

## DIFICULDADES ENVOLVENDO A VISUALIZAÇÃO EM GEOMETRIA ESPACIAL

### *DIFFICULTIES ABOUT THE VISUALIZATION IN SPATIAL GEOMETRY*

THAÍS FERNANDA DE OLIVEIRA SETTIMY\*

MARCELO ALMEIDA BAIRRAL\*\*

#### RESUMO

Este artigo é decorrente de uma pesquisa de Mestrado que analisou o aprendizado de estudantes em atividades de Geometria Espacial, utilizando diversos recursos como papel e lápis, planificações articuladas, sólidos em acrílico e um vídeo gerado a partir da tela do *software GeoGebra*. A intervenção pedagógica foi feita no ano letivo de 2017, tendo como sujeitos de pesquisa alunos do 6º ano do Ensino Fundamental com faixa etária entre 11 e 14 anos de uma escola pública do município de Angra dos Reis (RJ). A visualização é considerada uma habilidade importante do pensamento matemático, é um processo individual que não é inato e, portanto, precisa ser ensinado. A categoria discutida neste texto, intitulada de Dificuldades, evidenciou a necessidade da implementação de mais atividades com foco na visualização e na representação dos objetos trabalhados. Além disso, a variedade de recursos utilizados foi um elemento relevante para o aprendizado geométrico dos sujeitos.

**Palavras-chave:** Geometria Espacial. Visão espacial. Pensamento visual. Vistas. Ensino Fundamental.

#### ABSTRACT

*This article is the result of a Master's research that analyzed student learning in Spatial Geometry activities, using various resources such as paper and pencil, articulated nets, acrylic solids and a video generated from the GeoGebra software screen. The pedagogical intervention was made in the school year 2017 and the research subjects were students of the 6th grade of elementary school aged between 11 and 14 years of a public school in the city of Angra dos Reis (RJ). Visualization is considered an important skill of mathematical thinking, it is an individual process that is not innate and therefore needs to be taught. The category discussed in this text, entitled Difficulties, evidenced the need to implement more activities focusing on the visualization and representation of the objects worked on. In addition, the variety of resources used was a relevant element for the subjects' geometric learning.*

**Keywords:** Spatial geometry. Spatial vision. Visual thinking. Views. Elementary School.

\* Doutoranda em Educação pelo Programa de Pós-Graduação em Educação, Contextos Contemporâneos e Demandas Populares (PPGEduc) da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ). Atualmente, professora da Prefeitura Municipal de Angra dos Reis/RJ. E-mail: sottamy@gmail.com. Orcid: <https://orcid.org/0000-0001-7194-4656>

\*\* Doutor em Educação Matemática pela Universidade de Barcelona com pós-doutorado na mesma área pela Universidade do Estado de Nova Jersey e pela Universidade de Turin. Professor titular da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro e docente do Programa de Pós-Graduação em Educação, Contextos Contemporâneos e Demandas Populares (PPGEduc) e do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática (PPGEduCIMAT). Email: mbairral@ufrj.br. Orcid: <https://orcid.org/0000-0002-5432-9261>

## INTRODUÇÃO

As aulas de Matemática focadas em uma metodologia tradicional são pautadas em exercícios que estimulam a mecanização e a aplicação de fórmulas em contextos que não fazem sentido para o estudante, que aprende a fazer cálculos e não a pensar matematicamente. Neste sentido, a Geometria é um campo fértil para perceber e entender as formas geométricas presentes em nosso cotidiano, sendo possível desenvolver habilidades importantes como a experimentação, representação, descrição e argumentação.

O presente artigo é um recorte da pesquisa de Mestrado de Settimy (2018) orientada pela seguinte questão: que contribuições o uso de diferentes recursos pode trazer para o desenvolvimento da visualização de alunos do 6º ano do Ensino Fundamental? A partir dessa questão, o objetivo geral foi refletir sobre a importância da visualização no desenvolvimento do pensamento geométrico. Particularmente, analisar aspectos relacionados ao desenvolvimento da visualização de estudantes do 6º ano de uma escola pública em atividades de geometria espacial utilizando recursos didáticos variados (papel e lápis, planificações articuladas, sólidos em acrílico e um vídeo gerado no *software GeoGebra*).

A intervenção pedagógica foi realizada na própria prática da pesquisadora, primeira autora deste artigo, e a partir dos resultados emergiram duas categorias de análise intituladas de Dificuldades e Descobertas, ambas atreladas às habilidades de Geometria 3D envolvidas em atividades vivenciadas pelos discentes, evidenciando a necessidade de mais implementações voltadas para a exploração do raciocínio visual no currículo de matemática. No entanto, este artigo ater-se-á somente à categoria Dificuldades<sup>1</sup>, pois defendemos que a aprendizagem deve ser potencializada mediante um ensino que se preocupe em superar as dificuldades encontradas pelos estudantes. Elas também podem ser vistas como oportunidades para o docente redimensionar sua prática.

## A GEOMETRIA, SEU ENSINO E A HABILIDADE DE VISUALIZAÇÃO

Grande parte dos estudantes possuem dificuldades em perceber a Matemática como uma ciência organizada (LELLIS; IMENES, 2001). Neste sentido, a aquisição do conhecimento matemático está relacionada ao saber pensar matematicamente (OLIVEIRA; VELASCO, 2007). Bastos (1999) afirma que por meio da Geometria é possível interpretar, entender e intervir no espaço em que vivemos, inclusive visualizar e representar objetos assim como manipular essas representações e criar novos objetos.

No contexto educacional, a forma pela qual os conceitos geométricos são explorados e desenvolvidos implicam no desenvolvimento de uma aversão pela Geometria (MISKULIN, 1994). A Geometria é praticamente excluída do currículo escolar ou em alguns casos restritos é desenvolvida de uma forma muito mais formal e, por isso, devemos ressaltar seu papel no aprendizado matemático, o que não significa minimizar o da Álgebra (PAVANELLO, 2004).

Dessa forma, devemos estimular e desenvolver tanto o pensamento visual, dominante na Geometria, quanto o sequencial, preponderante na Álgebra, pois ambos são essenciais à Educação Matemática. Priorizar apenas a Álgebra na pesquisa e no ensino de Matemática implicou no desenvolvimento de apenas um tipo de pensamento. Portanto, é necessário dar importância ao ensino de Geometria como forma de restabelecer o equilíbrio assim como desenvolver o pensamento geométrico nas aulas de Matemática.

As aulas de Geometria ainda dão prioridade ao espaço plano, utilizando as figuras planas e os polígonos mais conhecidos, sendo que outros tipos de formas estão presentes em nosso

<sup>1</sup> Veja a análise da categoria Descobertas em Settimy e Bairral (2019).

cotidiano (BAIRRAL, 2009). Sobre o ensino de Geometria Espacial, em particular, Rogenski e Pedroso (2009, p. 5) afirmam que

[...] os alunos têm amplas dificuldades, primeiramente com relação à visualização e representação, pois reconhecem poucos conceitos da geometria básica e, por conseguinte da geometria espacial. Também apresentam problemas de percepção das relações existentes entre os objetos de identificação das propriedades das figuras que formam os sólidos, dentre outros conceitos.

