

FUNÇÃO: O PROFESSOR CONHECE ESTE CONCEITO?

FUNCTION: DOES THE MATHEMATICS TEACHER KNOW THIS CONCEPT

VERA CLOTILDE GARCIA*

RESUMO

Neste artigo, apresentamos estudo a respeito do conhecimento de Matemática sobre função, necessário para o professor. Caracterizamos função como relação entre conjuntos quaisquer, muitas vezes, sem representação; eixo central de uma rede de conexões no interior da Matemática; com muitas facetas e representações, em diferentes contextos e domínios. Para a escola, entretanto, função tem significado limitado: função real de uma variável associada a equações e gráficos. O currículo do curso de licenciatura que foi analisado, aparentemente, corresponde e não vai além dessa concepção. Visando a ampliar o conhecimento do professor, em sua formação, sugerimos um projeto de ensino e extensão com minicursos para introdução das funções de variável complexa e das funções do plano nele mesmo.

Palavras-chave: Conceito de função; Conhecimento de Matemática do professor; Formação de professores de Matemática.

ABSTRACT

This paper brings out some results of a study about the mathematics knowledge of function considered necessary to teaching. It characterizes function as a relation between arbitrary sets, many times without any representation; central among many connections within mathematical knowledge, showing different facets, dominium and representations. At school, function has a limited signification: real function of one real variable, always represented by equations or graphics. Pre-service curriculum, of a course that was investigated, apparently, supplies this demand, but the knowledge of future teacher has the same limitations. On this line, it is referred a project offering short courses about the introduction of complex functions and about the function from the plane to itself.

Key words: Concept of function; Mathematics teacher knowledge; Mathematics teacher's education.

* Doutora em Educação, Mestre em Matemática, professora e pesquisadora do PPG-Ensino de Matemática da UFRGS.

INTRODUÇÃO

Apresentamos, neste artigo, um estudo sobre formação inicial de professores e o conhecimento matemático a respeito do conceito de função. As perguntas norteadoras do trabalho são: quais os conhecimentos de Matemática necessários para o professor ensinar? Quais são os conhecimentos a respeito de função necessários para o professor ensinar? E qual é o conhecimento desejável do ponto de vista da escola? Os conhecimentos de função produzidos no Curso de Licenciatura são os conhecimentos necessários? Que intervenções podem ser feitas para contribuir com a aprendizagem de funções na licenciatura?

O texto está dividido em quatro partes: as duas primeiras consistem em estudo teórico da produção na área de Educação Matemática para responder as questões iniciais; a terceira apresenta resultados de uma investigação orientada para descrever os significados de função na escola e em um curso de licenciatura; a última se refere a experiências de ensino, planejadas para ampliar o conhecimento a respeito de função.

QUAIS SÃO OS CONHECIMENTOS DE MATEMÁTICA NECESSÁRIOS PARA O PROFESSOR ENSINAR?

Uma grande quantidade de pesquisas empíricas e ensaios teóricos são desenvolvidos, partindo dessa questão, há mais de vinte anos (BALL, 1990; MEWBORN, 2001; SELDEN; SELDEN, 1996; BAIRRAL, 2003; PALIS, 2005; PONTE, 2000), confirmando a relevância do tema e mostrando que essa pergunta não tem uma resposta definitiva.

Neste estudo, optamos por começar com o conceito mais geral proposto por Shulman (1986, 2005). O autor define categorias do conhecimento básico, necessário para o professor ensinar, incluindo conhecimento do conteúdo, considerado fundamental para a atividade docente, pois, para ensinar, é preciso, antes de tudo, compreender.

Com relação ao conhecimento de Matemática necessário para o professor, diferentes publicações internacionais (MA, 1999; SILVERMAN, 2005; HANSSON, 2006; HILL, ROWAN; BALL, 2005; SILVERMAN; THOMPSON 2005; CHAPMAN, 2007) e nacionais (CURY, 2001; LELLIS, 2002; MOREIRA; SOARES, 2005; D'AMBROSIO; D'AMBROSIO, 2007) indicam que o conhecimento do conteúdo é um dos pilares da autonomia e da autoconfiança do docente, tanto para participar na reconstrução de currículos quanto para organizar práticas didáticas interativas. Em particular, Ma (1999) dá significado para compreensão profunda e ampla da Matemática: ir ao fundo do conhecimento fazendo conexões com outros conceitos e no interior do próprio conceito; é o entrelaçamento de todas as partes do conteúdo, formando um todo coerente.

