilizar o resultado, ou o método, para resolver algum outro problema análogo, quando se fazem alterações no enunciado do problema. Pensando nisso, fizeram-se alterações na formulação do problema inicial e trocaram-se hipóteses. Após, considerou-se:

- "Se as bolas forem ocas, e sendo x (x$\in \Re^*$) a medida da espessura da casca, qual a caixa que pesará mais?"

- "Quem tem maior área de superfície, a bola grande ou as 216 pequenas?"

Para a resolução da primeira questão, indicou-se o volume da "casca" da esfera grande por "vol.cas.esf.gr." e obteve-se:

$$vol.cas.esf.gr. =$$

$$\frac{4}{3}.\pi.\left[(6r)^3 - (6r-x)^3\right] \Rightarrow$$

$$vol.cas.esf.gr. =$$

$$6^3\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot x\cdot\left(\frac{3}{6}r^2 - \frac{3}{6^2}rx + \frac{1}{6^3}x^2\right)$$

e, se "vol.cas.esf.pq." indica o volume da casca da esfera pequena, então

$$216.vol.cas.esf.pq. =$$

$$216\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi\left(r^3 - (r-x)^3\right) =$$

$$6^3.\frac{4}{3}.\pi.x(3r^2 - 3rx + x^2)$$

Logo, comparando-se os volumes encontrados, tem-se que:

Vol.cas.esf. gr. $<$ 216.Vol.cas.esf.pq., concluindo-se que, com a hipótese das esferas serem ocas, a caixa que pesará mais é a que contém as esferas pequenas.

Pode-se responder a segunda pergunta de duas maneiras:

1ª - usando-se a fórmula de área da superfície da esfera, tem-se:

a área da superfície da esfera pequena = $4.\pi.r^2$;

a área da superfície da esfera grande = $4.\pi.(6.r)^2 = 6^2.(4.\pi.r^2)$. Mas,

216.área da superfície da esfera pequena = $6^3.(4.\pi.r^2)$.

Assim, "superfície da esfera grande <216 superfície da esfera pequena", o que permite concluir que a caixa que pesará mais é a que contém as esferas pequenas;

2ª - utilizando a noção de limite:

intuitivamente, pode-se imaginar uma superfície como uma "placa sólida" de espessura x "infinitamente pequena".

Assim, o volume dessa placa é $Vp = Sp \cdot x$. Portanto, $Sp = \frac{Vp}{x}$, em que Vp e Sp são o volume e a superfície da placa, respectivamente.

Se existe um valor para x, quando $x \to 0^+$ (x tende a zero por valores maiores que zero), esse valor limite de Sp indicará a superfície S que se quer determinar.

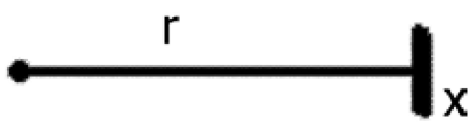

Figura 2 - "r" representa o raio da esfera e "x" a espessura da superfície.

Logo, indicando-se o volume da casca da bola pequena por "vol.cas.b.p.", tem-se:

$$vol.cas.b.p. = \frac{4}{3}\pi\left[r^3 - (r-x)^3\right] \Rightarrow$$

$$vol.cas.b.p. = \frac{4}{3}\cdot\pi\, x\cdot\left[3r^2 - 3rx + x^2\right] \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{vol.cas.b.p}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{4}{3}\cdot\pi[3r^2 - 3rx + x^2] \Rightarrow$$

$$S_{c.b.p.} = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot 3r^2 = 4\cdot\pi\cdot r^2,$$

em que $S_{c.b.p.}$ indica a superfície da casca da bola pequena.

Ainda, indicando-se o volume da casca da bola grande por "vol.cas.b.g.", tem-se:

$$vol.cas.b.g. = \frac{4}{3}\pi\left[(6r)^3 - (6r-x)^3\right] \Rightarrow$$

$$vol.cas.b.g. = 6^3\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot x\cdot\left(\frac{3}{6}r^2 - \frac{3}{6^2}rx + \frac{1}{6^3}x^2\right) \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{vol.cas.b.g.}{x} = \lim_{x\to 0}\left[6^3\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot\left(\frac{3}{6}r^2 - \frac{3}{6^2}rx + \frac{1}{6^3}x^2\right)\right] \Rightarrow$$

$$S_{c.b.g.} = 6^3\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot\frac{3}{6}r^2 \Rightarrow S_{c.b.g.} =$$

$$6^2\cdot(4\pi r^2) \Rightarrow S_{c.b.g.} = 6^2\cdot S_{c.b.p.},$$

em que $S_{c.b.g.}$ indica a superfície da casca da bola grande. Logo,

$$216\cdot S_{c.b.p.} = 6^3 S_{c.b.p} > 6^2 S_{c.b.p.} = S_{c.b.g.}$$

Portanto, as 216 bolas pequenas possuem uma superfície maior que a superfície da bola grande.