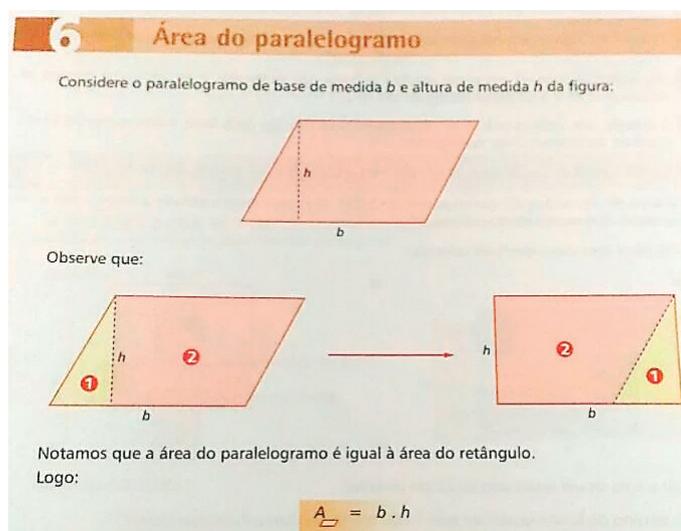
Veloso (1998) defende que visualizar é mais do que ver um objeto e que este processo envolve a cognição. Em Matemática, a visualização é um tipo de atividade baseada no uso de elementos visuais ou espaciais, seja mental ou físico, realizado para resolver problemas ou provar propriedades (GUTIÉRREZ, 1996).

Kaleff (1998) considera a visualização como um processo importante em Geometria e que precisa ser desenvolvido. No entanto, visualizar não é simples e é uma habilidade de caráter individualizado, pois envolve muitos aspectos, como interpretar e fazer desenhos, formar imagens mentais e visualizar movimentos e mudanças de formas (LEMOS; BAIRRAL, 2010). Zimmermann e Cunningham (1991) a consideram como o processo de formação de imagens (mentalmente, com lápis e papel, ou com a ajuda da tecnologia), utilizando essas imagens para descoberta e compreensão matemática.

## DIFICULDADES E HABILIDADES RELACIONADAS À VISUALIZAÇÃO

Arcavi (2003) propõe três categorias de dificuldades a respeito da visualização: cultural, sociológica e cognitiva. A dificuldade cultural se refere às crenças e valores que sobre o que significariam a matemática e o seu fazer, o que é legítimo ou aceitável e o que não é. Como exemplo, temos as demonstrações visuais (Figura 1), as quais são rejeitadas pela comunidade matemática e seus principais representantes. Crenças desta natureza provavelmente permearão a sala de aula por meio de materiais curriculares, formação de professores, etc. Como consequência, há dificuldades para a incorporação e a valorização da visualização nas aulas de matemática.

**Figura 1** - Exemplo de demonstração visual.



Fonte: Silveira; Marques (2007, p. 320).

As dificuldades sociológicas definidas por Arcavi (2003) podem ser associadas à frase “visual é difícil de ensinar”, isto é, muitos professores podem sentir que as representações analíticas, que são de natureza sequencial, parecem ser mais pedagogicamente apropriadas e eficientes no ensino. Segundo o autor, quando o conhecimento é adaptado do seu caráter científico-acadêmico ao conhecimento curricular ocorre uma perda de ricas interconexões, decorrente de um processo que lineariza, compartimentaliza e, possivelmente, também algoritmiza o conhecimento.

Conforme destacou Arcavi (2003), outro tipo de dificuldade de caráter sociológico é a tendência de que as escolas, geralmente, ensinam matemática a estudantes de diferentes origens culturais. Alguns possivelmente são provenientes de culturas visualmente ricas (grafiteiros, indígenas, serigrafistas, etc.) que apresentam maior familiaridade com a visualização. No entanto, a prática escolar em Geometria desperdiça essa oportunidade.

Embora as dificuldades culturais e sociológicas sejam relevantes no contexto do ensino de Geometria, Arcavi (2003) deu ênfase às dificuldades cognitivas, associadas à frase “visual é mais fácil ou mais difícil?”. Quando lidamos com imagens conceitualmente ricas, maior é a demanda da habilidade de visualização, gerando desconforto e insegurança nos alunos em relação aos procedimentos adotados para a representação. Um exemplo de dificuldade cognitiva é quando o sujeito visualiza um cubo e seus elementos (vértices, faces, arestas, diagonais, etc.), mas apresenta erros para representar suas seções planas (cortes) (SETTIMY, 2014).

Com o intuito de minimizar as dificuldades cognitivas, seria interessante inicialmente identificar as habilidades relacionadas à visualização e aprimorá-las por meio do delineamento de estratégias. Bishop<sup>2</sup> *apud* Costa (2002) identificou duas habilidades na visualização: a capacidade de interpretar informação figural (IFI) e a capacidade de processamento visual de figuras (VP). IFI está relacionada com o conhecimento do “vocabulário geométrico” e capacidade de ler e interpretar imagens visuais com finalidade de obter informações relevantes que possam ajudar na resolução de uma atividade. VP é a habilidade de manipular e transformar imagens mentais e compreende também a visualização a partir de relações abstratas e de informação não figural.

Pittalis e Christou (2010), também preocupados com a visualização, propuseram um modelo<sup>3</sup> que abrange cinco tipos de raciocínio no intuito de descrever as habilidades dos estudantes em Geometria 3D, sendo eles: manipular diferentes modos de representação de objetos 3D, reconhecer e construir planificações, estruturar matrizes 3D de cubos, reconhecer as propriedades das formas 3D e comparar as formas 3D e calcular o volume e a área de sólidos. O Quadro 1 descreve detalhadamente cada tipo de raciocínio, que, na visão dos autores, refere-se a um conjunto de processos e habilidades que atuam como uma ferramenta viável na resolução de problemas e permitem ir além das informações fornecidas nos objetos.

### Quadro 1 - Cinco tipos de raciocínios em Geometria 3D.

<p><b>Manipular diferentes modos de representação de objetos 3D</b></p>	<p>As representações planas são as mais utilizadas para representar objetos 2D na matemática escolar, no entanto os estudantes apresentam grandes dificuldades em desenhar objetos 3D, principalmente porque não se trata de algo trivial e que não é ensinado na escola. Como consequência, os alunos podem interpretar mal um desenho e não entender se ele representa um objeto 2D ou 3D.</p>
---	--

2 BISHOP, A. Review of research on visualization in mathematics education. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(1), 7-15, 1989.

3 Na descrição deste modelo, os autores utilizaram os termos 2D e 3D para se referirem aos objetos bidimensionais e tridimensionais, respectivamente.

<b>Reconhecer e construir planificações</b>	A construção de uma rede pressupõe a coordenação entre a representação mental do objeto como um todo e a decomposição de suas partes componentes. Exige a capacidade dos alunos para fazer traduções de objetos 3D para planificações 2D, focalizando as partes componentes dos objetos em ambos os modos de representação.
<b>Estruturar matrizes 3D de cubos</b>	Significa identificar quantos cubos de menor aresta cabem no cubo maior. O desenvolvimento desta habilidade não é simples, pois exige que os alunos estabeleçam um modelo mental que forneça diferentes visões da estrutura.
<b>Reconhecer as propriedades das formas 3D e comparar as formas 3D</b>	Mesmo que qualquer tipo de poliedro seja composto pelas mesmas partes, seu tamanho, número e forma definem as particularidades de cada poliedro. É entender como os elementos do sólido estão inter-relacionados e que esta compreensão pode se referir ao mesmo objeto ou entre objetos diferentes. Os alunos devem entender que cada objeto 3D tem uma série de propriedades geométricas invariantes e variantes com base nas propriedades das partes componentes isoladas e suas próprias propriedades como uma estrutura unificada.
<b>Calcular o volume e a área de sólidos</b>	O pensamento de geometria tridimensional está intimamente ligado à capacidade dos estudantes de calcular o volume e a área de superfície de um sólido. Os alunos tendem a se concentrar principalmente nas fórmulas e nas operações numéricas necessárias para calcular o volume ou a superfície de um sólido e ignorar completamente a estrutura das medidas da unidade.