Em Fiorentini, Souza e Melo (1998) e Fiorentini (2004) está expresso o desafio que se apresenta hoje para o professor. Espera-se dele uma atitude investigadora e crítica em relação à prática pedagógica e aos saberes e, também, espera-se que participe na produção de saberes e no desenvolvimento curricular da escola. Para isso, o professor precisa deter conhecimento do conteúdo necessário para ensinar, que vai além de regras e processos e tem relação

com sua natureza e seus significados, com o desenvolvimento histórico, com os diferentes modos de organizar os conceitos, com os princípios básicos da disciplina e com as crenças que os sustentam e legitimam.

Veloso et al. (2005) resumem tendências atuais da produção internacional:

Conhecimento explícito matemático é mais do que enunciar uma dada proposição ou procedimento, envolve sabermos as razões e as relações, sermos capaz de explicar a outros por que é assim, bem como relacionar ideias particulares ou processos (p. 11).

Buscamos caracterizar conceitos-chave - compreensão e conhecimento de Matemática - com auxílio de teóricos cognitivistas:

Hiebert e Carpenter (1992) vinculam noções de conhecimento, compreensão e aprendizagem com ideias sobre múltiplas representações e conexões. O conhecimento conceitual se fundamenta em uma rede bem conectada de ideias, na qual todas as partes estão unidas com múltiplas ligações. Compreensão consiste em conectar essas ideias e pode ser ampliada se forem introduzidas novas informações, construídas novas relações, estendidos limites conceituais e, conseqüentemente, se as configurações da rede forem reorganizadas.

Diferentes teorias (SFARD, 1991; MAROIS; TALL, 1996) indicam que o professor formado em nível superior deve ter oportunidade de percorrer diferentes graus de abstração para cada conceito fundamental. Concordam que a construção de objetos matemáticos abstratos é um processo longo e difícil, mas indispensável para compor o conhecimento necessário ao professor ensinar.

A partir desses estudos, delineamos um roteiro para este trabalho. Conhecimento de Matemática é essencial para o professor ensinar, para desenvolver uma aula interativa e para interferir no currículo. O conhecimento necessário é conhecimento conceitual, profundo, compreensivo, amplo, conectado em uma rede de informações, relações e representações. A construção do conhecimento é gradual, em níveis ascendentes de abstração, e cabe aos cursos de formação inicial proporcionar ao estudante, futuro professor, experiências de ensino que permitam a construção dos conceitos fundamentais.

QUAIS SÃO OS CONHECIMENTOS A RESPEITO DE FUNÇÃO NECESSÁRIOS PARA O PROFESSOR ENSINAR?

Hansson (2006) investigou o conhecimento dos professores em formação sobre função e traz uma ampla revisão de pesquisas a respeito do tema, destacando que: compreensão de um objeto matemático relaciona-se com conhecimento conceitual bem desenvolvido; e que função é conceito unificador e central no desenvolvimento da própria Matemática, em rede com outros conceitos matemáticos.

Percebemos que o conceito tem origens nos conceitos fundamentais da Matemática (CARAÇA, 1998): contagem, medida, forma, conjunto, coleção, correspondência, classificação, comparação, variação, interdependência, movimento, lei natural. Função intervém na construção dos conjuntos numéricos e na produção das primeiras leis da Física. O termo “função” tem sua gênese em questões geométricas e gráficas, alvo inicial do Cálculo Diferencial e Integral, sendo parte da estrutura dessa área,

o que justifica a importância dada às definições que envolvem equações e relação entre variáveis numéricas. A evolução do conceito serviu de base à formação de novos conceitos e possibilitou a formalização de noções inicialmente intuitivas como contagem (cardinalidade de conjuntos), medidas (em espaços métricos) e lei natural (modelos matemáticos). Teve como efeitos, também, a evolução da Álgebra e da Geometria, fundamentadas, hoje, em conceitos derivados - estruturas algébricas e homomorfismos, espaços e transformações. Kleiner (1989) expõe a história da evolução desse conceito, que culmina com a definição mais atual e geral, devida a Bourbaki, em 1939: função é uma relação unívoca entre dois conjuntos quaisquer (não necessariamente numérico), que pode não ter representação, seja algébrica seja geométrica.

