

ENSINO POR INVESTIGAÇÃO MEDIADO POR TECNOLOGIAS DIGITAIS EM AULAS DE MATEMÁTICA

RESEARCH TEACHING MEDIATED BY DIGITAL TECHNOLOGIES IN MATHEMATICS CLASSES

ADRIANA HELENA BORSSOI*
KARINA ALESSANDRA PESSOA DA SILVA**
ELAINE CRISTINA FERRUZZI***

RESUMO

Neste artigo trazemos nossas considerações sobre o potencial das tecnologias digitais de informação e comunicação em aulas de Matemática do Ensino Superior quando desenvolvidas por meio do Ensino por Investigação em um ambiente virtual de ensino e aprendizagem. Para isso, consideramos os aportes teóricos do Ensino por Investigação, que consiste em uma abordagem didática que cria um ambiente investigativo, bem como no ambiente virtual considerado um espaço que permite a construção coletiva do conhecimento e o desenvolvimento da aprendizagem. Subsidiaremos nossas análises em três contextos de ensino de cursos de graduação de uma universidade Federal do Paraná. Por meio de uma análise qualitativa, inspirada na *Research Design*, dos encaminhamentos empreendidos nestes contextos de ensino evidenciamos que as tecnologias têm potencial para testar hipóteses, analisar comportamentos de variáveis, simular comportamento de modelos matemáticos a partir da alteração de parâmetros e transitar entre diferentes representações de objetos matemáticos presentes em atividades investigativas.

Palavras-chave: Educação Matemática. TDIC. Ensino Híbrido. Ensino por Investigação.

ABSTRACT

In this paper we present our considerations about the potential of digital information and communication technologies in Mathematics classes of Higher Education when developed through Research Teaching in a virtual environment for teaching and learning. For this, we consider the theoretical contributions of Research Teaching, which consists of a didactic approach that creates an investigative environment, as well as in the virtual environment considered a space that allows the collective construction of knowledge and the development of learning. We subsidize our analysis in three contexts of teaching undergraduate courses at a Federal university in Paraná. By means of a qualitative analysis, inspired by Research Design, we show that technologies have the potential to test hypotheses, to analyze behavior of variables, to simulate behavior of mathematical models by changing parameters and to transit between different representations of mathematical objects present in investigative activities.

Keywords: Mathematics Education. Digital Information and Communication Technologies. Blended learning. Research Teaching.

* Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR Câmpus Londrina. E-mail: adrianaborssoi@utfpr.edu.br. Orcid: <https://orcid.org/0000-0002-1725-6307>

** Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR Câmpus Londrina. E-mail: karinasilva@utfpr.edu.br. Orcid: <https://orcid.org/0000-0002-1766-137X>

*** Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR Câmpus Londrina. E-mail: elaeneferruzzi@utfpr.edu.br. Orcid: <https://orcid.org/0000-0003-3378-5185>

INTRODUÇÃO

No campo da Educação Matemática, diversas pesquisas, como por exemplo, Skovsmose (2000), Mendes (2009), Almeida e Ferruzzi (2009), Araújo e Campos (2015), Borssoi *et al.* (2017), Ramos *et al.* (2016) e Milani (2017), têm como foco a natureza social e contextual do conhecimento e, em linhas gerais, reconhecem que o ensino e a aprendizagem ocorrem em contextos sociais que não só influenciam, mas determinam o tipo de conhecimento a ser construído.

Pesquisas pautadas nesta perspectiva defendem, de modo geral, que a escola tem como função social gerar ambientes formativos que preparem os alunos dos diferentes níveis de escolaridade para lidar também com a diversidade de fatos que sucedem na vida fora da escola (ALMEIDA; FERRUZZI, 2009, IGLIORI; BELTRÃO, 2015, FERRUZZI; ALMEIDA, 2015, SILVA *et al.*, 2018). Neste sentido, em nossas aulas, temos nos empenhado em utilizar uma abordagem pedagógica na qual os alunos, argumentam, levantam hipóteses e realizam análise de dados com o intuito de abordar conceitos, ao mesmo tempo em que realizam trabalho colaborativo. Trata-se do Ensino por Investigação que, segundo Sasseron (2015, p. 58), pode “estar vinculado a qualquer recurso de ensino desde que o processo de investigação seja colocado em prática e realizado pelos alunos a partir e por meio das orientações do professor”.

