DOI: https://doi.org/10.37781/vidya.v40i2.3141 VIDYA, v. 40, n. 2, p. 299-314, jul./dez., 2020 - Santa Maria, 2020. **ISSN** 2176-4603

INVARIANTES OPERATÓRIOS DE GENERALIZAÇÃO ALGÉBRICA MOBILIZADOS POR CRIANÇAS EM UMA SITUAÇÃO DE COMUTATIVIDADE NA ADIÇÃO DE NÚMEROS NATURAIS

OPERATIVE INVARIANTS OF ALGEBRAIC GENERALIZATION MOBILIZED FOR CHILDREN IN A SITUATION OF COMMUTATIVITY IN THE ADDITION OF NATURAL NUMBERS

VINICIUS CARVALHO BECK[1]
JOÃO ALBERTO DA SILVA[2]

RESUMO

O objetivo deste trabalho foi descrever e analisar os invariantes operatórios utilizados por crianças em uma situação que envolve a noção de comutatividade da adição de números naturais. A comutatividade é caracterizada pela não variação do resultado com a alternância das parcelas. Invariantes operatórios são esquemas mentais evocados por certos tipos de situações. A metodologia utilizada foi o método clínico de manipulação-formalização piagetiano. Os sujeitos participantes da pesquisa são 24 estudantes do terceiro ano do Ensino Fundamental. Os invariantes operatórios encontrados revelam que o conceito de comutatividade pode ser entendido já desde os anos iniciais do Ensino Fundamental e está ligado com a capacidade de generalização algébrica dos estudantes. Além disso, é importante ressaltar que existem estágios intermediários de entendimento da comutatividade, nos quais a criança necessita ainda utilizar ideias aritméticas para confirmar suas hipóteses, sem o reconhecimento de regras que funcionam para todos os casos. Atividades como a que foi apresenta neste trabalho podem auxiliar professores que ensinam Matemática nos anos iniciais na avaliação do desenvolvimento da generalização algébrica de estudantes.

Palavras-chave: Pensamento algébrico. Generalização. Comutatividade. Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

ABSTRACT

The aim of this research was to describe and analyze the operative invariants used by children in a situation that involves the commutativity notion of addition of natural numbers. Commutativity is characterized by the non-variation of the result with the alternation of the plots. Operative invariants are mental schemes evoked by certain types of situations. The methodology used was the clinical Piaget method's of handling-formalization. The survey subjects are 24 students of the third grade of elementary school. The operative invariants that we note that the concept of commutativity can be understood since the early grades of Elementary School and is connected with the algebraic generalization capability of students. In addition, it is important to note that there may be intermediate stages of understanding of commutativity, in which the child needs still lean on arithmetic to confirm their hypotheses ideas, without the recognition of rules that work for all cases. Activities such as the one presented in this paper can help teachers who teach Mathematics in the early years in the evaluation of the development of algebraic generalization of students.

Keywords: *Algebraic Thinking. Generalization. Commutativity. Early Grades of Elementary School.*

1 Doutor em Educação em Ciências pela Universidade Federal do Rio Grande (FURG). Professor EBTT no Instituto Federal Sul-rio-grandense - Campus Pelotas Visconde da Graça (IFSul-CaVG). E-mail: contato.viniciusbeck@gmail.com. Orcid: http://orcid.org/0000-0002-3005-6553
2 Doutor em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Professor Associado na Universidade Federal do Rio Grande (FURG). E-mail: joaosilva@furg.br. Orcid: http://orcid.org/0000-0002-5259-7748

INTRODUÇÃO

Segundo dados do NCTM (2000), uma das etapas em que a criança mais apresenta dificuldades no entendimento de conceitos matemáticos é quando a Álgebra é introduzida, normalmente logo após os anos iniciais da escolaridade, quando as crianças estão na faixa etária dos dez aos doze anos. Desde que estas dificuldades passaram a ser conhecidas na comunidade de professores e pesquisadores em Educação Matemática, algumas recomendações e ações passaram a ser realizadas no sentido de introduzir conceitos algébricos já a partir dos primeiros anos escolares.

Muitos países passaram a incluir conteúdos de Álgebra desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. No Brasil, por exemplo, o documento *Elementos Conceituais e Metodológicos para Definição dos Direitos de Aprendizagem e Desenvolvimento do Ciclo de Alfabetização (1º, 2º e 3º anos) do Ensino Fundamental* (BRASIL, 2012) foi responsável por inaugurar a inclusão da Álgebra no ciclo de alfabetização. A implementação efetiva de conteúdos algébricos desde o primeiro ano do Ensino Fundamental ocorreu quando foi publicada a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017), também conhecida pela sigla BNCC.

Ressalta-se que ainda há um longo caminho para que os conteúdos algébricos cheguem, de fato, às salas de aula nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Dentre outras ações, a formação inicial e continuada de professores precisa abordar também conteúdos algébricos. O programa de formação continuada Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa (BRASIL, 2014), conhecido pela sigla PNAIC, foi o primeiro a abordar, em seu material didático, o pensamento algébrico como um dos eixos a serem trabalhados junto aos professores participantes dos cursos.

Segundo Curi e Pires (2008), existem várias lacunas na formação inicial de professores que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Isto se deve, principalmente, a duas razões: primeiro, o reduzido tempo que os cursos dispõem para tratar de conteúdos matemáticos e de didática da Matemática; e segundo, o entendimento de que alguns assuntos não devem ser abordados nesta etapa de ensino, como por exemplo, o pensamento estatístico, o sistema monetário, o pensamento algébrico.

A compreensão de que nos anos iniciais do Ensino fundamental a Matemática não deve estar restrita apenas à Geometria e Aritmética básicas ainda é bastante recente na literatura especializada. Ainda não é de amplo conhecimento das práticas escolares a inclusão do pensamento algébrico desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Por este motivo, é muito importante que sejam desenvolvidos estudos para compreender e apontar caminhos de abordagem do pensamento algébrico dos anos iniciais.

Partindo do referencial da teoria dos campos conceituais, o objetivo deste trabalho foi descrever e analisar os invariantes operatórios utilizados por crianças em uma situação que envolve a noção de comutatividade na adição de números naturais, categorizando os procedimentos.