O conceito de função é primário (depende apenas das noções intuitivas de relação, univocidade e conjunto), central, estruturante (participa e está nos fundamentos de todas as áreas) e articulador (espécie de elo conectando a Matemática internamente e a Matemática com as outras ciências). Fazendo parte da construção de estruturas, dá origem a uma vasta rede de conceitos relacionados, tais como: operação; transformação geométrica; operador; transformação linear, homomorfismo; equivalência topológica; funcional.

Conhecimento do conceito de função consiste, por um lado, na capacidade de estabelecer essas conexões, formando uma totalidade, no interior da Matemática. Por outro, cada face que a função assume, nos diferentes contextos, relacionando diferentes domínios, traz consigo uma coleção própria de

representações, problemas e procedimentos de resolução. Compreensão ampla inclui o entendimento e a possibilidade de operar em cada uma e em todas, nas suas semelhanças e diferenças.

QUAL É O CONHECIMENTO A RESPEITO DE FUNÇÃO DESEJÁVEL PARA O PROFESSOR ENSINAR NA ESCOLA? O QUE OS FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA ESTÃO APRENDENDO A RESPEITO DE FUNÇÃO NO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DA UFRGS?¹

Resumimos, aqui, resultados da análise de discurso para descrever significados desse conceito que circulam na escola. Consideramos documentos produzidos no Ministério da Educação, artigos diversos que tratam do tema e os trabalhos de Ardenghi (2008), com análise de 46 pesquisas, e de Silva (2007), com livros didáticos atuais.

Emergiram enunciados complementares. A escola está em crise; o ensino de Matemática deve contribuir para a melhoria da escola, afastando-se dos conceitos abstratos para ser centrado nas aplicações; o ensino de função na escola básica deve ficar restrito às funções reais de variável real e às suas representações; basta saber que função é uma relação especial entre variáveis numéricas.

No caso do ensino de função, professores demonstram, em Zuffi e Pacca (2000), a confusão que fazem entre definição tradicional - com conjuntos e com exemplos numéricos - e tendência atual - relação entre variáveis, com exemplos aplicados. Função, na escola, limita-se a um único significado desejável

¹ Conceito 5 no ENADE-2005 e IDD +1,33.

- relação de dependência entre variáveis numéricas - e ao conjunto de representações, problemas e procedimentos associados, mas, mesmo se propondo a trabalhar com essa única concepção, existem professores que não compreendem aquilo que tentam ensinar.

Cabe perguntar sobre o conhecimento de função que está sendo produzido nos cursos de licenciatura. O que os professores estão aprendendo?

Para verificar essa problemática, fizemos análise do currículo de um curso de licenciatura². O conjunto das disciplinas totaliza 2.900 horas: 1380 horas de disciplinas de conteúdo de Matemática e de Física; 1520 horas de disciplinas de Educação Matemática, Educação, práticas e atividades complementares.

Investigamos as disciplinas que, de algum modo, tratam do tema função. O *corpus* foi constituído por súmulas, planos de ensino, bibliografia e fala de professores. Emergiram enunciados diferentes para o objeto “função”, produzidos por grupos disciplinares, que definimos como grupo do Cálculo/Aplicações (900 horas), grupo da Álgebra (60 horas) e grupo das Transformações (120 horas).

Nas disciplinas do primeiro grupo, função é relação entre variáveis ou entre conjuntos, com domínio real, expressas por equações, ferramenta analítica para resolver problemas das mais diversas áreas.

Existe apenas uma disciplina de Álgebra que trata de função em termos de produto cartesiano e pares ordenados, com exemplos em que domínio e imagem incluem objetos não numéricos e sem representação Matemática.

O grupo das Transformações inclui apenas duas disciplinas – Geometria I e Álgebra

Linear, nas quais se relaciona função com transformações geométricas, ampliando o conjunto dos domínios das funções.