FORMULAÇÃO GENÉRICA DO PROBLEMA INICIAL

É sempre possível resolver o problema ou o enunciado ter sentido se trocarmos o número 216 por outro número qualquer?

Qual a relação que deve existir entre a medida da aresta da caixa cúbica e a do diâmetro da bola (esfera) grande para que o enunciado tenha sentido e o problema tenha solução? E entre a medida da aresta da caixa cúbica e a do diâmetro da bolinha? E entre a medida do diâmetro da bola grande e o da bolinha?

De modo geral, para o enunciado ter sentido e o problema ter solução, questiona-se:

Qual deve ser a medida da aresta da caixa cúbica, se a medida do diâmetro da bolinha for tomada como unidade de comprimento?

Quantas bolinhas podem ser acondicionadas perfeitamente nessa caixa?

Como se pode dar uma formulação genérica para esse problema?

Respondendo-se a essa última pergunta, tem-se:

> "Um fabricante produz bolas maciças em dois tamanhos, mas dispõe de um único modelo de caixa para transportá-las. Felizmente, essa caixa acondiciona perfeitamente uma bola grande, ou n3 bolas pequenas (n N*). Sabendo que, independente do tamanho, as bolas são feitas do mesmo material, qual a caixa de bolas que pesará mais?"

Na generalização do problema, é fácil observar que:

aresta da caixa = diâmetro da bola grande = n . diâmetro da bolinha. Daí, vol.esf. grande = $\frac{4}{3}.\pi.(n.r)^3$ e vol.esf.pequena = $\frac{4}{3}.\pi.r^3$. Portanto, *volume da esfera grande* = *n^3. volume da esfera pequena.*

Assim, como todas as bolas são feitas do mesmo material, conclui-se que as duas caixas de bolas têm o mesmo peso.

Além dessas, outras variações e outros assuntos de matemática podem ser sugeridos e explorados a partir desse problema.

Os alunos podem ser incentivados a procurarem outros problemas e explorarem outros assuntos, pois, ao trabalhar dessa forma, eles desenvolverão a sua criatividade e se tornarão agentes ativos na construção de seu conhecimento.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Utilizando-se o método proposto por Polya (1978) constata-se que, com mais facilidade, organizam-se as ideias e se obtém a solução do problema com uma melhor compreensão do que se não tivéssemos seguido seu método. Também é possível encontrar problemas análogos e tornar mais clara uma estratégia para sua resolução. Certamente esse método não é uma ferramenta milagrosa, mas torna-se necessário e eficiente seu uso em um grande número de problemas, principalmente os que apresentam um maior nível de dificuldade. Polya ressalta que primeiramente temos uma visão do problema, mas com a aplicação das etapas, à medida que vamos avançando, (retirando os dados do problema e construindo uma estratégia para sua resolução), a nossa perspectiva sobre o problema altera-se; o mesmo acontece quando o resolvemos; daí a importância de uma heurística.

O estudo e resolução de um problema simples, como esse, mostraram que é necessário um trabalho de persistência e uso de método para obter e explorar diferentes soluções. O problema oportunizou aplicar conteúdos diferentes, estabelecer relações entre conceitos e exercitar a metodologia de resolução de problemas. Deu-se ênfase na exploração de maneiras diferentes de resolução do problema proposto e nas alterações feitas nas condicionantes enunciadas no problema, bem como nas estratégias para a busca de soluções alternativas.

REFERÊNCIAS

DESCARTES, René. **Discurso do método.** São Paulo: Martins Fontes, 1999.

KRULIK, Stephen; REYS, Robert E. **A resolução de problemas na matemática escolar.** São Paulo: Atual, 1997.

PEREIRA, A. L.; RAMOS, A. P.; MATEUS, A. A.; MATIAS, J. B. O.; CARNEIRO, T. R. A. **Problemas matemáticos:** caracterização, importância e estratégias de resolução. São Paulo: IME-USP, março de 2002.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

SCHOENFELD, Alan. **Mathematical Problem Solving.** New York: Academic Press, 1985.