ESTUDOS ANTERIORES

Um dos primeiros trabalhos brasileiros a abordar conceitos de Álgebra desde os anos iniciais do Ensino Fundamental foi o de Gomes (2003). A autora apresenta várias possibilidades de relacionar Aritmética, Geometria e Álgebra através de atividades envolvendo sequências e combinações. O termo *alfabetização algébrica* é utilizado para identificar a ação de abordar conceitos algébricos desde os anos iniciais do Ensino Fundamental.

Internacionalmente, os primeiros estudos sobre pensamento algébrico foram realizados por Blanton e Kaput (2005). Segundo estes autores, o pensamento algébrico pode ser definido como o "processo pelo qual os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de casos particulares, estabelecem essas generalizações através de discurso argumentativo, e expressam-nas de formas progressivamente mais formais e adequadas à sua idade".

O conjunto de estudos desenvolvidos a partir de Blanton e Kaput (2005) passou a ser conhecido como *early algebra*. Na perspectiva da *early algebra*, o pensamento algébrico pode ser dividido em: *aritmética generalizada* (generalização das operações aritméticas e descoberta de relações entre os números) e o *pensamento funcional* (descrição da variação numérica em sequências e primeiras ideias sobre o conceito de variável).

Segundo Kieran (2007), a Álgebra não deve ser entendida apenas como um conjunto de técnicas formais para resolver equações e representar variáveis, mas também como uma forma de pensamento. O conceito de Álgebra de Kieran (2007) é bastante similar ao conceito de pensamento algébrico de Blanton e Kaput (2005).

Esta ideia de distanciar a Álgebra pelo seu aspecto estritamente formal, levando também em consideração os processos cognitivos do sujeito que interage com a Álgebra foi acolhida por muitos pesquisadores que estudam o pensamento algébrico.

Dentro da perspectiva da aritmética generalizada, alguns autores passaram a estudar o *pensamento relacional*, que vem a ser a capacidade de reconhecer relações entre os números e as propriedades mais gerais das operações aritméticas. Os estudos de Carpenter, Levi, Franke e Zeringue (2005) e Stephens e Wang (2008) analisaram o pensamento relacional de estudantes, ambos indicando meios de se abordar este tipo de capacidade com crianças, mesmo antes da introdução de conceitos algébricos formais.

Uma revisão de literatura sobre pensamento algébrico foi realizada por Almeida e Santos (2017), que pretendiam buscar caracterizações do pensamento algébrico em trabalhos abordando o tema. Segundo os autores, que sintetizaram as ideias contidas em vários outros trabalhos precedentes, o pensamento algébrico caracteriza-se por *estabelecer relações, modelar matematicamente, generalizar, operar com o desconhecido, e ainda, construir significado*.

Blanton *et al*. (2015) expandiram as categorias de situações de pensamento algébrico, pois passaram a considerar insatisfatória a simples divisão entre aritmética generalizada e pensamento funcional. Segundo os autores, existem cinco noções algébricas: 1) equivalência, expressões, equações e inequações; 2) aritmética generalizada; 3) pensamento funcional; 4) variável; e 5) raciocínio proporcional.

Neste trabalho, nosso foco foi abordar a aritmética generalizada, mais particularmente a ideia de comutatividade de números. Ressalta-se que outras propriedades, tais como associatividade, distributividade, dentre outras, também estão relacionadas com aritmética generalizada, mas optou-se por focar na comutatividade devido à possibilidade de estabelecer relações com o trabalho de Blanton *et al*. (2015), que apresenta uma atividade envolvendo a comutatividade de números naturais como uma situação representante da aritmética generalizada.

Blanton *et al*. (2015, p. 83, tradução nossa) propõem a seguinte situação: "A professora de Marcy pediu a ela que calculasse '23+15'. Ela somou dois números e o resultado deu 38. A professora então pediu a ela para calcular quanto dá '15+23'. Marcy prontamente sabia a resposta. a) Como ela sabia? b) Você acha que funciona para todos os números? Se sim, como você sabe?". Em nosso estudo, optamos por construir uma situação similar a esta, porém envolvendo o auxílio de material manipulativo.

REFERENCIAL TEÓRICO

O professor e pesquisador francês Gérard Vergnaud deu continuidade às pesquisas de Jean Piaget sobre a aprendizagem de conceitos matemáticos. Vergnaud (1990, 1997, 2009) propôs a teoria dos campos conceituais para fundamentar suas proposições a respeito de como a criança aprende a agir em situações que envolvem as operações aritméticas elementares.

Ao estudar com mais profundidade a construção dos conceitos de adição e subtração, Vergnaud percebe que há certo grau de dependência entre as duas noções e passa a denominar esta inter-relação de *campo das estruturas aditivas*, compreendendo tanto a adição quanto a subtração. Vergnaud (2009) descreve e analisa o *campo das estruturas multiplicativas*, que envolve as operações de multiplicação e divisão.

A conceitualização constitui, para Vergnaud, o centro dos processos de aprendizagem. A capacidade de desenvolver um conceito é o que propicia ao sujeito a passagem de um estado de entendimento para outro mais amplo. Segundo Vergnaud (1990, 2009), um conceito é a síntese de situações, invariantes operatórios e representações que envolvem o conceito. As *situações* são experiências possíveis que estão relacionadas com o conceito, os *invariantes operatórios* constituem os significados atribuídos ao conceito pelo sujeito, ou seja, eles constituem a forma como o pensamento se organiza em esquemas de ação, e as *representações* são formas de comunicação social por meio da linguagem, constituindo os significantes do conceito segundo Piaget e Inhelder (1975a, 1975b, 1979).

É importante ressaltar que a ideia de invariante operatório não é própria da teoria dos campos conceituais, já tendo sido apresentada e explorada por Piaget (1971, 2003), ao longo do desenvolvimento da Epistemologia Genética. Porém Vergnaud (1990, 2009) faz uma distinção entre os invariantes, que, segundo ele, podem ser de dois tipos: *teoremas-em-ação* (proposições tidas como verdadeiras pelo sujeito) e *conceitos-em-ação* (premissas, informações que o sujeito leva em consideração para pôr em ação os teoremas-em-ação).