Ao analisar, porém, os planos de ensino, percebemos que no grupo do Cálculo, função é conceito central; na Álgebra, é secundário; na Geometria, a definição de transformação geométrica não é dada – o conceito é trabalhado com *softwares* de geometria dinâmica e resumido a movimentos ou transformações observáveis no plano; em Álgebra Linear, o estudo de transformações lineares tem base nas matrizes. Ou seja, o discurso predominante no Curso é o de função como uma relação unívoca entre conjuntos numéricos ou variáveis numéricas e o foco do ensino é a função que tem equação analítica, com suas aplicações.

O corpo de resultados de pesquisas, nacionais e internacionais, que toma o conceito e o ensino de função como objeto, também enfatiza o ensino de cálculo. (TALL; VINNER, 1981; SFARD, 1991; SILVERMAN; THOMPSON, 2005). Recentemente, Carlson, Oehrtman e Thompson (2007) apresentaram a concepção de “função como processo”, uma transformação dinâmica de um conjunto de partida (*input*) em um conjunto de chegada (*output*). No entanto, objetivaram melhorar a aprendizagem do cálculo, deixando de lado as outras facetas.

Outra fonte da produção do discurso do Curso, sobre função e ensino de função, está na história, na gênese do ensino da Matemática:

Era comum desenhar-se a Matemática com a forma de uma árvore, em geral um carvalho. [...] Das raízes erguia-se o robusto tronco onde estava gravado ‘cálculo’. Sobre o tronco finalmente a copa

² UFRGS: http://euler.mat.ufrgs.br/~comgradmat/resolucoes/licmat_projeto.pdf.

formada de numerosos galhos [...] variáveis complexas, variáveis reais, cálculo de variações, probabilidades [...] a trilha que o estudante deveria seguir para internar-se no seu estudo (EVES, 1995, p. 694).

Buscando o conhecimento de licenciandos em final de curso, Carneiro, Fantinel e Silva (2003) identificaram, como era de se esperar, campos de significados restritos a conjuntos numéricos, com ausência de relações entre o conceito de função e outros contextos, como as transformações da geometria.

Podemos pensar que o conhecimento produzido no Curso não contribui para formar um professor com conhecimento conceitual bem desenvolvido, porém, nas suas limitações, atende ao esperado pela escola. Essa afirmação é fundamentada no estudo relatado no início dessa seção, que traz a seguinte conclusão: a escola espera que o ensino de Matemática seja centrado nas aplicações e que o ensino de função fique restrito às funções reais de variável real e às suas representações. Com essa expectativa, é suficiente que o professor defina função como uma relação especial entre variáveis numéricas.

O PAPEL DA FORMAÇÃO NA PRODUÇÃO DE CONHECIMENTO: PROPOSTAS DE MUDANÇA

A pesquisa, na área de Educação Matemática, salienta o quanto é necessário que o professor compreenda o que ensina. No caso de função, isso significa estar consciente das suas múltiplas facetas, da sua centralidade e das suas múltiplas conexões.

Nessa perspectiva, para contribuir com a formação docente no Curso de Licenciatura,

organizamos uma proposta de ensino com objetivo de ampliar o conhecimento de função, criando conexões com outros contextos e oferecendo outros tipos de problemas e de representações. A proposta inclui três tópicos: 1) introdução às funções complexas com transformações geométricas euclidianas; 2) funções do plano nele mesmo com transformações euclidianas e não euclidianas; 3) introdução à topologia para relacionar função com transformações que não têm qualquer forma de representação.

Essa proposta pode ser desenvolvida como atividade de extensão, presencial ou a distância, tanto na formação inicial quanto continuada. O minicurso para introduzir funções complexas e transformações geométricas, disponível em Garcia, Fronza e Soares (2005), foi aplicado em diferentes ocasiões para professores e licenciandos.

O minicurso para introduzir funções do plano nele mesmo desenvolveu-se com a utilização do *software* Geogebra e foi criado como uma Engenharia Didática, tendo por público-alvo apenas licenciandos. O relato encontra-se em Garcia, Cunha e Moraes (2008).

