VIDYA, v. 28, n. 1, p. 97-104, jan./jun., 2008 - Santa Maria, 2009. **ISSN** 0104-270X

PIZZAS E TRIÂNGULO DE PASCAL: ILUSTRANDO A ARTICULAÇÃO CONCEITUAL DE UMA RESPOSTA EM FÓRUM VIRTUAL

PIZZAS AND PASCAL TRIANGLE: ILLUSTRATING A CONCEPTUAL ARTICULATION FROM AN ANSWER IN A VIRTUAL FORUM

MARCELO ALMEIDA BAIRRAL*
GILMAR TEIXEIRA DOS SANTOS**

RESUMO

Ilustrar relações conceituais entre situações de aprendizagem variadas deve ser um dos objetivos do ensino de matemática. Nesse processo, o desenvolvimento de habilidades comunicativas, inclusive as mediadas pela informática, tem assumido um papel crucial. Neste artigo, mostramos a articulação conceitual entre resposta apresentada para um problema proposto e o Triângulo de Pascal[1]. O estudo contribui para a matemática escolar em duas vertentes: mostrar que é possível resolver problemas matemáticos *on-line* e chamar a atenção do professor sobre a importância de dispor de uma variedade de estratégias para analisar a construção do conhecimento dos alunos.

Palavras-chave: Fórum de discussão; Estudantes; Triângulo de Pascal; Uma resposta.

ABSTRACT

Illustrates conceptual relation among different learning situations should be one of the aims on the mathematical instruction. In this process, the development of communicative skills mediated by informatics has assumed a crucial role. In this paper we show a conceptual articulation between an answer within a forum for the problem proposed and the Pascal Triangle. The study contributes for the school mathematics in two dimensions: shows that are possible solve mathematics problems on-line, and underlines for teachers about the importance of consider a variety of strategies to analyze the students' knowledge construction.

Keywords: *Discussion Forum; Students; Pascal Triangle; An answer.*

* Professor, UFRRJ.
** Mestrando em Engenharia Civil, COPPE/UFRJ.

[1] Para conhecer outras possibilidades de trabalho com o Triangulo de Pascal e com as réguas de Cuisenaire em contexto presenciais, veja Silva et al (2006).

INTRODUÇÃO

A internet tem ampliado nossas possibilidades de comunicação. Neste artigo, apresentamos parte dos resultados de uma pesquisa[2], iniciada em 2005 e desenvolvida no GEPETICEM (www.gepeticem.ufrrj.br), na qual procuramos investigar como estudantes do Brasil e dos Estados Unidos trabalham colaborativamente utilizando os recursos da internet e desenvolvem o seu raciocínio matemático. Concretamente, exemplificamos como um aluno explicita seu processo de pensamento mediante um fórum de discussão sobre problema envolvendo combinatória.

De acordo com as diretrizes curriculares nacionais, é importante que o ensino de matemática se volte para o desenvolvimento da capacidade de comunicação, de resolução de problemas, de tomar decisões, de fazer inferências, de trabalhar colaborativamente, entre outras. Assim, a matemática no Ensino Médio deve ter um valor formativo, que ajuda a organizar o pensamento mediante processos de raciocínio variados. O ensino também deve desempenhar um papel instrumental, pois a matemática é mais uma ferramenta que pode ser utilizada para muitas tarefas em atividades humanas diversas, além de servir de suporte a outras disciplinas do currículo.

É importante que o estudante secundarista perceba que as definições, as articulações conceituais e as formas de demonstração têm a função de auxiliar na construção de novos conceitos. Como exemplo, neste artigo, ilustramos de que modo a resposta de um aluno pode ser utilizada pelo professor para desenvolver conceitos de forma articulada. Inicialmente, pensamos ser relevante refletir sobre a importância dos ambientes virtuais como um dos espaços de aprendizagem.

AMBIENTES VIRTUAIS E FÓRUM DE DISCUSSÃO COMO ESPAÇOS DE APRENDIZAGEM

Em educação matemática, o uso de ambientes virtuais tem finalidades educativas: como suporte opcional ao desenvolvimento de atividades pontuais (de uma disciplina, de um curso, de uma unidade didáticam, etc.) ou ambiente próprio do curso ou projeto. Além da obrigatoriedade e essência, este último reúne todo o material (impresso, *softwares*, atividades, etc.) a ser trabalhado, inclusive, possibilidades de *download* de programas, gabaritos, cronogramas[3]. Em alguns casos, há controle regulatório de acessos.