Entendemos que colocar o processo de investigação em prática sob orientação do professor pode ser realizado tanto de forma presencial quanto de forma virtual. Para isso, temos considerado o desenvolvimento de atividades investigativas em Ambiente Virtual de Ensino Aprendizagem (AVEA). Isso porque consideramos a necessidade de propor ações que busquem atribuir mais responsabilidade ao aluno quanto a sua própria aprendizagem. Com isso, procuramos analisar o ambiente educacional, contextos de ensino e de aprendizagem, no desenvolvimento de atividades com apoio das Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDIC).

A motivação para este estudo se pauta nas experiências vivenciadas pelas autoras em suas práticas docentes em que figuram proposições de atividades de Matemática em cursos de graduação ao longo de alguns anos na instituição pública Federal em que atuam. Assim, a partir de experiências, em nossa investigação temos como objetivo evidenciar o potencial das TDIC em aulas de Matemática do ensino superior quando desenvolvidas por meio do Ensino por Investigação em AVEA.

Para apresentarmos resultados e inferências relativas ao nosso objetivo de pesquisa, tratamos do Ensino por Investigação e TDIC no âmbito do AVEA na próxima seção, seguidos dos aspectos metodológicos da pesquisa. Na quarta seção, descrevemos as atividades desenvolvidas nos contextos de ensino considerados, para em seguida realizarmos uma análise das mesmas. Finalizamos apresentando algumas considerações.

ENSINO POR INVESTIGAÇÃO E TDIC

O desenvolvimento de práticas pedagógicas que estimulem o pensamento do aluno, conduzindo o professor ao papel de mediador, provocador e incentivador, desenraizando o aluno da posição passiva comumente intrínseca em nosso ambiente educacional carrega consigo inúmeros desafios, que implicam em tirar tanto o aluno quanto o professor da sua zona de conforto.

Quando o aluno é desafiado, é colocado em uma situação em que os conhecimentos ou técnicas conhecidas não são suficientes para solucionar seu problema, ou quando se depara com informações que contradizem o que pensa, é gerado um desequilíbrio cognitivo e é exatamente este desequilíbrio que possibilita a construção de novos conhecimentos.

Nesse sentido, é que, dentre as práticas pedagógicas que incentivamos, optamos pelo Ensino por Investigação, por se tratar de uma tendência que tem sido muito discutida e estimulada em diversos países, em virtude de seu potencial para oportunizar o desenvolvimento de capacidades como “de saber pensar, refletir, analisar e concluir, o que deixa o aluno em condições de dominar o conhecimento apoiado em sua autoconfiança e autonomia” (MENDES, 2009, p. 81). Sasseron (2015) afirma que se trata de uma abordagem didática que possibilita abordar conceitos, realizar trabalho colaborativo, desenvolver a argumentação dos alunos.

Tudella *et al.* (1999) ponderam que, em atividades de investigação, as questões são pouco estruturadas e quando trabalhadas por alunos podem seguir caminhos imprevisíveis, encontrando “os seus próprios caminhos experimentando, conjecturando” (TUDELLA *et al.*, 1999, p. 1). Isto fica evidente quando formulam questões e hipóteses, elaboram estratégias de resolução, estabelecem relação entre conceitos, sistematizam e generalizam resultados e testam suas conjecturas. Segundo Clement *et al.* (2015, p. 123), o Ensino por Investigação possibilita “a configuração de situações-problema que demandam participação ativa dos alunos na elaboração das soluções que, necessariamente, conduzem à aprendizagem de novos saberes”.

Fundamentadas em Skovsmose (2000) consideramos, assim como Zompero e Laburú (2011), que uma das características essenciais para que o ensino seja considerado de cunho investigativo é que os alunos aceitem o convite do professor, ou seja, aceitem pesquisar com afinco, testar conjecturas, procurar com atenção, indagar e buscar provas para suas descobertas.

Outra característica que consideramos fazer parte de uma atividade investigativa é a situação apresentar-se um problema para o aluno ou grupo de alunos, como algo que não pode ser resolvido imediatamente ou com aplicação de regras e técnicas bem definidas (CLEMENT *et al.*, 2015). O problema não precisa necessariamente estar definido, pois, por vezes a situação é que gera um problema para o aluno.

A terceira característica é a elaboração de questões e hipóteses que implicam em testes e busca por prova ou demonstração. Esta busca é uma experiência ímpar e proporciona o desenvolvimento da capacidade de observação, síntese e generalização.