Em relação ao minicurso para introdução à topologia, só existem ideias e o citamos aqui como uma sugestão para cobrir a ausência desses conteúdos na formação de professores.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, partimos do pressuposto de que o professor necessita deter um conhecimento profundo de Matemática e do conceito de função em particular e vimos que isso não ocorre no Curso de formação analisado, pois não são enfatizadas a

generalidade e a abrangência desse conceito. Porém, o conhecimento desejável na escola, limitado às funções reais, de uma variável e às suas aplicações, parece ser contemplado: é a perspectiva do cálculo diferencial e integral.

Os estudos em Educação Matemática indicam que o professor necessita de um conhecimento profundo que vá além da Matemática escolar para poder criar oportunidades de interação, discussão e investigação na sala de aula, e mudanças no currículo. Pensando nisso, sugerimos um projeto cujo objetivo é criar espaços para ampliação desse (e de outros) conceito(s), ampliando as conexões entre diferentes contextos. O projeto reúne as áreas de ensino e extensão e consiste em preparar sequências didáticas, formando minicursos, contemplando funções de variável complexa, funções do plano nele mesmo (já implementados e experimentados) e transformações topológicas (ainda na fase das ideias), visando à formação inicial e continuada de professores. Nos cursos de licenciatura, os minicursos podem ser oferecidos em sala de aula regular, nas disciplinas vinculadas à Educação Matemática³; para formação continuada de professores, podem ser oferecidos como atividades de extensão ou em cursos de pós-graduação⁴.

Preparamos este artigo apoiados em recomendações da área de Educação Matemática, no sentido da necessidade de investigar o currículo de formação de professores e propor melhorias. Assumimos,

com esta investigação, as responsabilidades que são hoje atribuídas a todos nós professores, como destacadas por Fiorentini, Souza e Melo (1998):

[...] espera-se dele uma atitude investigadora e crítica em relação à prática pedagógica e aos saberes historicamente produzidos; [...] passa a ser responsável pela produção de seus saberes e pelo desenvolvimento curricular (p. 332).

REFERÊNCIAS

ARDENGI, M. J. **Ensino e aprendizagem do conceito de função**: pesquisas realizadas no período de 1970 a 2005 no Brasil. 2008. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008. Disponível em: <http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/ARDENGI_marcos_jose.html>. Acesso em: mar. 2010.

BAIRRAL, M. Natureza do conhecimento profissional do professor: contribuições teóricas para a pesquisa em Educação Matemática. **Boletim GEPEN**, Rio de Janeiro, n. 41, p. 11-33, fev., 2003.

BALL, D. The mathematics understandings that prospective teachers bring to teacher education. **The elementary school journal**, Chicago, v. 90, n. 4, p. 449-467, março, 1990. Disponível em: <http://louisville.edu/edu/crmstd/bibo_math_elem_teachers.html>. Acesso em: mar. 2010.

³ No Curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS, essas disciplinas são: Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática (I,II,III) e Pesquisa em Educação Matemática, totalizando 28 créditos.

⁴ No Instituto de Matemática da UFRGS, esses cursos são: Mestrado em Ensino de Matemática; Curso de Especialização EAD para professores de Matemática – Matemática, Mídias Digitais e Didática.

CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais de Matemática**. 2. ed. Lisboa: Gradiva, 1998.

CARLSON, M.; OEHRMAN, M.; THOMPSON, P. Foundational reasoning abilities that promote coherence in student's understanding of function. In: CARLSON, M.; RASMUSSEN, C. (Orgs.). **Making the connection: research and teaching in undergraduated mathematics**. Washington DC: Mathematical Association of America, n. 150, p. 171, 2007. Disponível em: <<http://pat-thompson.net/PDFversions/2006MAA%20Functions.pdf>>. Acesso em: mar. 2010.

CARNEIRO, V.; FANTINEL, P.; SILVA, R. Funções: significados circulantes na formação de professores. **BOLEMA**, Rio Claro, v. 16, n. 19, p.19-39, março, 2003. Disponível em: <<http://euler.mat.ufrgs.br/~vclotilde/publicacoes/artigobolema.pdf>>. Acesso em: mar. 2010.