Fonte: Elaboração da autora a partir de Pittalis; Christou (2010).

## VISUALIZANDO A METODOLOGIA

O trabalho de campo foi estruturado a partir dos seguintes procedimentos: elaboração, seleção e organização de tarefas, implementação e análise dos dados. As atividades selecionadas foram as que mais se adequavam à proposta da pesquisa e do conteúdo a ser trabalhado em sala de aula. Posteriormente, foram observadas quais as habilidades de Geometria 3D, descritas por Pittalis e Christou (2010), estavam envolvidas em cada uma das atividades. A produção de dados envolveu a observação durante as implementações, de respostas dadas em uma atividade preliminar denominada Ficha de Questões 1 (Figura 2) e em três fichas avaliativas, registros fotográficos e notas de campo.

**Figura 2 - Ficha de Questões 1**

<p>Nome: _____</p> <p style="text-align: center;"><b>Ficha de questões 1</b></p> <p><b>Questão 1:</b> Escreva o que você entende por forma geométrica espacial e dê exemplo com um desenho.</p> <p><b>Questão 2:</b> Desenhe um objeto que, na sua opinião, não seja uma figura geométrica espacial.</p> <p><b>Questão 3:</b> Escreva o que você entende por poliedro e dê exemplo com um desenho.</p> <p><b>Questão 4:</b> Desenhe um objeto que, na sua opinião, não seja um poliedro.</p>
--

Fonte: Elaboração da autora.

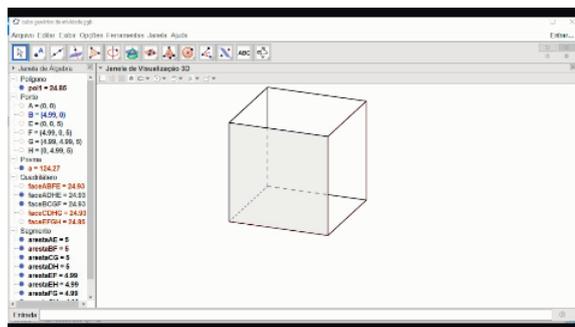
As implementações foram desenvolvidas durante o ano letivo de 2017 em uma turma de 6<sup>o</sup> ano do Ensino Fundamental da Escola Municipal Cacique Cunhãbebe, localizada no município de Angra dos Reis (RJ). A autora deste artigo era a professora da turma, que tinha 24 alunos<sup>4</sup> na faixa etária entre 11 e 14 anos. Foram ao todo 10 aulas com 45 minutos cada, totalizando cinco encontros.

<sup>4</sup> Os alunos assinaram o termo de consentimento livre e esclarecido. A pesquisa integra o projeto *Materiais Curriculares Educativos Online (MCEO) para a Matemática na Educação Básica*, coordenado pelo segundo autor, e aprovado pelo Comitê de Ética na pesquisa com o protocolo número 459/2013.

O conteúdo de Geometria Espacial foi trabalhado a partir do livro didático adotado pela escola. A estruturação do trabalho de campo se deu a partir de 19 atividades<sup>5</sup> selecionadas do livro, a atividade de vistas da casa adaptada de Gorgorió *et al.* (2000) e uma situação sobre as vistas (frontal, lateral e superior) das figuras espaciais elaborada pela autora.

Desde o primeiro dia de implementação, a ideia era fazer com que os estudantes relacionassem as figuras geométricas espaciais estudadas com objetos encontrados em seu cotidiano. Os estudantes puderam utilizar livremente os materiais disponíveis como recurso (papel e lápis, planificações articuladas e sólidos em acrílico) em todas as atividades, com exceção da atividade realizada no auditório da escola, pois a ideia era focar apenas na utilização da TV. Esta atividade realizada no auditório da escola foi o último dia de implementação e teve como proposta a utilização do *GeoGebra* feita de forma expositiva por meio da reprodução de um vídeo<sup>6</sup> na *Smart TV*, gerado a partir da gravação da tela (Figura 3) do *software*. O objetivo era revisar a atividade das vistas das figuras espaciais, realizada anteriormente com papel e lápis em sala de aula.

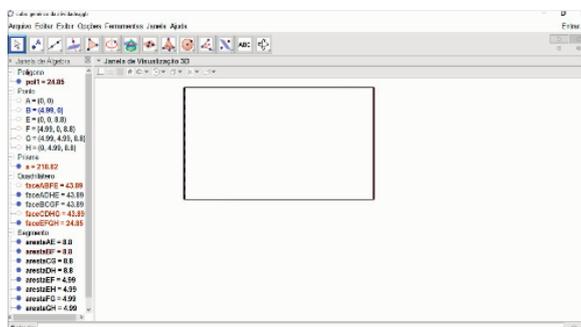
**Figura 3** - Tela do vídeo transmitido pela TV



Fonte: Elaboração da autora.

Durante a exibição do vídeo, os objetos foram posicionados conforme cada uma de suas vistas. No caso do paralelepípedo, por exemplo, temos que sua vista lateral será um retângulo (Figura 4).

**Figura 4** - Vista lateral do paralelepípedo



Fonte: Elaboração da autora.

5 As atividades foram nomeadas conforme sua respectiva numeração no livro didático.

6 O vídeo foi produzido pela professora da turma, primeira autora desse artigo. Para assisti-lo, basta acessar <https://youtu.be/wNffZl8TEr0>.

Por se tratar de uma intervenção pedagógica (DAMIANI *et al.*, 2013) desenvolvida em sala de aula, tendo como docente a própria pesquisadora, conta com a interação constante entre todos os sujeitos (alunos e professora). Uma intervenção pedagógica também envolve a elaboração e implementação de atividades, visando o aprendizado e o desenvolvimento cognitivo de todos os sujeitos implicados, necessitando de que o pesquisador tenha criatividade e saiba dialogar com a teoria para compreender a realidade e para a implementação da intervenção (DAMIANI *et al.* 2013).

Segundo Damiani *et al.* (2013, p. 1), a intervenção pedagógica

[...] envolve o planejamento e a implementação de interferências (mudanças, inovações pedagógicas) - destinadas a produzir avanços, melhorias, nos processos de aprendizagem dos sujeitos que delas participam - e a posterior avaliação dos efeitos dessas interferências.

Os objetivos das atividades realizadas na intervenção pedagógica juntamente com as habilidades de Geometria 3D envolvidas, de acordo com Pittalis e Christou (2010), foram organizados em um quadro disponibilizado como documento suplementar deste artigo.

Ao final de cada encontro, os registros escritos dos estudantes eram recolhidos. A análise dos dados foi feita a partir destes registros e ocorreu no transcorrer das intervenções, evidenciando o desenvolvimento mais global do processo de visualização. Não houve a pretensão de uma análise continuada e detalhada em aspectos específicos, por exemplo, a evolução de determinado conceito ou de um procedimento de representação.

A utilização das planificações articuladas e dos sólidos em acrílico era sempre incentivada e o estudante tinha a liberdade de escolher conforme sua preferência. A seleção pelo material era do próprio aluno. Pela dinâmica da aula nem sempre era possível acompanhar o trabalho pormenorizado de um estudante ou grupo. Não estabelecemos comparativo de respostas. As atividades objetivavam o desenvolvimento da visualização utilizando um ou mais materiais como suporte à aprendizagem geométrica.