De certa forma, o Ensino por Investigação destaca a importância “da problematização; das atividades experimentais/exploratórias; da discussão do processo investigativo com os pares; do registro tanto do processo quanto dos resultados; da relação da pesquisa com a realidade cotidiana e da socialização dos resultados” (SEDANO; CARVALHO, 2017, p. 202-203). Entendendo, assim como Sasseron (2015), que essa abordagem pedagógica pode estar associada a quaisquer recursos de ensino, dependendo das orientações do professor, é que nos apoiamos na integração de TDIC para mediar o processo de investigação em um ambiente virtual de ensino e aprendizagem.

Pesquisas que discutem a integração de TDIC no processo de ensino e da aprendizagem de Matemática têm crescido e se destacado no âmbito da Educação Matemática. Os resultados parecem indicar que a integração de recursos tecnológicos impulsiona o Ensino por Investigação (TRACTENBERG *et al.*, 2010, BORBA *et al.*, 2016, DANTAS; LINS, 2017, BORSSOI; SILVA, 2017). No entanto, há espaço para estudos que discutam como isso pode se dar.

Segundo Borba *et al.* (2016) as mudanças na comunicação provocadas pela influência da *internet*, alteram a maneira como nos relacionamos uns com os outros. No contexto educacional, isso permite novos problemas de pesquisa, dentre os quais, aqueles sobre a forma como a *internet* e as TDIC, em geral, podem ser usadas em um ambiente de ensino híbrido. “Atualmente, parece claro que a tecnologia digital está ‘desconstruindo’ a noção de sala de aula” (BORBA *et al.*, 2016, p. 605).

O conceito de ambiente educacional que vimos formulando busca ampliar o espaço da sala de aula considerando o potencial que diferentes mídias que permeiam o contexto escolar, das quais os alunos fazem uso, oferecem. Dentre as inúmeras possibilidades de TDIC estão: *smartphones* com diversos aplicativos, *softwares* de simulação ou *softwares* tipo CAS (*Computer Algebra System*) e ambientes virtuais de ensino e aprendizagem (AVEA) que permitem organizar, em um espaço, diferentes TDIC citadas.

De acordo com Bacich *et al.* (2015), um Ambiente Virtual de Ensino e Aprendizagem é entendido como um espaço que permite a construção coletiva do conhecimento e o desenvolvimento da aprendizagem. É, também, uma ferramenta que oferece meios para a organização de materiais ou atividades que possam apoiar o processo de ensino e de aprendizagem.

Buscamos organizar materiais de ensino articulando os espaços presenciais e os ambientes virtuais. Essa proposição nos remete ao conceito de Ensino Híbrido, ou *blended learning*, que segundo Horn e Staker (2015) é uma mescla do ensino presencial com o virtual, dentro e fora da escola.

Conforme Bacich *et al.* (2015, p. 51-52), “A expressão *ensino híbrido* está enraizada em uma ideia de educação híbrida, em que não existe uma forma única de aprender e na qual a aprendizagem é um processo contínuo, que ocorre de diferentes formas, em diferentes espaços”.

Levando em consideração os apontamentos realizados, nos apoiamos nas assertivas de Sasseron (2015, p. 58) de que o Ensino por Investigação “extravasa o âmbito de uma metodologia de ensino apropriada apenas a certos conteúdos e temas, podendo ser colocada em prática nas mais distintas aulas, sob as mais diversas formas e para os diferentes conteúdos” e consideramos que tal abordagem didática é adequada para articular conteúdos matemáticos aos estudados no contexto dos cursos superiores mediados por AVEA.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

Com o objetivo de evidenciar o potencial das TDIC em aulas de Matemática do ensino superior, quando desenvolvidas por meio do Ensino por Investigação em AVEA, descrevemos e analisamos atividades desenvolvidas com alunos de uma universidade pública Federal localizada no estado do Paraná, orientadas pelas autoras deste artigo.

As atividades investigativas nas quais nos pautamos configuram-se como parte integrante do programa das disciplinas em cursos de graduação, dentre as quais Cálculo Diferencial e Integral 1, Cálculo Diferencial e Integral 2 e Equações Diferenciais Ordinárias. Nossas ações têm sido empreendidas colaborativamente desde o ano de 2013, tomando o Ensino por Investigação como aporte pedagógico.

A estrutura curricular dos cursos oferecidos pela instituição em que trabalhamos contempla, dentre outras, turmas em que as disciplinas são oferecidas presencialmente e turmas em que as disciplinas são sem presença obrigatória (SPO). As disciplinas SPO são oferecidas em situações específicas, como por exemplo, turmas de dependência em que o aluno já tenha cursado a disciplina regularmente, com presença obrigatória.