CHAPMAN, O. Preservice secondary mathematics teachers' knowledge and inquiry teaching approaches. In: WOO, J. H.; LEW, H. C.; PARK, K. S.; SEO, D. Y. (Orgs.). **Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2**, 2007 Seoul: PME. Proceedings, 2007, p. 97-104. Disponível em: <<http://www.emis.de/proceedings/PME31/2/97.pdf>>. Acesso em: mar. 2010.

CURY, H. A. (Org.). **Formação de professores de Matemática: uma visão multifacetada**. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2001.

D'AMBROSIO, B.; D'AMBROSIO, U. Formação de professores de Matemática: professor pesquisador. **Atos de Pesquisa em Educação**, Blumenau, v. 1, n. 1, p. 75-85, 2006. Disponível em: <<http://proxy.furb.br/ojs/index.php/atosdepesquisa/article/view/65>>. Acesso em: fev. 2008.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Campinas: Ed. UNICAMP, 1995.

FIORENTINI, D. Formação Matemática e didático-pedagógica nas disciplinas da licenciatura em Matemática. In: VII ENCONTRO PAULISTA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2004, São Paulo. **Anais...**, 2004. Disponível em: <www.sbempaulista.org.br/epem/anais/mesas.../mr11-Dario.doc>. Acesso em: jan. 2009.

_____; SOUZA JUNIOR, A.; MELO, G. Saberes docentes: um desafio para acadêmicos e práticos. In: GERALDI, C.; FIORENTINI, D.; PEREIRA, E. (Orgs.) **Cartografias do trabalho docente: professor(a) – pesquisador(a)**. Campinas: Mercado das Letras, 1998. p. 307-335.

GARCIA, V.; FRONZA, J.; SOARES, D. **Funções complexas e transformações geométricas: subsídios para minicurso**, 2005. Disponível em: <<http://143.54.226.61/~vclotilde/publicacoes/minhapagina/Microsoft%20Word%20fun%E7%F5es%20complexas,%20Soares%20e%20Fronza.pdf>>. Acesso em: mar. 2010.

GARCIA, V.; CUNHA, I.; MORAES, P. **O ensino de funções e de transformações geométricas com o auxílio do software GeoGebra: subsídios para minicurso**. 2008. Disponível em: <<http://143.54.226.61/~vclotilde/publicacoes/minhapagina/Microsoft%20Word%20-%20transforma%E7%F5es%20geogebra.pdf>>. Acesso em: mar. 2010.

HANSSON, O. **Studying the views of preservice teachers on the concept of function**. Luleå: LTU. 2006. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Luleå University of Technology, 2006. Disponível em: <<http://epubl.luth.se/1402-1544/2006/22/>>. Acesso em: mar. 2010.

- HIEBERT, J.; CARPENTER, T. Learning and Teaching with understanding. In: GROWS, D. (Org.). **Handbook of research on mathematics teaching and learning**. New York: Mcmillan, 1992. p. 65-97.
- HILL, H. C.; ROWAN, B.; BALL, D. L. Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. **American Educational Research Journal**, Washington D. C., n. 42, p. 371-406, 2005. Disponível em: <<http://sitemaker.umich.edu/lmt/research>>. Acesso em: mar. 2010.
- KLEINER, I. Evolution of the function concept: a brief survey. **The College Mathematics Journal**, Washington D.C., v. 20, n. 4, p. 282-300, setembro, 1989. Disponível em: <www.maa.org/pubs/Calc_articles/ma001.pdf>. Acesso em: mar. 2010.
- LELLIS, M. **Sobre o conhecimento do professor de Matemática**. 2002. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2002. Disponível em: <http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/marcelo_ellis.pdf>. Acesso em: mar. 2010.
- MA, L. **Knowing and Teaching Elementary Mathematics**. New Jersey: Erlbaum, 1999. Disponível em: <http://www.nap.edu/catalog.php?record_id=10050#toc>. Acesso em: mar. 2010.
- MAROIS, P; TALL, D. Facets and Layers of the Function Concept. In: **Proceedings of PME 20**, Valencia, 2, 1996, p. 297-304. Disponível em: <www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1996f-demarois-pme.pdf>. Acesso em: mar. 2010.
- MEWBORN, D. Teachers Content Knowledge, Teacher Education, and their Effects on the Preparation of Elementary Teachers in the United States. **Mathematics Education Research Journal**, Melbourne, v. 13, n. 3, p. 28-36, 2001. Disponível em: <www.merga.net.au/publications/counter.php?pub=pub_mted&id=16>. Acesso em: mar. 2010.
- MOREIRA, P; SOARES, M. O conhecimento matemático do professor: formação e prática docente na escola básica. **Revista Brasileira de Educação**, Rio de Janeiro, n. 28, p. 50-61, janeiro-abril 2005. Disponível em: <<http://www.scielo.br/pdf/rbedu/n28/a05n28.pdf>>. Acesso em: mar. 2010.
- PALIS, G. Educação Matemática: entrelaçando pesquisa e ensino, compreensão e mudança. **Educação on-line**, Rio de Janeiro, v. 1, 2005. Disponível em: <www.maxwell.lambda.ele.puc-rio.br/cgi-bin/db2www/PRG_1357.D2W/INPUT>. Acesso em: mar. 2010.
- PONTE, J. P. **A investigação sobre o professor de Matemática**. Conferência realizada no I SIPEM - Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, promovido pela SBEM - Sociedade Brasileira de Educação Matemática, São Paulo, 2000. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/curso_rio_claro.htm> Acesso em: mar. 2010.
- SELDEN, A.; SELDEN, J. Of what does mathematical knowledge consist? In: _____. (Orgs.). **Research Samplers**, Washington D.C., 1996. Disponível em: <http://www.maa.org/t_and_l/sampler/research_sampler.html>. Acesso em: mar. 2010.