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Esta pesquisa segue uma abordagem qualitativa. Os procedimentos de 24 crianças na faixa etária dos dez aos doze anos foram registrados. Os diálogos entre o pesquisador e as crianças foram gravados enquanto realizavam uma atividade envolvendo a ideia de comutatividade da adição de números naturais. Para a coleta e análise dos dados utilizou-se o Método Clínico de Manipulação-Formalização. Este método foi proposto por Jean Piaget, enquanto realizava pesquisas sobre o desenvolvimento cognitivo de crianças. Segundo Delval (2002, p. 67), o Método Clínico utilizado por Jean Piaget pode ser caracterizado da seguinte forma:

> Partimos do suposto de que o método clínico é um procedimento para investigar como as crianças pensam, percebem, agem e sentem, que procura descobrir o que não é evidente no que os sujeitos fazem ou dizem, o que está por trás da aparência de sua conduta, seja em ações ou palavras. Dado que muitas vezes o método clínico consiste em conversas com o sujeito, tende a ser identificado frequentemente com

> um método de entrevista verbal, de puras conversas com as crianças. Contudo, como já assinalamos, isso não é verdade e presume apenas uma visão superficial, visto que a essência do método não está na conversa, mas sim no tipo de atividade do experimentador e de interação com o sujeito.

Ao longo dos estudos de Piaget, o método foi reformulado algumas vezes. A versão que utilizamos nesta pesquisa é a referente às entrevistas clínicas que Piaget fazia a fim de obter explicações dos participantes sobre atividades de manipulação que realizavam. A explicação da ação constituía o *corpus de análise* dessas pesquisas.

Segundo Delval (2002, p. 70), na entrevista clínica:

> Entrevista-se o sujeito sobre transformações que se produzem nos objetos que tem diante de si. As ações que o sujeito realiza e suas explicações nos informam sobre suas ideias. A conversa com o sujeito serve para dar-lhe instruções e nos ajuda a interpretar o sentido que ele faz.

No Quadro 1 apresentamos a atividade Copos Comutativos, a qual foi aplicada para alunos do 3º ano do Ensino Fundamental. As bolinhas de gude contidas nos copos, no caso desta atividade, representavam as quantidades, e a troca de lugar dos copos representava a inversão das parcelas na operação de adição realizada.

Quadro 1 - Atividade Copos Comutativos.

<u>Atividade Copos Comutativos</u>: Certa quantidade de bolinhas de gude (que varia para cada participante do experimento) é distribuída desigualmente em dois copos de plástico, um verde e outro azul. Em seguida, pergunta-se para o participante o número total de bolinhas. Depois trocam-se os copos de lugar e pergunta-se para o participante se a quantidade total de bolinhas permanece a mesma, com o intuito de avaliar o nível de compreensão da propriedade comutativa da operação aditiva.

Fonte: Elaborado pelos autores.

Ao propor a atividade Copos Comutativos, pensou-se em avaliar a capacidade do participante de analisar informações para desenvolver conjecturas, justificativas empíricas que sustam a conjectura proposta, identificações de casos que corroboram a conjectura e as condições para generalizar uma propriedade para todos os números, que são algumas das habilidades apontadas por Blanton *et al*. (2015) no problema de comutatividade que apresentam em seu trabalho. Na Figura 1 apresentamos o material utilizado durante a execução da atividade junto aos estudantes.

Figura 1 - Material de aplicação da atividade Copos Comutativos

Fonte: Arquivo dos autores.

A pesquisa foi realizada em 2018 em uma escola pública da periferia de um município do interior do estado do Rio Grande do Sul com 24 estudantes do 3º ano do Ensino Fundamental. A escolha por este nível de ensino ocorreu porque esta é a etapa final do ciclo de alfabetização e, além disso, o estudo de Blanton *et al*. (2015), que tomamos como uma referência metodológica, foi realizado com estudantes de nível equivalente.

Os dados foram coletados na mesma escola, em duas turmas diferentes. A coleta foi realizada em duas etapas, tendo sido entrevistados 12 estudantes da primeira vez, e outros 12 no segundo dia de coleta. A análise dos dados está organizada em três etapas: 1) descrição, análise e categorização dos procedimentos; 2) discussão dos procedimentos à luz das estratégias; 3) definição dos níveis de respostas e invariantes operatórios. Os estudantes participantes são identificados por números do 1 ao 24.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Nesta seção, apresentamos os resultados obtidos ao explorar a noção de comutatividade, que vem a ser uma representante da generalização das propriedades aritméticas dos números, ou seja, generalização algébrica.

DESCRIÇÃO, ANÁLISE E CATEGORIZAÇÃO DOS PROCEDIMENTOS

A primeira categoria de procedimentos que constatamos foi a *Sem-Justificativa*. Embora apenas uma estudante tenha utilizado este procedimento, pelo fato de este se diferenciar bastante de outros procedimentos adotados por outros estudantes, optou-se por classificá-lo em uma categoria. O Quadro 2 apresenta alguns trechos do diálogo com a estudante [18].

Quadro 2 - Categoria Sem-Justificativa.

Sem-Justificativa	[18] _E se eu fizer isso aqui (invertendo a ordem dos copos)? Quantas tu acha que tem agora? *_Dez*. _Por que tu acha que é dez? *_Eu não sei*. _Mas tu acha que mudou? *_Sim*. _Então tá, mas tem colega teu que disse que não mudou, que tem a mesma coisa, tu acha que ele pode estar certo ou tá errado? *_Eu acho que ele tá certo*.

Fonte: Elaborado pelos autores.

A estudante [18] não se preocupou em elucidar seu raciocínio ou apresentar uma justificativa convincente para suas repostas. Quando confrontada com a resposta de um colega, sua resposta foi que o colega estava certo, mesmo sem ouvir qual seria a quantidade indicada por ele. É possível que tenha concordado por falta de recursos para assimilar o que foi dito ou por realmente não estar interessada na resposta final, apenas esperando pelo término da atividade. Outra categoria de procedimentos utilizados constatada foi a *Conta-um-Copo*, que consiste em contar as bolinhas de apenas um dos copos, e tomar esta contagem como a resposta que deveria ser dada, mesmo com a ênfase dada pelo pesquisador de que a resposta requerida seria a da soma das quantidades dos dois copos. No Quadro 3 são apresentados os registros das falas de dois estudantes que ilustram o uso desse procedimento.