Levando em consideração os alcances e os propósitos de nossa investigação, tratamos de três contextos de ensino. Fundamentamos nossa escolha nas características das abordagens das TDIC no AVEA nas diferentes disciplinas dos cursos em que as atividades foram desenvolvidas.

Cálculo Diferencial e Integral 1 para turmas na modalidade SPO: a disciplina foi ofertada por três vezes, a partir de 2015, por uma das autoras deste artigo. A modalidade, embora SPO, permitia aos alunos, além de atendimento virtual, encontros presenciais destinado a tratar pontualmente

dos assuntos planejados para o estudo semanal. Os encontros com a docente ou com monitor, individuais ou em pequenos grupos, serviam de suporte aos alunos. Em Borssoi *et al.* (2017) discutimos uma atividade investigativa (problema da calha) proposta a uma das turmas.

Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) para turmas regulares: nesse caso, a docente, responsável por três turmas vinculadas a diferentes cursos de graduação (engenharias e licenciatura) no primeiro semestre de 2017, optou por usar a mesma sala do Moodle para o compartilhamento de materiais de estudo, fóruns para interação entre os 82 alunos e a professora e atividades de avaliação. O intuito da docente em agregar no mesmo AVEA alunos de diferentes cursos, além de diminuir o tempo de organização de diferentes espaços virtuais, foi proporcionar aos alunos a experiência de interagir com pessoas que poderiam nem mesmo conhecer presencialmente. Uma das atividades investigativas (sobre a Lei de Resfriamento de Newton) propunha um trabalho em pequenos grupos por meio de uma *wiki* (ferramenta disponível no Moodle para trabalho colaborativo).

Cálculo Diferencial e Integral 2 (CDI 2) para turmas regulares: nos moldes do exposto para as turmas de EDO, na experiência com CDI 2, duas das autoras desse artigo compartilhavam o mesmo AVEA sendo uma responsável pelas aulas presenciais de uma das turmas e a outra responsável pelas de outras duas turmas de cursos de engenharia, totalizando 124 participantes, sendo um deles o monitor. As docentes planejaram o AVEA em conjunto, desde o material a ser disponibilizado até as atividades avaliativas. Ambas eram responsáveis pela comunicação com os alunos e *feedback* para atividades avaliativas no espaço virtual.

Considerando a pesquisa qualitativa, nos inspiramos na metodologia de análise denominada *Research Design*, orientadas pelo *Design Experiments*. Para Lesh (2002, p. 29), a *Research Design* “envolve novas maneiras de pensar sobre a natureza dos conhecimentos e das habilidades matemáticas em desenvolvimento dos alunos e novas maneiras de pensar sobre a natureza do ensino, da aprendizagem e da resolução de problemas eficazes”. A investigação que realizamos está alicerçada nas maneiras de pensar o ensino considerando atividades investigativas mediadas pelas TDIC presentes em nossas práticas desde o ano de 2013. A implementação de TDIC, neste período, tem se configurado enquanto um design que possibilita a aprendizagem de conteúdos matemáticos.

ENSINO POR INVESTIGAÇÃO IMPLEMENTADO POR MEIO DE AVEA: UMA ANÁLISE


O AVEA, cujo suporte é disponibilizado pela instituição de ensino em que atuamos, é o Moodle (*Modular Object Oriented Dynamic Learning Environment*). Este oferece uma variedade de recursos para organizar disciplinas no sentido do ensino híbrido. Mencionamos três contextos de ensino já experienciados em que consideramos também o ensino por investigação.

Em todos os contextos descritos na seção anterior (i, ii e iii), no AVEA, estavam disponíveis materiais de apoio selecionados ou elaborados pela(s) docente(s), com intenção de orientar o estudo dos alunos no sentido do ensino híbrido, dentre eles: notas de aula, livros eletrônicos de acesso livre, *links* para videoaulas, bem como, acesso a recursos educacionais digitais com potencial para exploração de conceitos pertinentes a cada disciplina desenvolvidos para compor as atividades de aprendizagem, que em maior ou menor grau tinham cunho investigativo. Isso porque, segundo Horn e Staker (2015) o ensino híbrido é uma mescla do presencial com o virtual, dentro e fora do ambiente escolar.


Em seguida apresentamos os recursos educacionais digitais disponíveis nos AVEA dos contextos de ensino investigados.