## A CATEGORIA DIFICULDADES

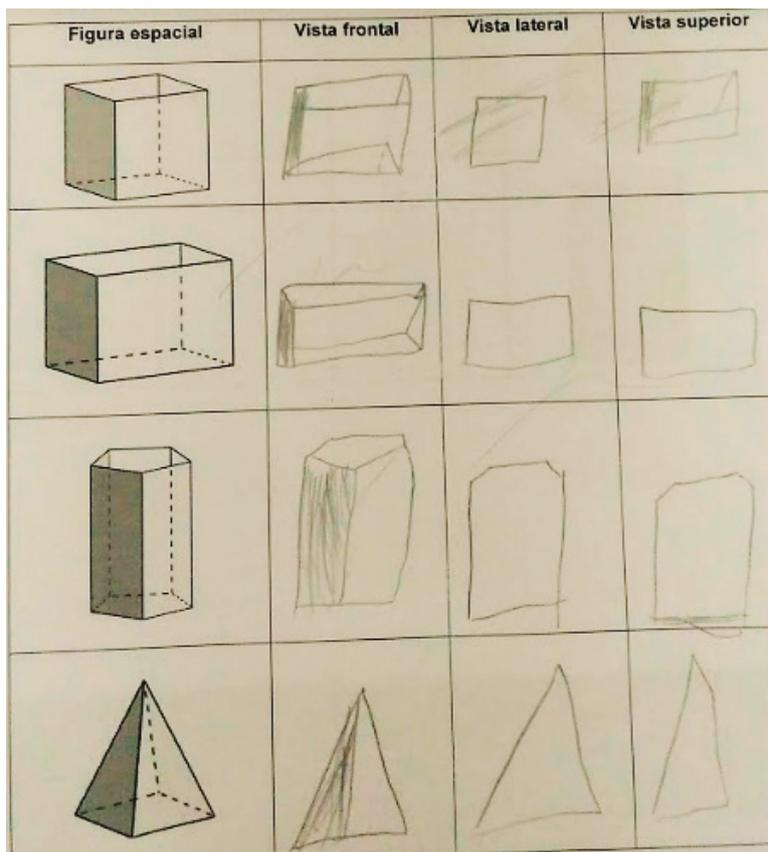
A categoria Dificuldades emergiu a partir da análise dos dados e se refere às dúvidas dos estudantes em relação às atividades realizadas por eles. Foram também observados aspectos em torno das dificuldades associadas às habilidades de Geometria 3D envolvidas nas implementações (PITTALIS; CHRISTOU, 2010). Esta categoria implicou no surgimento de quatro subcategorias<sup>7</sup>: Reconhecer e Representar Figuras Geométricas Planas e Espaciais; Identificar e Comparar o Tamanho das Faces; Escrever Ideias e/ou Conceitos Matemáticos e Representar Vistas.

A subcategoria Reconhecer e Representar Figuras Geométricas Planas e Espaciais estava relacionada às dificuldades em torno da identificação e representação de figuras geométricas planas e espaciais. Identificar e Comparar o Tamanho das Faces estava relacionada às dúvidas dos discentes para distinguir o tamanho das faces de objetos tridimensionais e compará-las. Escrever Ideias e/ou Conceitos Matemáticos englobava a dificuldade dos discentes em expressar por meio da escrita suas ideias sobre conceitos matemáticos. Representar Vistas tratava das dificuldades na representação de vistas de figuras geométricas espaciais como consequência de os objetos não serem movimentados mentalmente e pela dificuldade em visualizar suas partes não visíveis.

<sup>7</sup> Com o intuito dar destaque às subcategorias ao longo do texto, foram utilizadas letras maiúsculas no início de cada palavra.

Estas subcategorias não eram excludentes. A análise considerou o elemento de maior destaque. Por exemplo, na atividade que envolvia a representação de vistas de figuras espaciais (Figura 5), as respostas dos alunos evidenciavam mais a dificuldade em representar vistas, embora também fossem observadas dúvidas para representar figuras planas.

**Figura 5** - Exemplo de resposta de um aluno considerando o elemento mais evidente na análise da categoria Dificuldades



Fonte: Dados de pesquisa.

O Quadro 2 apresenta de forma sintetizada a descrição desta categoria e de suas respectivas subcategorias.

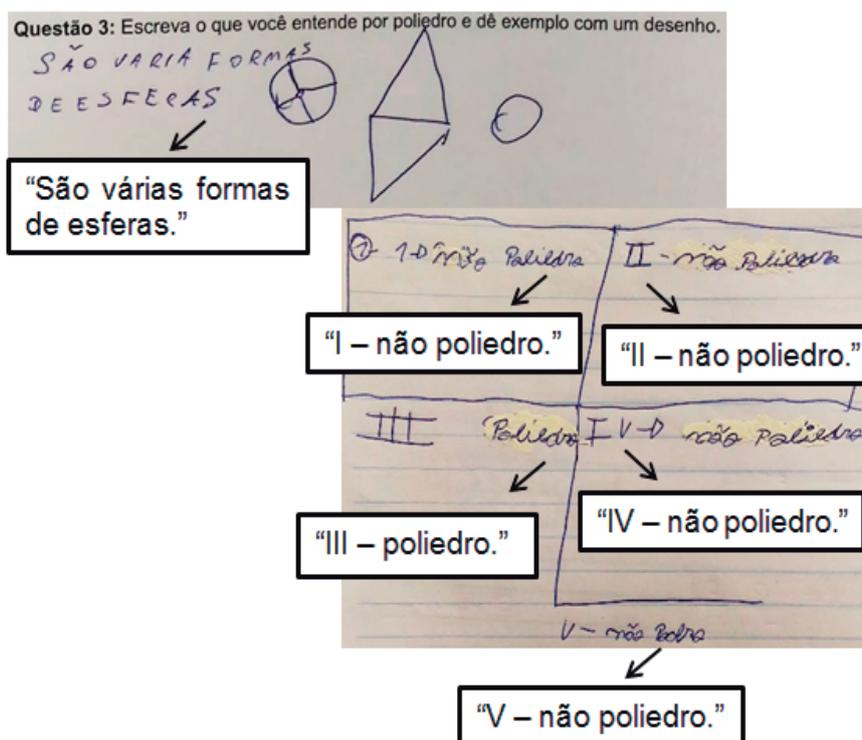
**Quadro 2** - Categoria Dificuldades, sua descrição e subcategorias

<b>Categoria</b>	<b>Descrição</b>	<b>Subcategorias</b>
Dificuldades	Dúvidas encontradas pelos estudantes durante a realização das atividades.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Reconhecer e Representar Figuras Geométricas Planas e Espaciais.</li> <li>• Identificar e Comparar o Tamanho das Faces de Objetos Tridimensionais.</li> <li>• Escrever Ideias e/ou Conceitos Matemáticos.</li> <li>• Representar Vistas.</li> <li>• Movimentar Objetos mentalmente.</li> <li>• Visualizar Partes Não Visíveis de Figuras.</li> </ul>

Fonte: Elaboração da autora.

A subcategoria Reconhecer e Representar Figuras Geométricas Planas e Espaciais se relacionava às dificuldades para identificar e representar estes dois tipos de figuras. Tais dificuldades foram encontradas na Atividade 1, cujo intuito era associar poliedros e não poliedros a objetos do cotidiano. Apenas o aluno B<sup>8</sup> e o aluno C não responderam corretamente. O aluno B definiu poliedro como “várias formas de esfera” e classificou apenas uma embalagem de forma incorreta (Figura 6).