Quadro 3 - Categoria Conta-Um-Copo.

Conta-Um-Copo	[02] _Troquei de lugar o azul e o verde, quantas têm, nesse, mais nesse? (o estudante pensa, e não sabe responder). Se quiser contar, pode contar (e ele conta novamente). Quantos tem agora nos dois copos? *_Doze* (que na verdade é a contagem apenas das bolinhas no copo verde). [11] _Se eu mudar de lugar, antes era azul mais verde, agora é verde mais azul, dá alguma diferença, quanto é que tu acha que tem que dá? *_Quinze.* (esta era a quantidade de apenas um dos copos, contada anteriormente pelo estudante). *Porque agora tu mudou de lugar.* _Tu acha que mudou um pouquinho? *_Aham.*

Fonte: Elaborado pelos autores.

A necessidade de recontar as bolinhas depois da troca de copos evidencia que a noção matemática de comutatividade ainda não está consolidada no pensamento dos estudantes [02] e [11]. Quando perguntados sobre quantidade de bolinhas “do copo verde mais do que no copo azul”, o uso do termo “mais” não é associado pelos estudantes à operação de adição, de modo que, por exemplo, quando o pesquisador pergunta à estudante [11] “tu acha que mudou um pouquinho”, ela responde afirmativamente, compreendendo que a quantidade perguntada se referia apenas a um dos lados, na qual após a troca dos copos estaria ocupada por outro copo, com uma quantidade diferente de bolinhas de gude.

Alguns dos estudantes que responderam corretamente a pergunta do total de bolinhas antes e depois da troca dos copos, só conseguiram chegar à resposta após conferir e recontar as bolinhas dos dois potes. Ou seja, o fato de os copos estarem invertidos provoca a necessidade de recontagem, mostrando que a noção de comutatividade nessa classe de procedimentos ainda não está consolidada. Denominamos esta categoria de procedimentos *Confere-Contando*. Trechos de respostas que ilustram esta categoria são apresentados no Quadro 4.

Quadro 4 - Categoria Confere-Contando.

Confere-Contando	[01] _Quanto tem ao todo aqui, nesse copo mais nesse? (apontando para os copos de cores verde e azul, respectivamente). _*Dezessete.* _Tá bem. Agora eu vou fazer o seguinte: vou dar uma misturada aqui (invertendo a posição dos copos), quantas têm no total agora? _(depois de pensar bastante) *Peraí, vou contar* (e recomeça a contagem dos dois copos). [21] _E se invés de perguntar o azul mais o verde, eu perguntasse o verde mais o azul (e inverte os copos)? (a participante pensa, por algum tempo). Antes de eu virar tu disse que dava dezesseis, e agora quanto tu acha que dá? _*Pode contar?* _Pode contar. _*Dezesseis*. _Dezesseis também? _É.

Fonte: Elaborado pelos autores.

A frase "Peraí, vou contar" da estudante [01] e a pergunta "Pode contar?" da estudante [21] retratam a necessidade de recontagem, e a forte dependência lógica desta contagem para determinar o valor total. Nem mesmo uma estimativa ou hipótese de que a quantidade total se manteve transpareceu nas respostas dadas por esses estudantes.

Outra categoria de respostas que constatamos foi a que denominamos *Troca-Algarismos*. Nesta categoria classificamos uma resposta, na qual curiosamente o estudante troca os algarismos do numeral, quando perguntado sobre a quantidade total após a troca dos copos. O diálogo do Quadro 5, a seguir, ilustra esta categoria de repostas.

Quadro 5 - Categoria Troca-Algarismos.

Troca-Algarismos	[10] _Quanto que deu ao todo aqui, nos dois copos? _*Dezesseis.* _Agora azul mais verde (invertendo os copos), quanto é que tem? _*Sessenta e um.* _Quer contar? _*Quero.* (e ele conta novamente) _*Aqui tem dez e aqui tem seis.* Aqui tem dez e aqui tem seis, quanto tem ao todo então? _*Dezesseis.* _Então é sessenta e um ou dezesseis? _*Dezesseis.*

Fonte: Elaborado pelos autores.

O estudante [10] só percebe que a quantidade respondida é desproporcional ao número de bolinhas nos copos depois de recontá-las. Para o estudante, os algarismos na representação dos números são também comutativos, porém a recontagem das bolinhas de gude demonstra que não é possível utilizar esta regra neste caso.

Avaliou-se também a possibilidade de o aluno ter reconhecido não haver comutatividade entre os algarismos, e exatamente por esse motivo, ao mudar a posição dos copos ele sugere a mudança na posição dos algarismos, devido ao seu valor posicional. No entanto, não é possível decidir por esta segunda hipótese, visto que não coletamos dados sobre o conhecimento do valor posicional dos algarismos nesta pesquisa. Por isto, para fins de categorização, vamos presumir que o estudante comuta os algarismos.

Dez estudantes responderam que apenas a inversão dos copos não altera a quantidade total de bolinhas, utilizando argumentos fundamentados na permanência física das bolinhas nos copos. Por isso denominamos esta categoria de respostas *Comuta-Copos*. O Quadro 6 apresenta as respostas dos estudantes.

Quadro 6 - Categoria Comuta-Copos.