A Figura 1 apresenta uma atividade investigativa que foi proposta para ser desenvolvida em grupos na disciplina de Cálculo SPO. Os alunos, organizados em grupos, interagiam e registravam o desenvolvimento em uma *wiki*. Um recurso educacional digital (<http://ggbtu.be/mppCiv7aU>) foi sugerido para possibilitar que os alunos pudessem analisar o comportamento das variáveis da situação-problema, testar hipóteses e construir um modelo matemático para então responder ao problema e determinar o valor do ângulo de uma calha que permitiria a maior vazão de água.

Figura 1 - Atividade investigativa para Cálculo SPO

Uma representação da calha pode ser acessada no link <http://ggbtu.be/mppCiv7aU> e poderá auxiliá-lo na compreensão da situação-problema e na validação do resultado que foi apresentado pelo , que, se estiver correto, deverá coincidir com o que vocês encontrarão analiticamente.

Uma calha deve ser construída com uma folha de metal de largura 30 cm dobrando-se para cima $\frac{1}{3}$ da folha de cada lado, com isso, um ângulo θ é formado com a horizontal. Decida como deve ser escolhido θ de forma que a capacidade de carregar a água da calha seja máxima?



Nessa atividade espera-se que você:

- Considere a figura acima e obtenha a função a ser maximizada;
- Determine o intervalo de validade para ângulo θ em radianos;
- Explique qual deve ser o encaminhamento para se calcular a solução da situação;
- Encontre o ângulo que maximiza a função.
- Comente sobre as dificuldades encontradas para resolver a questão.

Fonte: arquivos da professora com recorte do AVEA.

Neste caso, evidenciamos o caráter investigativo da atividade, visto que, para desenvolvê-la, o aluno “raciocina sobre o problema proposto e procura respostas para sua solução a partir da proposição de hipóteses e análise dos dados, manifestando assim, suas habilidades de cognição” (SUART; MARCONDES, 2009, p. 51-52). A TDIC traz diferentes possibilidades de testar hipóteses por meio da manipulação de parâmetros, além de propiciar múltiplas representações para o objeto matemático que dela emergiu.

Nessa proposição, o AVEA possibilitou evidenciar alguns aspectos: o trabalho colaborativo, permitindo a interação entre os alunos de cada grupo e destes com a professora ou com o monitor; a integração de diferentes recursos digitais (fotografia de manuscritos com parte da resolução, gráficos gerados por aplicativos on-line, etc.) no mesmo espaço (*wiki*). Isso corrobora com Borssoi e Silva (2017, p. 272) de que o AVEA tem potencial para “a partir do trabalho em grupos, mesmo quando os seus integrantes não se conheçam ou interajam presencialmente, pode-se perceber que, quando os alunos aceitam o convite, a tarefa pode ter êxito e resultar em um produto coletivo”. O Quadro 1 traz excertos

de um dos grupos de alunos em que é possível evidenciar os aspectos mencionados, principalmente no que diz respeito à estruturação do modelo matemático que possibilita representar a situação.

Quadro 1 - Registros do desenvolvimento da atividade no AVEA por um dos grupos.

(██████████)

Idéia 1: Fazer uma calha dobrando as bordas perpendicularmente a folha.
 $f(x) = x(30-2x)$
 $f(x) = -2x^2 + 30x$
 derivar e igualar a 0 para descobrir o valor de x para que o volume seja máximo.
 $f'(x) = -4x + 30$
 $0 = -4x + 30$
 $x = 30/4 = 7,5$
 Teste para $x = 7,5$
 $f(7,5) = -2(7,5)^2 + 30(7,5)$
 $f(7,5) = -112,5 + 225 = 112,5$
 Volume máximo da calha é $112,5\text{cm}^3$

Professora: ██████████ que argumento matemático pode garantir que 7,5 é o lado que maximiza a função usada? A unidade de medida indicada em " $112,5\text{cm}^3$ " está adequada? **Outros colegas podem comentar.**

Professora: ██████████ - Gostaria que os colegas de grupo comentassem se consideram essa opção viável e se tiveram alguma outra ideia. Todos entenderam o que o x e o $f(x)$ representam? É sempre bom definir as variáveis inicialmente, para que todos entendam a que se referem as equações (modelos matemáticos).