Pasqualotti e Freitas (2001) ressaltaram que os ambientes virtuais devem ter articulações diretas com os conteúdos curriculares, com a experiência dos estudantes e com a interação destes e sua sala de aula. Os autores enfatizaram que os cenários virtuais de aprendizagem não devem possuir ausência de propósito pedagógico e, tampouco, devem ser vistos como espaços de receitas prontas e de reproduções sistemáticas. Campos e colaboradores (2003) destacam que um ambiente virtual de aprendizagem

[2] Financiada pelo CNPq (bolsa de IC, auxílio e bolsa de produtividade).

[3] A Plataforma CEDERJ é um exemplo característico desse tipo de ambiente.

> deve incentivar interesses comuns dentro do grupo, normalmente relacionados ao tipo de vida que os participantes levam, o que precisam aprender e o que gostam de fazer (p. 48).

Assumimos que, em cenários virtuais, a construção do conhecimento é realizada hipertextualmente (BAIRRAL, 2007). Nesses ambientes, passamos a ter uma produção da escrita diferente: a hipertextual. O hipertexto é visto como uma tecnologia que rompe com a linearidade tradicional da escrita, que é uma das formas de explicitar e desenvolver o pensamento. Com a escrita podemos revisar, em diferentes tempos, nosso desenvolvimento cognitivo em determinada atividade (POWELL; BAIRRAL, 2006).

Neste artigo, estamos interessados na produção escrita no fórum de discussão, um espaço comunicativo com interação em tempo diferido. Powell e Lai (2009) ressaltam que, nos bate-papos, os alunos também debatem suas interpretações sobre o problema e suas estratégias de resolução. Nesse processo, os discentes usam diferentes formas de registros para compreender as estratégias de cada colega e para contribuir com elas, mesmo quando os interlocutores compartilham estratégias diferentes. Os autores sublinham que o caráter não efêmero da comunicação no cenário virtual permite a cada estudante "ouvir" o outro enquanto, simultaneamente, "fala" alto a sua solução para o problema.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Em nosso projeto, a aprendizagem matemática é desenvolvida em ambientes virtuais, sejam presenciais ou semi-presenciais. Tais cenários são vistos como um contexto de trabalho em que os interlocutores (professores, alunos, investigadores) interagem colaborativamente com diferentes artefatos em distintas situações de aprendizagem que propiciam a construção do conhecimento. A seguir, ilustramos a página de entrada no ambiente do Projeto *e*Math.

Participam de nosso projeto alunos e professores das seguintes instituições: Rutgers University (EUA), Faculdade do Espírito Santo (FAESA), Colégio Técnico da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (CTUR) e Escola de Aplicação da USP. No estudo aqui descrito, contribuíram alunos do CTUR e da FAESA[4].

Ao longo da investigação, utilizamos os seguintes procedimentos: seleção de participantes e de atividades; construção e reformulação do ambiente virtual do projeto; trabalho de campo; análise dos dados. A coleta de dados foi feita mediante o registro escrito de todo o processo interativo síncrono (via *chats*) e assíncrono (via *e-mail* e fórum) estabelecido na internet. Analisamos aqui apenas respostas postadas no fórum concernentes ao problema da pizza[5].

[4] Agradecemos os docentes Alice Souza, Arthur B. Powell, Luiz Thimoteo, Ronaldo Pamplona e Sumaia Vazquez pela colaboração nessa fase da pesquisa.

[5] Para saber sobre a análise em *chats* veja Bairral, Powell e dos Santos (2007).