SFARD, A. On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, The Netherlands, n. 22, p. 1-36, 1991. Disponível em: <www.msu.edu/~sfard/>. Acesso em: mar. 2010.

SHULMAN, L. S. Those who understand: Knowledge Growth in teaching. **Educational Researcher**, Washington D. C., v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986.

_____. Conocimiento y enseñanza: fundamentos de la nueva reforma. **Profesorado. Revista de curriculum y formación del profesorado**, Granada Espanha, v. 9, n. 2, 2005. Disponível em: <<http://www.ugr.es/~recfpro/rev92ART1.pdf>>. Acesso em: mar. 2010.

SILVA, U. **Análise da abordagem de função adotada em livros didáticos de Matemática da Educação Básica**. 2007. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2007. Disponível em: <http://www.sapientia.pucsp.br//tde_busca/arquivo.php?codArquivo=5679>. Acesso em: mar. 2010.

SILVERMAN, J. **An investigation of content knowledge for teaching understanding development and its influence on pedagogy**. Tennessee: Vanderbilt University, 2005. Tese (Doutorado em Educação Matemática) Faculty of the Graduate School of Vanderbilt University 2005. Disponível em: <http://etd.library.vanderbilt.edu/ETD-db/available/etd-06272005-212328/unrestricted/JS_Dissertation.pdf>. Acesso em 25/03/2010>. Acesso em: mar. 2010.

SILVERMAN, J.; THOMPSON, P. Investigating the relationship between mathematical understanding and teaching mathematics. In: WILSON, S. (Org.). **Proceedings of the twenty-seventh Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, Roanoke, VA. Vicksburg, VA: Virginia Tech, 2005. Disponível em: <<http://pat-thompson.net/Publications.html>>. Acesso em: abr. 2009.

TALL, D.; VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, The Netherlands, n. 12, p. 151-169, 1981.

TALL, D. Functions and calculus. In: BISHOP, A.; CLEMENTS, K; KEITEL, C.; KILPATRICK, J.; LABORDE, C. (Orgs.). **International Handbook of Mathematics Education**. Dordrecht: Kluwer, 1996. p. 289-325.

VELOSO, E.; SERRAZINA, L.; SANTOS, L.; ROCHA, I.; ALBUQUERQUE, C. NÁPOLES, S. **A Matemática na formação inicial de professores**. Texto para discussão, 2005. Disponível em: <<http://www.eduardoveloso.com/pdfs/matprof.pdf>>. Acesso em: jun. 2008.

ZUFFI, E. M.; PACCA, J. L. A. Sobre funções e a linguagem Matemática de professores do Ensino Médio. **Revista Zetetiké**, da Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Campinas, v. 8, n. 13/14, p. 7-28, jan./dez. 2000.