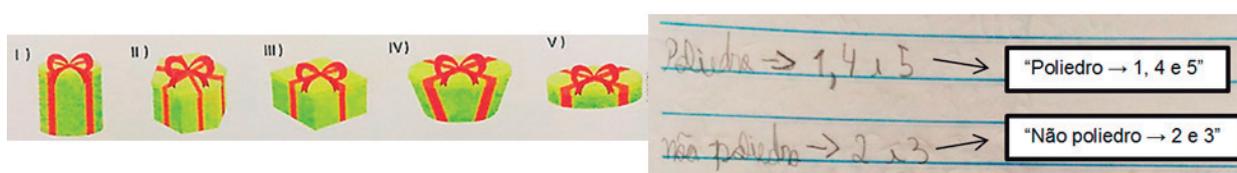
**Figura 6** - Exemplo de Reconhecer e Representar Figuras Geométricas Planas e Espaciais do aluno B



Fonte: Dados de pesquisa.

O aluno C possivelmente se equivocou com a nomenclatura (Figura 7), ou seja, considerou que poliedro era não poliedro e vice-versa. De uma maneira geral, os estudantes não apresentaram dificuldades para distinguir os poliedros dos não poliedros, o que mostrou certo domínio das habilidades de reconhecer as propriedades e comparar as formas 3D (PITTALIS; CHRISTOU, 2010).

**Figura 7** - Exemplo de Reconhecer e Representar Figuras Geométricas Planas e Espaciais do aluno C

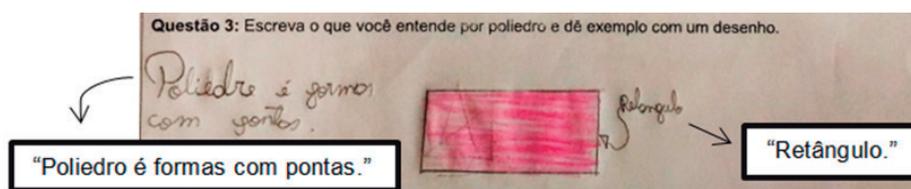


Fonte: Elaboração da autora.

<sup>8</sup> Para preservar o anonimato dos estudantes, seus nomes foram substituídos por letras.

Na questão 3 da Ficha de Questões 1, a aluna D apresentou dificuldades para distinguir e representar figuras geométricas planas e espaciais. Ela definiu poliedro como “formas com pontas” (provavelmente se referindo aos vértices), mas utilizou o retângulo como exemplo com o desenho de um retângulo.

**Figura 8** - Exemplo de Reconhecer e Representar Figuras Geométricas Planas e Espaciais da aluna D

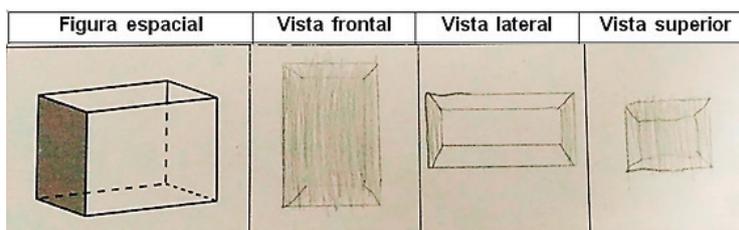


Fonte: Dados de pesquisa.

Identificar e Comparar o Tamanho das Faces estava relacionada à dificuldade dos alunos no que diz respeito à identificação e comparação do tamanho das faces de objetos tridimensionais.

Na Atividade Vista das Figuras Espaciais foi observada a dificuldade em perceber que o paralelepípedo ilustrado possuía duas faces quadradas e quatro faces retangulares. Nesta atividade, os estudantes foram orientados a considerar a face mais escura como sendo a parte frontal do sólido. Ao invés de utilizar um quadrado para representar a vista frontal, a aluna E desenhou um “paralelepípedo com fundo”, cuja face da frente foi pintada. Na vista lateral, ela pintou as duas faces quadradas e na vista superior foi possível inferir que ela desenhou o paralelepípedo visto de cima, mas assim como na vista frontal ela desenhou a vista com uma espécie de “fundo” ao invés de um retângulo. Assim como seus colegas, também considerou que a vista consistia em pintar a(s) face(s) do sólido.

**Figura 9** - Exemplo de Identificar e Comparar o Tamanho das Faces da aluna E



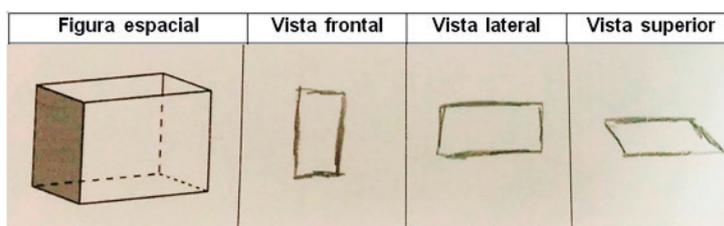
Fonte: Dados de pesquisa.

Diferentemente dos demais, o aluno F considerou as vistas como figuras planas, mas também teve dificuldades parecidas com as da aluna E no que diz respeito às dimensões das faces do paralelepípedo. Nas respostas apresentadas, as vistas frontal e lateral foram representadas com um retângulo, mas somente a segunda vista estava correta (Figura 10).

As vistas frontal e superior foram representadas por um retângulo e um paralelogramo, respectivamente. Provavelmente elas foram desenhadas de acordo com a figura estática do paralelepípedo da atividade, sem considerar que o referido sólido deveria ser movimentado mentalmente ou com o

auxílio dos materiais disponíveis em sala de aula. Há a possibilidade de o sujeito não diferenciar adequadamente a relação entre elementos de objetos espaciais sem o auxílio de materiais concretos, isto é, a tendência de haver equívocos é maior ao não utilizar tais materiais e depender exclusivamente de sua habilidade de visualização (SUSILAWATI; SURYADI; DAHLAN, 2017).

**Figura 10** - Exemplo de Identificar e Comparar o Tamanho das Faces o aluno F



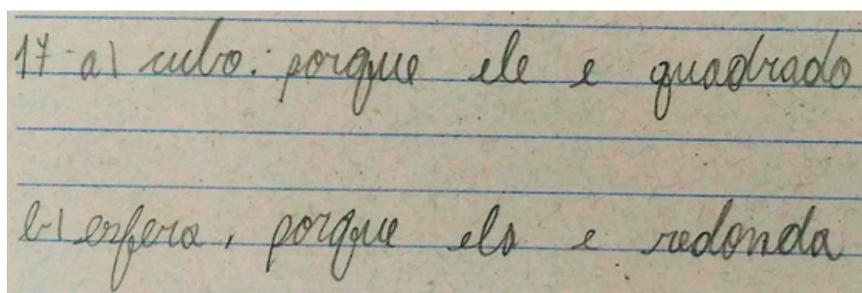
Fonte: Dados de pesquisa.

A subcategoria Escrever Ideias e/ou Conceitos Matemáticos apresentava as dificuldades dos alunos para expressar suas ideias em relação a determinados conceitos por meio da escrita.

A Atividade 17 tinha ilustrações do cilindro, do cone, do cubo e da esfera. Seu objetivo era identificar, respectivamente, o sólido que não iria rolar ao ser colocado em uma rampa e o que iria rolar, independentemente da posição em ambos os casos. O cubo era a resposta para o primeiro caso e a esfera para o segundo.

Considerando os alunos que responderam corretamente, quatro deles utilizaram justificativas similares, escrevendo que o cubo era quadrado (ou não era redondo) e a esfera era redonda. Na Figura 11 está ilustrada o caso do aluno G. Mesmo apresentando dificuldades em se expressar por meio da escrita, ao escreverem que o cubo “é quadrado” foi possível inferir que os discentes identificaram uma importante característica do poliedro: toda a sua superfície é formada por faces planas. No caso da esfera, ela “é redonda” pois não possui faces planas.