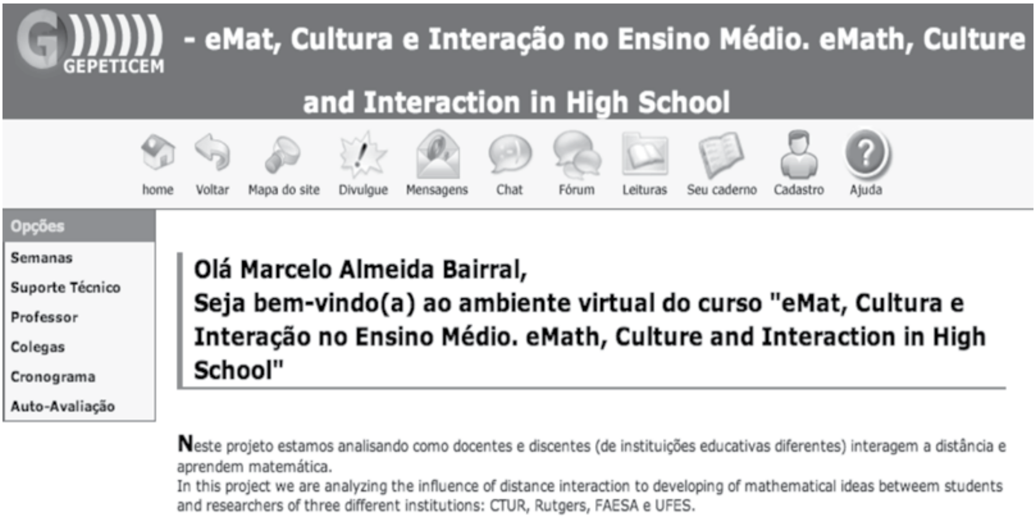

Figura 1 - Página de entrada no ambiente.

RESULTADO

A seguir, ilustramos o fórum de discussão com a intervenção inicial do professor e com a primeira resposta do aluno.

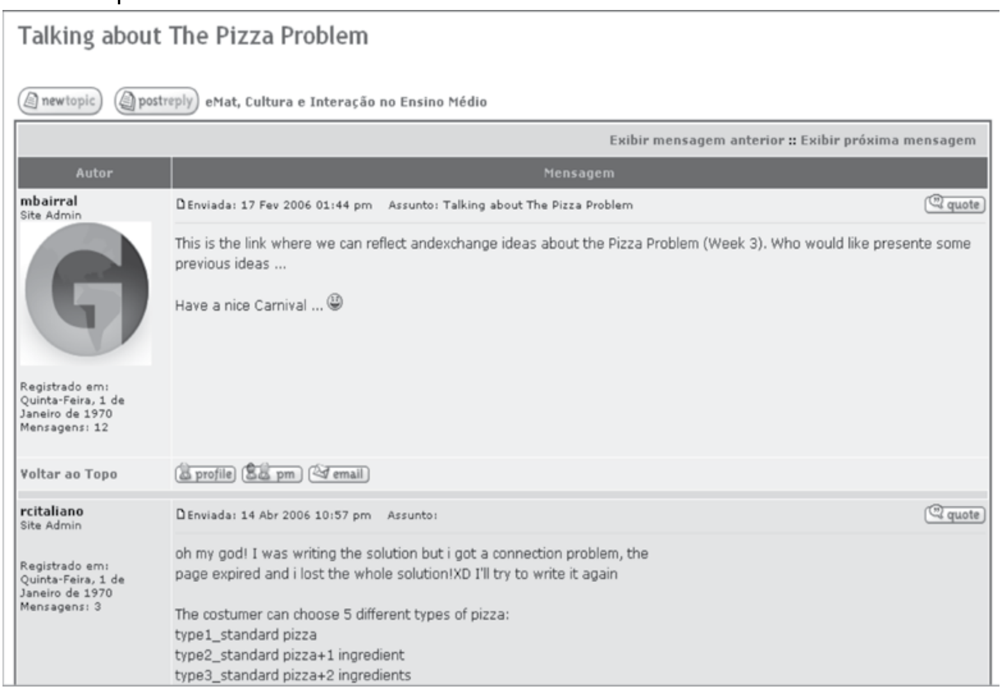

Figura 2 - Página principal do Fórum.

A seguir, apresentamos o enunciado do problema e a solução apresentada pelo aluno no fórum.

The Pizza Problem **(O problema da pizza)** Uma pizzaria nos pediu que ajudássemos na organização do seu cardápio de pizzas. A pizza clara padrão contém queijo com molho de tomate. Um cliente pode, então, selecionar as seguintes coberturas para acrescentar à pizza clara inteira: pimentões, linguiça, cogumelos e salaminho. Quantas escolhas diferentes para pizza um cliente tem? Liste todas as possíveis seleções. Ache um modo para convencimento e compartilhe suas ideias e respostas no fórum.

Quadro 1 - O problema trabalhado.