Comuta-Copos	[07] _E se eu fizer isso aqui? (invertendo os copos). _*Dezenove*. Como é que tu sabe que é dezenove? _*Porque é a mesma quantia*. _Tem diferença se eu colocar primeiro o azul e depois o copo verde? _*Não*. _Teve colega teu que disse que dá diferente, tu acha que ele tá certo ou tá errado? _*Errado*. _Por quê? _*Porque dá a mesma quantia*. [08] _E se eu mudar elas de lugar, e te perguntar quantas têm, ao todo? _*Não são vinte e quatro? Mais?* _Como é que tu sabe? _*Adivinhei.* Tu acha que tem diferença de eu fazer isso aqui ou isso aqui? (invertendo a ordem dos copos) _*Não, não tem diferença.* _Não precisa nem contar as bolinhas? Tu acha que vai ter a mesma quantidade? _*Sim.* [09] _E se eu mudar aqui, quanto vai ter ao todo? _(depois de pensar bastante) *Vinte e cinco, não tem?* _Não sei, o que tu acha? _*Acho que é vinte e cinco.* _É tua resposta final? _*É.* [12] _E se eu te perguntasse o pote verde mais o pote azul (invertendo os copos)? _(depois de pensar bastante) *Acho que dá a mesma coisa*. _Por que? _*Porque tu só mudou.* [13] _Se eu mudar assim os potes, quanto que tem agora, ao todo? _*Dezesseis*. _A mesma coisa? _*Sim*. _E como é que tu sabe que dá dezesseis? _*Não sei, acho que é isso aí mesmo*. _E mudar os potes faz alguma diferença? Muda a quantidade se eu mudar a ordem dos copos? _*Hum, não. Porque cada potinho tem..., tá aqui tem onze e aqui tem cinco, e daí se tu fizer assim* (o participante inverte os copos nesse momento) *não vai mudar nada*. [15] _E se eu mudar aqui, os copos? _*Dezesseis*. _Continua tendo dezesseis? _É. _Tu acha que eu mudar os copos não alterou a quantidade? _*Não*. [16] _E se eu fizer isso aqui (invertendo os copos)? Vai mudar algumas coisa? _*Não sei*. _Tu disse que antes deu doze, né? E se eu fizer isso aqui (invertendo novamente os copos)? Vai ter mais, vai ter menos? _*Sete*. _Vai diminuir? _*A mesma coisa*. _Como é que tu sabe que é a mesma coisa? _*Doze?* _Como é que tu sabe? _*Porque é a mesma coisa*. [17] _E se eu fizer isso aqui (invertendo os copos)? Quantas tem agora? _*Quinze*. _Quinze, igual? Tu acha que mudando a ordem só, não muda nada? _*Não.* [22] _E se eu fizesse isso daqui (invertendo os copos)? Se eu mudar, se invés de ser o verde mais azul, eu fizesse o azul mais o verde? _*Vai ter dezesseis*. _Dezesseis também? _É. _Então mudar os copinhos não muda nada? _É, dá o mesmo resultado. [24] _E se tu for fazer o azul mais o verde, quanto é que dá? _*Vai dá mesma coisa: dezesseis*. _então tu acha que não tem diferença então contar verde mais azul ou azul mais o verde? _*Não*.

Fonte: Elaborado pelos autores.

Destaca-se que as respostas obtidas na categoria de procedimentos que chamamos de Comuta-Copos revelam um avanço em relação às categorias descritas até agora no que diz respeito à noção de comutatividade. O estudante [07], por exemplo, mesmo confrontado com a opinião de outro colega, mantém sua resposta, sem hesitar.

Algumas expressões, tais como “adivinhei”, utilizada pelo estudante [08], revelam que, ainda que a criança utilize palavras que não expressam o uso de raciocínios sofisticados, a ação mental executada pode estar em um nível mais elevado do que aparenta. Logo após afirmar que foi por adivinhação, o estudante [08] afirma com toda certeza que não há diferença entre a ordem dos copos quando se pretende somar as duas quantidades de bolinhas dentro deles.

Várias expressões utilizadas pelos estudantes indicam que estes possuem a noção de comutatividade dos números, tomando como referência concreta as bolinhas e os copos. É o caso das expressões "dá a mesma coisa" (estudante [12]), "não vai mudar nada" (estudante [13]), "é a mesma coisa" (estudante [16]), "dá o mesmo resultado" (estudante [22]), "vai dá mesma coisa" (estudante [24]).

Outra categoria de respostas é a que denominamos *Comuta-Números*. As repostas que constituem esta categoria são bastante semelhantes às da categoria Comuta-Copos, porém a argumentação da comutatividade está centrada nos números, se distanciando dos objetos utilizados no experimento, o que revela um avanço em termos de representação em relação às categorias apresentadas até aqui. O Quadro 7 apresenta esta categoria.

Quadro 7 - Categoria Comuta-Números.

Comuta-Números	[04] _E se eu fizer assim, quantos tem agora? (invertendo os copos) _*Quarenta e sete*. _Continua mesma coisa? _*Sim.* _Tu pode me explicar porque que deu a mesma coisa? _*Esse aqui tava aqui, daí mudou de lado, aqui era vinte e oito e aqui era dezenove, e agora tá dezenove mais vinte e oito.* [05] _Como que tu sabe que tem a mesma coisa? _*Porque aqui tem dez e mais sete, deu dezessete, e dez mais sete deu dezessete (apontando os copos na ordem inversa).* [06] _E se eu fizer o seguinte, assim ó (invertendo os copos), o que que tu acha que pode acontecer? Se eu mudar de lugar e perguntar quantos tem, ao todo aqui, quanto que dá? _*É que eu faço continha, se tu faz as conta, daí dá dezesseis*. _A mesma coisa? _*É, sim.* _Por que que é a mesma coisa? _*Por causa que dez mais seis dá dezesseis, e se tu fizer seis mais dez dá dezesseis também.* [19] _E se eu fizesse o contrário: o pote azul mais o pote verde? _*O pote azul mais o pote verde?* _Isso. _*Continua sendo dezesseis*. _Por que que continua sendo dezesseis? _*Porque cinco mais onze é dezesseis, e onze mais cinco é dezesseis também*. [20] _Se eu inverter aqui, o copo verde e o copo azul, tu acha que daria alguma diferença? _*Não*. _Nenhuma diferença? _*Não*. _Por que tu acha que não teria nenhuma diferença? _*Ué, porque o cinco tá aqui e o onze tá aqui, se inverter os dois vai dá o mesmo resultado*. [23] _E no copo verde mais no capo azul (invertendo os copos)? _*Também dá dezesseis*. _Por quê? _*Porque de um número para o outro não tem diferença, é a mesma coisa, esse mais esse ou esse mais esse* (alternando a ordem dos copos) *é a mesma coisa, dá o mesmo resultado*.

Fonte: Elaborado pelos autores.

Os procedimentos de cálculo utilizados pelos estudantes nesta categoria revelam que estes não só possuem noções de comutatividade, como também conseguem representar mentalmente a inversão dos números associados com a quantificação realizada a partir da contagem de bolinhas nos dois copos.