**Figura 11** - Exemplo de Escrever Ideias e/ou Conceitos Matemáticos do aluno G



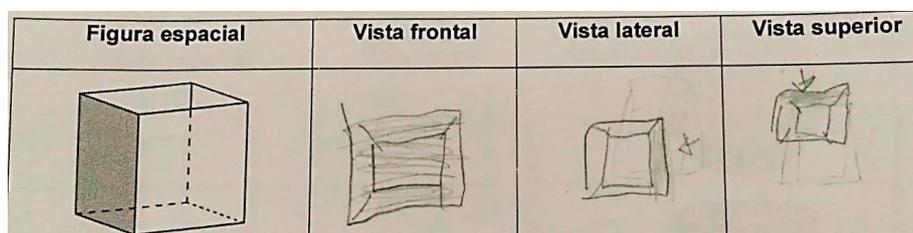
“a) cubo: porque ele é quadrado  
b) esfera, porque ela é redonda”

Fonte: Dados de pesquisa.

Representar Vistas era a subcategoria que tinha como intuito analisar aspectos relacionados às dificuldades de representação das vistas de objetos. Essa subcategoria esteve evidente na atividade Vista das Figuras Espaciais, em que os estudantes deveriam representar as vistas frontal, lateral e superior de cada figura espacial que foi estudada: cubo, paralelepípedo, prisma de base pentagonal, pirâmide de base quadrada, cone, esfera e cilindro. Nas ilustrações da atividade, a parte pintada estava representando o que deveria ser considerada como a frente do objeto.

No caso do cubo, o aluno H (Figura 12) desenhou a figura do sólido e pintou a face de acordo com a vista correspondente, indicando também com uma seta. Por meio do desenho de sua vista frontal foi possível observar o “fundo” do cubo, indicando a percepção do aluno em relação a sua profundidade. Também foi possível inferir que ele considerou as vistas como faces que compõem uma figura tridimensional.

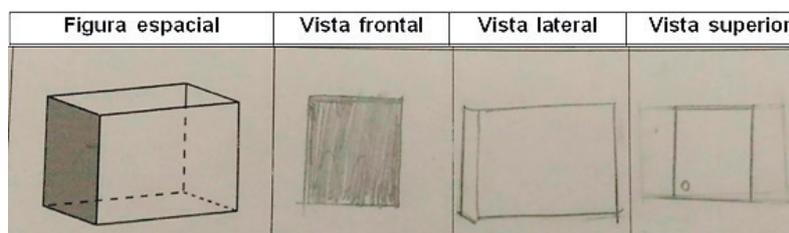
**Figura 12** - Exemplo de Representar Vistas do aluno H



Fonte: Dados de pesquisa.

A aluna D, uma das discentes que demonstrava mais facilidade para realizar as atividades, pintou a face frontal do paralelepípedo e, na vista lateral, seu desenho (Figura 13) remete às duas faces desse objeto. Sua vista superior foi representada por um quadrado com um pequeno círculo no canto inferior esquerdo. É possível inferir que ela utilizou o sólido em acrílico para auxiliá-la, pois este material tem uma pequena tampa que pode ser removida para inserir água. No entanto, a aluna não percebeu que deveria considerar a frente do paralelepípedo de acrílico como sendo a que constava na figura da atividade, o que justifica o desenho de um quadrado ao invés de um retângulo.

**Figura 13** - Exemplo de Representar Vistas da aluna D

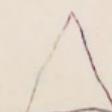
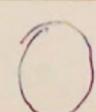
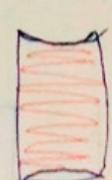
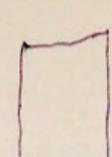
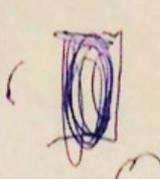


Fonte: Dados de pesquisa.

Os três últimos sólidos da atividade correspondiam aos não poliedros. Na Figura 14, o aluno I representou corretamente as vistas do cone, desenhando na vista superior um pequeno “x” possivelmente

para indicar a existência do vértice. As vistas da esfera também foram representadas de forma correta. As vistas do cilindro apresentaram elementos interessantes, pois o discente não considerou que existisse uma “base arredondada” nas duas primeiras vistas e corrigiu corretamente a vista superior, assim como fez com a do cone.

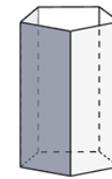
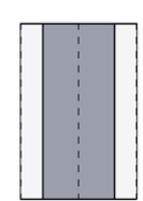
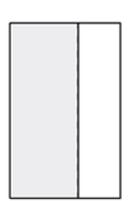
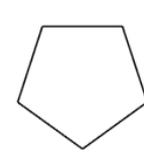
**Figura 14** - Exemplo de Representar Vistas do aluno I

Figura espacial	Vista frontal	Vista lateral	Vista superior
			
			
			

Fonte: Dados de pesquisa.

Nesta mesma atividade, o prisma de base pentagonal provavelmente foi a figura espacial mais complexa de se representar as vistas, pois sua base é um pentágono. Como este polígono não possui arestas paralelas, isto implica nas vistas frontal e lateral (Figura 15) serem representadas por mais de um retângulo. Desse caso surgiram dificuldades de desenhar as vistas pois era necessário movimentar o objeto mentalmente.

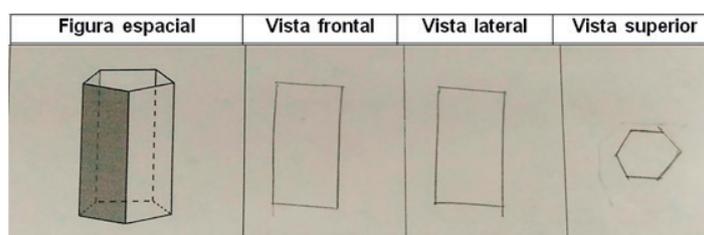
**Figura 15** - Vistas do prisma de base pentagonal

Figura espacial	Vista frontal	Vista lateral	Vista superior
			

Fonte: Elaboração da autora.

Alguns alunos consideraram que as vistas frontal e lateral desse prisma eram formadas por apenas um retângulo (Figura 16). Dentre eles, a aluna D representou a vista superior com um hexágono, o que indica que ela provavelmente fez a contagem errada das arestas. É preciso ter cautela pois, segundo Veloso (1998), a visão pode nos trair e nos levar a ver objetos que não existem.

**Figura 16** - Exemplo de Representar Vistas da aluna D

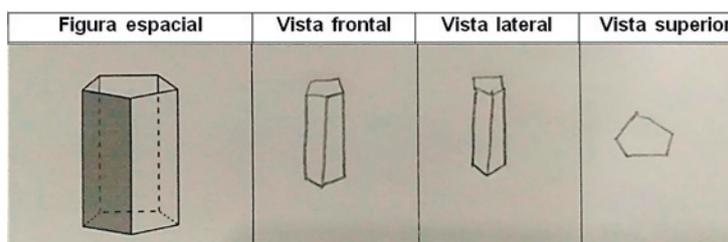


Fonte: Dados de pesquisa.

Assim como ocorreu com outros estudantes em casos envolvendo outros poliedros e não poliedros, o aluno J (Figura 17) desenhou as vistas de acordo com a ilustração do sólido que constava na atividade. Neste sentido, Kaleff (2016, p. 24) afirma que

[...] a maior parte dos estudantes [...] não admite que ao observarem o desenho de uma figura geométrica no livro-texto ou no quadro negro estão, na realidade, vendo apenas uma representação do objeto geométrico, que é um conceito abstrato.