As razões para utilização do tipo de problema abordado estão sincronizadas com as de Powell e Lai (2009), ou seja: o problema aborda um conteúdo do Ensino Médio do currículo oficial (análise combinatória), explora uma situação em um contexto familiar para os estudantes e, matematicamente, a atividade possibilita uma variedade de estratégias em sua resolução. Eis uma solução postada (Quadro 2)[6].

O Triângulo de Pascal foi desenvolvido originalmente pelos chineses[7]. Um número no triângulo pode ser encontrado pela fórmula a seguir (Figura 3), na qual n é o número da fileira e r é o elemento nessa fileira.

The costumer can choose 5 different types of pizza:
type1_standard pizza
type2_standard pizza+1 ingredient
type3_standard pizza+2 ingredients
type4_standard pizza+3 ingredients
type5_standard pizza+4 ingredients

Now lets analyze each type of pizza:
type1_here the costumer just has a standard pizza, so, 1 choice;
type2_here the costumer will get a standard pizza and he will choose one ingredient to add, he will have 4 different choices;
type3_here the costumer can choose 2 ingredients to add on the pizza, but he will need to choose 2 different igredients, so if he choose peppers as the first ingredient he will not be able to choose it again as a second ingredient, so using the simple combination formula: (4!)/{2!x[(4-2)!]}= 6 different choices

using the same logic used on type 3 we will analyze the type4 and the type5:
type4_here he will be able to choose 3 different ingredients so he will have
(4!)/{3!x[(4-3)!]}= 4 different choices
type5_here he will just have a pizza with all ingredients so, 1 choice

the costumer will have 1+4+6+4+1= 16 different choices.
sorry about my english errors
ps: I dont know if "simple combination formula" is the correct way to say
"formula da combinação simples", if I'm wrong, please proffesor, correct me.
thanks, Robson

Quadro 2 - Solução do aluno.

[6] A solução apresentada acima pelo aluno Robson está em inglês porque nossa investigação faz parte de um projeto desenvolvido em colaboração com a Rutgers University (USA).
[7] Para saber mais sobre episódios históricos do Triângulo de Pascal acesse http://ptri1.tripod.com/#made.

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}\ ,\quad n\ escolhe\ r$$

Figura 3 – Fórmula para encontrar um número no triângulo.

A expressão *n escolhe r* pode ser entendida como: *n* (a fileira) e *r* (o número e seu elemento posicional correspondente). Por exemplo, na fileira 3: 1 é o elemento zero, 3 é elemento 1, o próximo 3 é o segundo elemento, e o último 1 é o terceiro elemento. A equação acima não foi numerada uma vez que é a única equação do texto. Abaixo, temos o Triângulo de Pascal.

Fila zero	1
Primeira fileira	1 1
Segunda fileira	1 2 1
Terceira fileira	1 3 3 1
Quarta fileira	1 4 6 4 1
Quinta fileira	1 5 10 10 5 1

Tabela 1 - O Triângulo de Pascal.

A interação no fórum fornece um maior tempo para os participantes refletirem sobre suas contribuições, buscarem referências e trabalharem em seus próprios ritmos. No fórum os alunos podiam escrever qualquer informação a respeito das atividades, exemplificando com detalhes todos os passos que seguiram.

A solução apresentada traz em seu bojo o uso de combinações. O aluno descreveu passo a passo sua resolução, mostrando de forma coerente o resultado esperado (como consta no Quadro 2).

Por meio da notação combinatória podemos descrever os cinco tipos de pizza apresentadas pelo discente Robson:

- Tipo 1: Pizza padrão sem nenhuma outra cobertura $= \binom{4}{0} = 1 = \binom{4}{0} = 1$, o cliente tem então 1 escolha,
- Tipo 2: Pizza padrão com mais uma cobertura $= \binom{4}{1} = 4 = \binom{4}{1} = 4$, o cliente tem então 4 escolhas,
- Tipo 3: Pizza padrão com mais duas coberturas $= \binom{4}{2} = 6 = \binom{4}{2} = 6$, o cliente tem então 6 escolhas,
- Tipo 4: Pizza padrão com mais três coberturas $= \binom{4}{3} = 4 = \binom{4}{3} = 4$, o cliente tem então 4 escolhas,
- Tipo 5: Pizza padrão com mais quatro coberturas $= \binom{4}{4} = 1 = \binom{4}{4} = 1$, o cliente tem então 1 escolha.