Alguns trechos, tais como "aqui era vinte e oito e aqui era dezenove, e agora tá dezenove mais vinte e oito" (estudante [04]), "dez mais seis dá dezesseis, e se tu fizer seis mais dez dá dezesseis também" (estudante [06]), "cinco mais onze é dezesseis, e onze mais cinco é dezesseis também" (estudante [19]), "porque o cinco tá aqui e o onze tá aqui, se inverter os dois vai dá o mesmo resultado" (estudante [20]) ilustram o entendimento da comutatividade, representada já nas quantidades, sem depender das propriedades físicas dos objetos envolvidos.

Uma interessante categoria que emergiu a partir da coleta de dados foi a *Comuta-na-Conta*. Nesta categoria, a resposta dos estudantes está fortemente baseadas nas contas armadas aprendidas na escola. O estudante visualiza a "conta de mais" a ser realizada, percebendo que a inversão das parcelas, neste caso, não altera a resposta. Não há um conhecimento explícito da propriedade comutativa dos números na adição, mas existe o entendimento de que alterar a ordem das parcelas na conta não altera a soma, que resulta da operação de adição realizada (Quadro 8).

Quadro 8 - Categoria Comuta-na-Conta.

Comuta-na-Conta	[03] _E se eu fizer isso aqui (invertendo os copos), se eu mudar a ordem, quantas bolinhas tem no total agora? _*Quarenta e sete também.* _Continua a mesma coisa? Como tu pensou? _*Porque dá a mesma coisa, se tu só troca o de cima e o de baixo na conta dá a mesma coisa.* [14] _E se invés de perguntar quantos tem no verde mais quanto tem no azul, eu inverter eles, colocar o azul primeiro e te perguntar quantos tem nos dois? _*Não vai dá a mesma conta?* _Como é que tu sabe que vai dá a mesma conta? _*Ah, porque é só inverter, tu não botou mais nem menos*.

Fonte: Elaborado pelos autores.

A fala do estudante [03] "tu só troca o de cima e o de baixo na conta dá a mesma coisa" indica que este estudante representa mentalmente o algoritmo da adição para responder a pergunta, ou seja, fundamenta sua resposta nesta conta armada. O questionamento "Não vai dá a mesma conta?" feito pela estudante [14] mostra que ele compreende que há uma conta a ser feita e que a ordem em que as parcelas são inseridas na conta não interfere no resultado final.

As categorias Comuta-Copos, Comuta-Números e Comuta-na-Conta se mostraram bastante eficazes e muito mais eficientes do que as outras, pois as respostas corretas foram dadas de imediato, com procedimentos mentais realizados em um tempo muito menor do que os procedimentos das outras categorias, mesmo aqueles que também chegaram à resposta correta.

DISCUSSÃO DOS PROCEDIMENTOS À LUZ DAS ESTRATÉGIAS

O trabalho de Blanton *et al*. (2015) descreve e analisa as estratégias que os estudantes utilizam para resolver problemas em situações que envolvem generalização algébrica. A fim de traçar um paralelo entre os procedimentos que emergiram de nossa coleta de dados com as estratégias já conhecidas na literatura, apresentamos a seguir os três tipos de estratégias de generalização algébrica apresentados por Blanton *et al*. (2015).

As estratégias *operatórias* são aquelas que não admitem mais de um significado para os significantes que são utilizados nos problemas de Matemática. Por exemplo, quando perguntamos a uma criança se a igualdade 39+121=121+39 é verdadeira ou falsa, e ela responde que é falsa porque 39+121 não é igual 121, entendendo o sinal de igualdade estritamente como resultado final da operação de adição, sem considerar a possibilidade de ele poder ser mais alguma coisa, como, por exemplo, equilíbrio entre duas quantidades.

As estratégias *computacionais*, no caso dos problemas que envolvem generalização algébrica, estão baseadas na ideia de que as representações podem apresentar variações, que há possibilidade de generalizações, porém a forma de representar estas generalizações ainda é bastante limitada ou ausente. Por exemplo, ao perguntar a uma criança se a igualdade 39+121=121+39 é verdadeira ou falsa, ela responde que é verdadeira por que 39+121=160 e 121+39=160. Há necessidade de realização de um cálculo para verificar se a reposta está correta. Não há entendimento de que existe uma propriedade comutativa que se aplica a todos os números na operação de adição, mas admite-se que a igualdade pode significar mais que meramente o resultado final de uma operação aritmética.

A estratégia *estrutural* se caracteriza pelo domínio da noção de comutatividade. Neste caso, quando a criança se depara com o problema de decidir se a igualdade 39+121=121+39 é verdadeira ou falsa, ela responde que é verdadeira porque tanto faz a ordem dos números quando a conta é de mais.

Para iniciar um paralelo entre os procedimentos constatados em nossa coleta de dados com as estratégias já presentes na literatura, em primeiro lugar precisamos destacar o fato de que as categorias de procedimentos Sem-Justificativa e Conta-um-Copo não apresentaram elementos que indiquem uso de relações de causalidade, e, por isso, foram consideradas como procedimentos isolados, aparentemente não fundamentadas em estratégias pensadas com o intuito de se chegar à resposta esperada. Por isso chamamos as estratégias associadas com tais procedimentos de *pré-operatórias*.

Ressalta-se não haver uma conta na qual se pudesse constatar raciocínios associados com estratégias operacionais do trabalho de Blanton *et al*. (2015), isto é, no problema apresentado não havia possibilidade de analisar se o estudante compreende o sinal de igualdade estritamente como resultado ou como equilíbrio. Por isso, optou-se por considerar procedimentos associados com estratégias computacionais como estratégias *operatório-computacionais*, ou seja, uma junção que unifica os dois tipos de estratégias.

A categoria de procedimentos Confere-Contando apresenta, claramente, características que indicam o uso de estratégias operatório-computacionais, uma vez que nesta categoria os estudantes demonstraram a necessidade de recontar os dois potes, mesmo que perceptualmente estivessem convencidos de que nenhuma bolinha havia sido removida ou inserida nos copos.