**Figura 17** - Exemplo 8 de Representar Vistas do aluno J



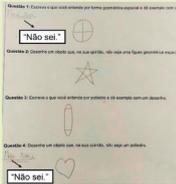
Fonte: Dados de pesquisa.

Acreditamos que a ideia da autora citada anteriormente também se estende às atividades feitas no papel, particularmente na Atividade Vistas das figuras espaciais. Nela, as imagens ilustradas são estáticas e representam, portanto, objetos geométricos que não são possíveis de movimentar sob vários ângulos. As respostas dos estudantes elucidam a conexão entre a visualização e a representação. O material concreto possibilita observar de forma efetiva o objeto e não somente a sua imagem mental por meio da imaginação (KALEFF, 2016).

Neste tipo de prática, é necessário que os materiais manipuláveis sejam utilizados durante todo o processo de escolarização a fim de que o aluno construa de forma contínua uma “memória” de imagens que serão suporte para situações mais complexas que envolvam visualização (VELOSO, 1998). As respostas dos discentes sugerem que deve haver um incentivo para utilizar os materiais concretos em sala

de aula com a intenção de diminuir as dificuldades em torno da visualização e representação das vistas de objetos tridimensionais. A Figura 18 ilustra a trajetória da aluna K, que participou de todas as atividades realizadas ao longo da intervenção. Inicialmente, a discente não apresentava conhecimentos prévios sobre figura geométrica espacial, poliedro e não poliedro, mas no decorrer da investigação houve um aprimoramento conceitual da estudante, que passou a considerar poliedro como “tudo o que tem ponta” e não poliedro como “tudo que é redondo”. Sua resposta trouxe elementos indicativos de avanços no que diz respeito ao entendimento destes dois conceitos. A intenção não era exigir rigor matemático nas respostas, mas sim analisar as maneiras de conceituar (SETTIMY; BAIRRAL, 2019) dos sujeitos. Além disso, sua trajetória também evidenciou dificuldades para visualizar e representar vistas de partes do sólido que não estavam visíveis na ilustração e que, portanto, exigiam que o objeto fosse movimentado mentalmente.

**Figura 18 -** Trajetória da aluna K



Questão 1: Desenhe um quadrado e um círculo. Não sei.

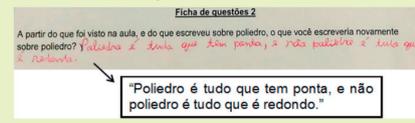
Questão 2: Desenhe um triângulo e um círculo. Não sei.

Questão 3: Desenhe um círculo e um polígono. Não sei.

Questão 4: Desenhe um círculo e um polígono. Não sei.

A aluna não possuía conhecimentos prévios sobre figura geométrica espacial, poliedro e não poliedro.

---



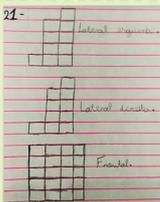
Ficha de questões 2

A partir do que foi visto na aula, e do que escreveu sobre poliedro, o que você escreveria novamente sobre poliedro? Poliedro é tudo que tem ponta, e não poliedro é tudo que é redondo.

Demonstrou aprimoramento conceitual.

---

Apresentou dificuldade em visualizar partes não visíveis de um objeto, com o intuito de representar suas vistas.



---

1) Escreva o que você achou do uso dos materiais (Livro didático, lápis e papel, planificações, sólidos em acrílico e TV) para estudar poliedros e não poliedros.

Achei bem legal eu gosto de ler então eu amei e gostei porque nunca ouvi falar desse negócio então é novo.

2) Teve algum material que você gostou mais? Por quê?

As planificações. Porque dava para entender melhor com elas.

Refletiu sobre seu aprendizado, destacando que as planificações articuladas possibilitaram um melhor entendimento dos conceitos.

---

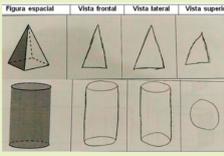


Figura espacial | Vista frontal | Vista lateral | Vista superior

Acertou a maioria das vistas, mas ainda apresentou dificuldades para representar algumas, visto que era preciso movimentar mentalmente os sólidos.

Fonte: Dados de pesquisa.

191

Os demais estudantes que participaram da intervenção tiveram dificuldades muito parecidas com as apresentadas pela aluna K. Todos os aprendizes foram submetidos a atividades que tinham justamente o objetivo de trabalhar o pensamento geométrico, em particular a visualização. Era natural que dificuldades fossem ocorrer ao longo das implementações, principalmente porque os discentes não estavam familiarizados com atividades desta natureza. O pensamento visual deve ser encarado como um processo não linear que precisa ser desenvolvido e estimulado em sala de aula de forma contínua e em todos os anos escolares.

## **ALGUMAS CONSIDERAÇÕES**

Esperamos que este artigo instigue a pensar em novas formas de ensinar a partir da reflexão a respeito da relevância da visualização em Geometria, e conduza o leitor a uma abordagem de Geometria Espacial que não se restrinja apenas ao cálculo de áreas e volumes.

A visualização se caracteriza como um processo de formação de imagens que transita entre as representações 2D e 3D, sem haver prioridade entre uma delas. A formação de imagens mentais contribui para a compreensão matemática e não requer necessariamente a presença física do objeto em questão. Em outras palavras, não é preciso que o objeto esteja ao alcance de nossa visão para ser visualizado.

Tendo em vista que vivemos em uma sociedade na qual os aspectos visuais predominam, “aprender a ver” se torna necessário. Este aprendizado é apenas possível mediante experiências contínuas seguidas de reflexão (VELOSO, 1998). A pesquisa possibilitou que os estudantes tivessem contato com diversos recursos didáticos, contribuindo para o aprendizado geométrico e um contato caloroso com a Matemática, em particular a Geometria.

A investigação destacou a importância do desenvolvimento da visualização em Geometria e a implementação de atividades com recursos variados ampliou as possibilidades de explorar os conceitos trabalhados, considerando a pluralidade da sala de aula. Ao ter uma variedade de recursos disponíveis obtemos diferentes contribuições ao aprendizado. É importante que o professor compreenda que esses recursos podem servir como apoio pedagógico e lhe proporcionar novos conhecimentos, permitindo-lhe também avaliar e refletir sobre sua própria prática.

A utilização de recursos variados nas aulas de Matemática pode tornar a disciplina mais atraente e contribuir para o aumento da motivação discente. A pesquisa não teve como foco um material em particular e possibilitou que o aluno explorasse as potencialidades de cada um, utilizando-os de acordo com sua preferência. De acordo com os discentes, os materiais possibilitaram um aprendizado em Geometria mais prazeroso, voltado para a movimentação e exploração das formas, possibilitando visualizá-las por meio dos materiais manipuláveis como também do vídeo gerado a partir do *GeoGebra*.

Quando o pensamento visual é pouco desenvolvido maiores as dificuldades para realizar uma atividade. É necessário um trabalho contínuo que vise explorá-lo em todos os anos de escolaridade e com recursos de tamanhos (pequenos, médios, grandes) variados. Além disso, a análise possibilitou identificar quatro Dificuldades relacionadas à visualização: Reconhecer e Representar Figuras Geométricas Planas e Espaciais; Identificar e Comparar o Tamanho das Faces; Escrever Ideias e/ou Conceitos Matemáticos e Representar Vistas. Conforme defende Veloso (1998), a visualização deve estabelecer conexão com a representação. Dessa forma, para diminuir dificuldades em representar é preciso criar estímulos visando aprimorar a habilidade de visualizar, tanto para distinguir objetos bidimensionais de tridimensionais quanto para representá-los. Também é necessário realizar mais

atividades em que o aluno se fixar um referencial de modo a fazer a associação correta da representação ou de uma vista.