A estratégia de fixar um sabor (a pizza padrão) e ir variando os outros sabores foi um procedimento similar ao encontrado no estudo de Powell e Lai (2009). Podemos perceber que através do Triângulo de Pascal também é possível resolver esse problema, uma vez que apresenta uma certa relação com a resolução, do aluno. Ao observarmos a solução percebemos que aparece o termo (4!)/{2!x[(4-2)!]}= 6, correspondente à fórmula (Figura 3) com $n = 4$ e $r = 2$ para encontrar um número no triângulo. Sendo assim, a solução para o problema é 1+4+6+4+1= 16, o que corresponde à quarta fileira do Triângulo de Pascal.

DISCUSSÃO FINAL

Em um mundo onde as necessidades sociais, culturais e profissionais ganham novos contornos, todas as áreas requerem alguma habilidade em Matemática. A possibilidade de compreender conceitos e procedimentos matemáticos continua sendo necessária tanto para tirar conclusões e fazer argumentações quanto para o cidadão agir como consumidor prudente ou tomar decisões em sua vida pessoal e profissional.

O fórum pode ser mais um espaço para socialização de respostas. Soluções podem ser continuamente repensadas e reformuladas. Os interlocutores podem utilizar e integrar, diferentemente, informações do próprio cenário ou fora dele (BAIRRAL, 2007). Neste artigo, ilustramos que o Triângulo de Pascal pode ser uma estratégia utilizada para resolução de problemas de combinatória de estrutura semelhante ao problema da pizza. Essa estratégia não foi inicialmente percebida pelos alunos, ela foi apresentada pelos professores.

Temos visto que, com estudantes do Ensino Médio, determinadas formas de controle não são suficientes para evitar a dispersão dos discentes. Sabemos que a motivação deve ser constante nesse tipo de dinâmica interativa, principalmente em se tratando de um projeto para jovens que têm familiaridade com as ferramentas da internet (BAIRRAL et al, 2007).

Limitações existem, seja na escrita e nas formas de representação de determinada solução de um problema, seja no próprio interesse dos alunos por reflexões e respostas detalhadas. Para a solução apresentada, o aluno desenvolveu-a no Word e copiou-a no fórum, pois as simbologias utilizadas não seriam possíveis neste último. Temos que ter consciência da restrição discursiva que o fórum apresenta.

O fórum tem uma singularidade que é a oportunidade de uma reflexão maior ao longo tempo. No entanto, sabemos que os estudantes estão mais familiarizados com mensagens instantâneas e respostas mais pontuais, imediatas. Estamos investindo em melhorias do ambiente virtual no sentido de desenvolver elementos motivadores para que os alunos possam ter uma participação mais imersa no processo reflexivo. A consolidação da parceria internacional com a Rutgers University e com a Drexel University nos trará contribuições com o uso do ambiente Virtual *Math Team* (*VMT-Chat*).

REFERÊNCIAS

BAIRRAL, M. A. **Discurso, interação e aprendizagem matemática em ambientes virtuais a Distância**. Seropédica, RJ: EDUR, 2007.

BAIRRAL, M. A., POWELL, A. B.; DOS SANTOS, G. T. Análise de Interações de Estudantes do Ensino Médio em Chat. **Educação e Cultura Contemporânea** 4(7), p. 111-138, 2007.

CAMPOS, F. C. A. et al. **Cooperação e aprendizagem on-line.** Rio de Janeiro: DP&A, 2003.

PASQUALOTTI, A.; FREITAS, C. M. Experimentação de ambiente virtual para melhoria do ensino-aprendizagem de Matemática. **BOLEMA**, n. 16, p. 79-101, 2001.

POWELL, A. B.; BAIRRAL, M. A. **A escrita e o pensamento matemático:** Interações e potencialidades. Campinas: Papirus, 2006.

POWELL, A. B.; LAI, F. F. Inscription, mathematical ideas, and reasoning in VMT. In: G. STAHL (Ed.). **Studying Virtual Math Teams**. New York: Springer, 2009, p. 237-259.

SILVA, A. L. V.; BARBOSA, A. C. M.; BAIRRAL, M. A.; OLIVEIRA, R. **Instrumentação para o Ensino da Aritmética e Álgebra**, v. 2, Rio de Janeiro: CEDERJ, 2006.