Associamos as categorias Troca-Algarismos, Comuta-Copos, Comuta-Números e Comuta-na-Conta com as estratégias estruturais do trabalho de Blanton *et al*. (2015). Isto porque em todas essas categorias de procedimentos observou-se o entendimento dos estudantes da noção de comutatividade, sem necessidade de recontagem ou de outro tipo de ação auxiliar para responder ao questionamento realizado pelo pesquisador.

Ainda que a categoria Troca-Algarismos não tenha sido bem-sucedida, ela apresenta esta característica de ser uma regra aplicável para vários casos. É importante ressaltar que este tipo de procedimento não se sustenta facilmente, pois como se pode ver no Quadro 5, um questionamento do pesquisador fez com que o participante repensasse sua reposta e passasse a utilizar uma estratégia operatório-computacional em seguida.

Este é o procedimento que mostra a transição das estratégias computacionais para as estratégias que se aproximam da ideia de comutatividade. Existe uma invariância presente no esquema mental dos estudantes, mas ele aplica esta regra aos algarismos e não às parcelas da operação de adição.

Os procedimentos Comuta-Copos, Comuta-Números e Comuta-na-Conta estão claramente bem fundamentados na ideia de que a ordem dos números na adição não se altera, com pequenas diferenças nas justificativas apresentadas pelos estudantes. Como todos esses procedimentos, que foram os bem-sucedidos daqueles associados com as estratégias estruturais de Blanton *et al.* (2015), estão relacionados diretamente com a ideia de comutatividade, optamos por denominar as estratégias estruturais utilizadas neste experimento como estratégias *estruturais-comutativas*.

Assim, três tipos de estratégias mentais se destacaram na situação de generalização algébrica proposta em nossa pesquisa: as pré-operatórias; as operatório-computacionais, baseadas em valor de referências que comprova se a igualdade, de fato, se verifica; e as estruturais-comutativas, que dispensam cálculos e são fundamentadas na generalização de fatos sobre os números naturais.

NÍVEIS DE RESPOSTAS E INVARIANTES OPERATÓRIOS

Para construir os níveis de respostas dos participantes com relação à situação de generalização algébrica, foi observado o grau de sofisticação de cada tipo de estratégia, bem como de cada tipo de procedimento realizado na resolução do problema proposto.

O Nível I de respostas foi subdivido em IA e IB. O subnível IA compreende o procedimento Sem-Justificativa, com respostas sem o uso claro de qualquer estratégia. O subnível IB se refere ao uso do procedimento de Conta-um-Copo, no qual os participantes tomavam a contagem das bolinhas de apenas um dos copos como a soma perguntada pelo pesquisador. De forma geral, as estratégias pré-operatórias, relacionadas com estes dois tipos de procedimentos, constituem o Nível I de respostas.

O Nível II de respostas se caracteriza pelo uso de estratégias operatório-computacionais, e está relacionado com o uso de procedimentos do tipo Confere-Contando, utilizado por estudantes que consideraram necessário recontar as bolinhas dos copos para obter a resposta.

O Nível III de resposta se caracteriza pelo uso de estratégias estruturais-comutativas, relacionadas com as categorias de procedimentos Troca-Algarismos, Comuta-Copos, Comuta-Números e Comuta-na-Conta. Dividimos este nível em dois subníveis: subnível IIIA, que se caracteriza pela inversão dos algarismos e que não é bem-sucedido; e o subnível IIIB, que se caracteriza pela consolidação da noção de comutatividade, que pode estar baseada nos objetos, nos números ou no algoritmo da adição. No Quadro 9 estão sintetizados os níveis de respostas para a situação de generalização algébrica proposta:

Quadro 9 - Níveis de Respostas da Atividade Copos Comutativos.

Níveis	Descrição dos Procedimentos
Nível IA	A criança não compreende o problema da inversão das parcelas. No Nível IA apresenta uma quantidade qualquer como resposta, sem relação de causalidade aparente.
Nível IB	A criança não compreende o problema da inversão das parcelas. No Nível IB apresenta a contagem de uma das parcelas como resposta.
Nível II	A criança precisa verificar se a soma das quantidades permanece igual após a inversão das parcelas.
Nível IIIA	A criança possui a noção de que o resultado não se altera quando alguns signos são invertidos. No Nível IIIA a criança aplica a noção de inversão aos algarismos, o que representa uma assimilação degenerada da ideia de comutatividade.
Nível IIIB	A criança possui a noção de que o resultado não se altera quando alguns signos são invertidos. No Nível IIIB a comutatividade dos números naturais está consolidada.

Fonte: Elaborado pelos autores.

A partir dos níveis de respostas, foi possível definir os invariantes operatórios presentes nas estratégias dos estudantes no que se refere à ideia de generalização algébrica, conforme a atividade realizada com os participantes.

A partir do Nível II de respostas, podemos observar a presença do teorema-em-ação "verificar se a soma das quantidades permanece igual". Pode-se notar, neste caso, a presença do conceito-em-ação "quantidade que se altera com inversão de parcelas", pois, do contrário, este procedimento de recontagem não estaria consistente com a estratégia adotada pelo participante.

Do Nível IIIA de respostas podemos inferir o uso do teorema-em-ação "inversão de algarismos", baseado no conceito-em-ação de "resultado que não se altera com a inversão de quaisquer significantes". Ressalta-se que este teorema-em-ação é uma generalização bastante exagerada, e produzirá conclusões equivocadas, apesar de haver uma ideia primitiva de inversão de significantes, que pode ser uma base para as generalizações corretas relacionadas com a comutatividade.

Do Nível IIIB pode-se observar a presença do teorema-em-ação "inversão das parcelas", que é aplicado seguindo a ideia de que o "resultado que não se altera pela inversão das parcelas". Este é o teorema-em-ação mais sofisticado daqueles utilizados pelos participantes da pesquisa.

A fim de elucidar os invariantes operatórios ligados com a generalização de propriedades aritméticas dos números, apresentamos no Quadro 10 uma síntese das categorias de procedimentos, estratégias e níveis de respostas para a situação de generalização algébrica.

Quadro 10 - Categorias, Estratégias e Níveis de Generalização Algébrica.