Além disso, foi observado uma evolução da compreensão dos conceitos trabalhados. Estudantes que inicialmente não sabiam definir poliedro passaram a descrevê-lo como “formas com pontas”, por exemplo. Embora não se trate de uma definição feita de maneira formal, foi um marco muito importante e que demonstrou um aprendizado do conceito pelo aluno. Muitas vezes o rigor da escrita matemática é mais valorizado do que a forma pela qual o conceito foi compreendido pelo estudante. Do ponto de vista didático, ouvir e dialogar sobre as ideias dos discentes para os conceitos em estudo foi importante para o desenvolvimento do pensamento geométrico.

A pesquisadora e professora da turma também teve dificuldades ao longo da intervenção. Primeiramente em relação ao tempo necessário para o planejamento de atividades para a pesquisa, pois ainda haviam outros conteúdos que os discentes deveriam estudar no mesmo bimestre. Em alguns momentos não foi possível dar a atenção necessária aos alunos porque era preciso fazer registros de situações consideradas pertinentes para a pesquisa. Ter outra pessoa para auxiliar e dar suporte nas implementações seria interessante, pois possibilitaria uma observação pormenorizada do trabalho dos estudantes. Contudo, o fato de não ter um colaborador evidenciou a realidade e demandas do professor em sala de aula. Esse é um desafio de uma investigação na própria prática, mas que nem por isso deixa de ser promissora, quando é devidamente planejada e com foco delimitado.

A investigação contribuiu muito para o crescimento profissional da pesquisadora, pois estratégias tiveram que ser traçadas para superar as adversidades, como gerar um vídeo utilizando o *GeoGebra* para reproduzir na TV do auditório pois a escola não contava com um laboratório de informática. Como a maioria dos alunos não tinham celular ou eram proibidos pelos responsáveis de levar para a escola, a possibilidade de utilizar este recurso foi descartada.

Esta investigação não esgotou as possibilidades de trabalho com a foco na visualização. As atividades implementadas podem sofrer adaptações e/ou modificações, outros recursos podem ser utilizados e novas atividades podem ser propostas. O docente deve considerar a realidade na qual está inserido, o perfil dos estudantes e as especificidades de seu local de trabalho. Acreditamos que estimular a visualização possibilita novas formas de entender e enxergar a Matemática com outros olhos. Visualizar se trata de olhar além e deve ser constantemente estimulada em nossos alunos. São outros olhares, estimulantes, envolventes e pensantes!

## REFERÊNCIAS

ARCAVI, A. The role of visual representations in the learning of mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, 52, p. 215-241, 2003.

BAIRRAL, M. A. **Tecnologias da Informação e Comunicação na Formação e Educação Matemática**. Série InovaComTic, vol. 1. Rio de Janeiro: Edur, 2009.

BASTOS, R. **Geometria no currículo e pensamento matemático**. 1999. Disponível em: <https://bit.ly/2D2y24i>. Acesso em: 12 abr. 2018.

COSTA, C.: Visualização, veículo para a educação em geometria. In: SARAIVA, M; COELHO, I.; MATOS, J. (Org(s), Ed(1)). **Ensino e Aprendizagem de Geometria**. Lisboa, Portugal Editora, 2002. p. 157-184.

GORGORIO, N.; ARTIGUES, F.; BANYULS, F.; MOYANO, D.; PLANAS, N.; ROCA, M; XIFRÉ, À. Processo de elaboração de atividades geométricas ricas: un ejemplo, las rotaciones. **Suma**. Badalona, 33, 57-71. Fev 2000. Disponível em: <https://bit.ly/2P8PzKr>. Acesso em 26 de mar 2017. Acesso em 26 mar. 2017.

GUTIÉRREZ, A. Visualization in 3 - dimensional geometry: in search of a framework. In L. Puig e Gutierrez (Eds.), **Proceedings of 20th PME conference** (v. 3, p. 19-26), Valencia: Universitat de València, Dept. de Didàctica de la Matemàtica, 1996.

KALEFF, A. M. M. R. **Tópicos em Ensino de Geometria: A Sala de Aula Frente ao Laboratório de Ensino e à História da Geometria**. Segunda edição. Novas Tecnologias no Ensino da Matemática. CEAD: UFF, 2016.

\_\_\_\_\_. **Vendo e entendendo Poliedros: do desenho ao cálculo do volume através de quebra-cabeças geométricos e outros materiais concretos**. Niterói: EdUFF, 1998.

LELLIS, M.; IMENES, L. M. A Matemática e o novo Ensino Médio. **Educação Matemática em Revista**. São Paulo, n. 9/10, abril/2001.

LEMOS, W. G.; BAIRRAL, M. A. **Poliedros estrelados no currículo do Ensino Médio**. Série InovaComTic, v. 2. Rio de Janeiro: Edur, 2010.

MISKULIN, R. S. **Concepções teórico-metodológicas baseadas em LOGO e em Resolução de Problemas para processo ensino-aprendizagem da geometria**. 1994. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, São Paulo, 1994.

OLIVEIRA, L. L.; VELASCO, A. D. **O ensino de geometria nas escolas de nível médio da rede pública da cidade de Guaratinguetá**. 2007. Disponível em: <https://bit.ly/339QW3Z>. Acesso em: 15 nov. 2014.

PAVANELLO, R. M. **Por que ensinar/aprender Geometria?**. 2009. Disponível em: <https://bit.ly/39GoLkX>. Acesso em: 01 dez. 2017.

PITTALIS, M.; CHRISTOU, C. **Types of Reasoning in 3D Geometry Thinking and Their Relations with Spatial Ability**. Educational Studies in Mathematics, 75, 191-212, 2010.

ROGENSKI, M. L. C.; PEDROSO, S. M. D. **O Ensino da Geometria na Educação Básica: realidade e possibilidades**. 2009. Disponível em: <https://bit.ly/3gr6jsF>. Acesso em: 08 jul. 2014.

SETTIMY, T. F. O. **Elaboração e análise de atividades de visualização em Geometria 3D utilizando recursos convencionais**. 2014. 34 f. Monografia - Departamento de Matemática, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, 2014.

\_\_\_\_\_. **Visualização em sala de aula utilizando recursos didáticos variados**. Dissertação (Mestrado em Educação, Contextos Contemporâneos e Demandas Populares). Instituto de Educação / Instituto Multidisciplinar, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ. 2018. 128 p.

\_\_\_\_\_. BAIRRAL, M. A. Visualização em Sala de Aula: Revelando Descobertas de Estudantes do Sexto Ano do Ensino Fundamental. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 12, n. 3, p. 258-267, 2019.

SILVEIRA, Ê.; MARQUES, C. **Sistema de Ensino Luz do Saber**: Matemática. 9º ano. Recife, Ed. Construir, 2007.

SUSILAWATI, W.; SURYADI, D.; DAHLAN, J. A. The Improvement of Mathematical Spatial Visualization Ability of Student through Cognitive Conflict. **International Electronic Journal of Mathematics Education**, v. 12, n. 2, p. 155-166, 2017.

VELOSO, E. **Geometria**: Temas Actuais. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1998.

ZIMMERMANN, W.; CUNNINGHAM, S. Editor's Introduction: What is mathematical visualization? In: ZIMMERMANN, W.; CUNNINGHAM, S. (Orgs). **Visualization in Teaching and Learning Mathematics** (p. 1-7). Washington: MAA, 1991.

---

**RECEBIDO EM:** 26 de abr. 2020

**CONCLUÍDO EM:** 12 de jun. 2020