Categoria		Estratégia		Nível
Sem-Justificativa (1 estudante)	→	Pré-Operatória	→	IA
Conta-um-Copo (2 estudantes)	→	Pré-Operatória	→	IB
Confere-Contando (2 estudantes)	→	Operatória-Computacional	→	II
Troca-Algarismos (1 estudante)	→	Estrutural-Comutativa	→	IIIA
Comuta-Copos (10 estudantes)	→	Estrutural-Comutativa	→	IIIB
Comuta-Números (6 estudantes)	→	Estrutural-Comutativa	→	IIIB
Comuta-na-Conta (2 estudantes)	→	Estrutural-Comutativa	→	IIIB

Fonte: Elaborado pelos autores.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Seis invariantes operatórios foram constatados para a situação de generalização algébrica proposta: os teoremas-em-ação "verificar se a soma das quantidades permanece igual", "inversão de algarismos" e "inversão das parcelas"; e seus respectivos conceitos-em-ação "quantidade que se altera com inversão de parcelas", "resultado que não se altera com a inversão de quaisquer significantes" e "resultado que não se altera pela inversão das parcelas".

Estes invariantes operatórios revelam que o conceito de comutatividade na operação de adição com números naturais pode ser entendido desde os anos iniciais do Ensino Fundamental e está ligado com a capacidade de generalização algébrica dos estudantes. Além disso, é importante ressaltar que existem estágios intermediários de entendimento da comutatividade, nos quais a criança necessita ainda utilizar ideias aritméticas para confirmar suas hipóteses, sem o reconhecimento de regras que funcionam para todos os casos.

Atividades como a que foi apresentada neste trabalho podem auxiliar professores que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental na avaliação do desenvolvimento da generalização algébrica de estudantes, proporcionando intencionalmente situações que propiciem o uso e aprimoramento de esquemas eficazes em situações nas quais ferramentas meramente aritméticas são insuficientes para resolver o problema.

Também é importante destacar que o conhecimento do professor sobre os diferentes invariantes operatórios é decisivo para que o estudante consiga avançar das estratégias operatório-computacionais para as estratégias estruturais-comutativas, as quais possibilitarão a esse estudante compreender efetivamente o significado da propriedade geral da comutatividade dos números, sendo necessário nesse estágio futuro, ampliar seu repertório de representações algébricas.

Pesquisas futuras poderão descrever e analisar as categorias de procedimentos e estratégias adotadas por estudantes do 1º e do 2º ano do Ensino Fundamental, bem como explorar outros tipos de situações que contemplem mais propriedades aritméticas dos números naturais, tais como associatividade e paridade da soma, por exemplo.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, J. R.; SANTOS, M. C. Pensamento Algébrico: Em Busca de uma Definição. **Revista Paranaense de Educação Matemática - RPEM**, Campo Mourão, v. 6, n. 10, p. 34-60, 2017.

BLANTON, M.; KAPUT, J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 36, n. 5, p. 412-446, 2005.

BLANTON, M.; STEPHENS, A.; KNUTH, E.; GARDINER, A. M.; ISLER, I.; KIM, J.-S. The Development of Children's Algebraic Thinking: The Impact of a Comprehensive Early Algebra Intervention in Third Grade. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 46, n. 1, p. 39-87, 2015.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC/SEB, 2017.

______. Ministério da Educação. **Elementos Conceituais e Metodológicos para os Direitos de Aprendizagem e Desenvolvimento do Ciclo de Alfabetização (1º, 2º e 3º anos) do Ensino Fundamental**. Brasília: MEC/SEB, 2017.

______. Ministério da Educação. **Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa:** Apresentação (Alfabetização Matemática). Brasília: MEC/SEB, 2014.

CARPENTER, T. P.; LEVI, L.; FRANKE, M. L. ZERINGUE, J. K. Algebra in the elementary school: developing relational thinking. **ZDM - The International Journal on Mathematics Education**, Karlsruhe, v. 37, n. 1, p. 53-59, 2005.

CURI, E.; PIRES, C. M. C. Pesquisas sobre a formação do professor que ensina matemática por grupos de pesquisa de instituições paulistanas. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 10, n. 1, p. 151-189, 2008.

DELVAL, J. **Introdução à Prática do Método Clínico:** descobrindo o pensamento das crianças. Tradução de Fátima Murad. Porto Alegre: Artmed, 2002.

GOMES, M. C. V. Álgebra, Geometria e Aritmética de Mãos Dadas no Ensino Fundamental. **Boletim GEPEM**, Seropédica, n. 42, p. 47-59, Fev./Jul. 2003.

KIERAN, C. Developing algebraic reasoning: The role of sequenced tasks and teacher questions from the primary to the early secondary school levels. **Quadrante**, Lisboa, v. 16, n. 1, p. 05-26, 2007.

NCTM. 2000. **Princípios e Normas para a Matemática Escolar**. 2. ed. Lisboa: APM, 2008. Tradução de: Principles and Standards for School Mathematics.

PIAGET, J. **Biologia e Conhecimento**. Petrópolis: Editora Vozes, 2003.

______. **A Epistemologia Genética**. Petrópolis: Editora Vozes, 1971.

PIAGET, J.; INHELDER, B. **Gênese das Estruturas Lógicas Elementares**. Rio de Janeiro: Editora Zahar, 1975a.

______. **O Desenvolvimento das Quantidades Físicas na Criança**. Rio de Janeiro: Editora Zahar, 1975b.

______. **Memória e Inteligência**. Brasília: Editora Artenova, 1979.

STEPHENS, M.; WANG, X. Investigating some junctures in relational thinking: a study of year 6 and 7 students from Australia and China. **Journal of Mathematics Education**, Reston, v. 1, n. 1, p. 28-39, 2008.

VERGNAUD, G. **A criança, a matemática e a realidade:** problemas do ensino da matemática na escola elementar. Tradução de Maria Lucia Faria Moro. 3.ed. Curitiba: Editora da UFPR, 2009.

______. La théorie dês champs conceptuels. **Recherches em Didactique** dês **Mathématiques**, v. 10, n. 2-3, p. 133-170, 1990.

______. The nature of mathematical concepts. In: NUNES, T.; BRYNT, P. (Eds.) **Learning and teaching mathematics, an international perspective**. Hove (East Sussex), 1997.

RECEBIDO EM: 18 fev. 2020
CONCLUÍDO EM: 19 out. 2020