Será que essa é a melhor calha? Se alguém tiver outra sugestão pode apresentar. fico no aguardo de novas postagens. Lembrem-se: cada integrante só passa a ser considerado na avaliação se tiver participação no desenvolvimento do trabalho, com postagens nesse espaço virtual

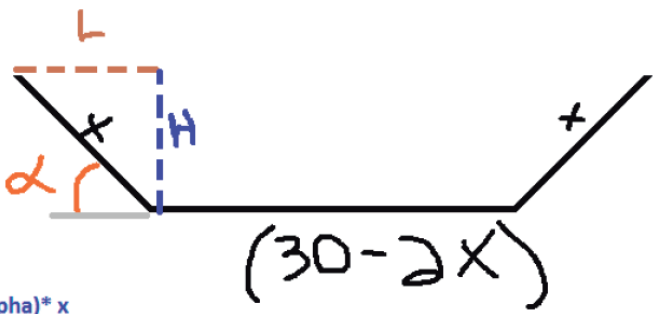
(██████████)

Eu concordo com a ██████████.

Entendo também o porque de derivar e igualar a zero para encontrar o x máximo. Pois quando se substitui o valor encontrado para x na equação original (a que não foi derivada) se tem o valor do volume máximo da calha. Acredito que essa seja a melhor opção de calha.

(██████████)

como a professora deu a entender que este não é o método mais eficiente pensei em angular as laterais da calha formando um trapézio como a imagem abaixo:



$H = \text{sen}(\alpha) * x$
 $L = \text{cos}(\alpha) * x$
 $V = H * (L + 30 - 2x)$ $V = x \text{sen}(\alpha) * (x \text{cos}(\alpha) + 30 - 2x)$

(observar que quando escrevi "V" e "volume" na verdade me referia a área do trapézio que é o que queremos maximizar.

Fonte: arquivos da professora.

Diante de uma solução apresentada por um dos integrantes do grupo que desenvolveu a atividade da Figura 1, a professora estabelece uma intervenção com o intuito de questionar e fazer com que os alunos do grupo discutissem entre si de modo a validar ou mesmo apresentar outro encaminhamento para a resolução. Diante da intervenção da professora no AVEA, um dos integrantes concordou com a solução apresentada e outro apresentou outra representação para o fenômeno em estudo. Isso está em consonância com o que apontam Silva e Vertuan (2018, p. 505) de que “o modo como se dá essa intervenção influencia em certa medida os encaminhamentos de resolução tomados pelos alunos, bem como as possibilidades de discussão e mobilização do conhecimento”.

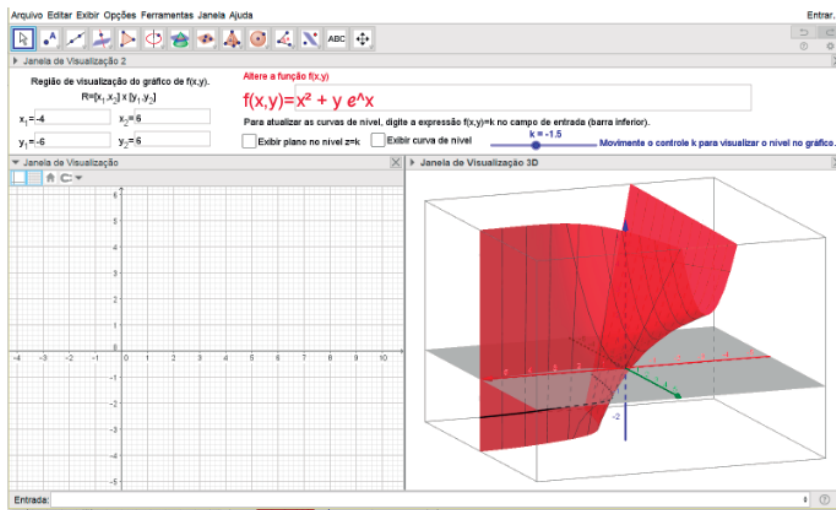
Na atividade investigativa ilustrada na Figura 2 (assim como também na Figura 3) os recursos digitais representados estavam disponíveis no AVEA sem estarem vinculados a uma atividade específica, no entanto, os alunos poderiam recorrer a eles em diferentes situações.

Figura 2 - Recursos educacionais digitais para CDI 2

Gráfico de função de duas variáveis reais e curvas de nível

Para visualizar as curvas de nível o gráfico da função $f(x,y)$ ative o(s) botão(ões) e digite a equação $f(x,y)=k$ no campo de entrada, de acordo com a expressão atual de $f(x,y)$.

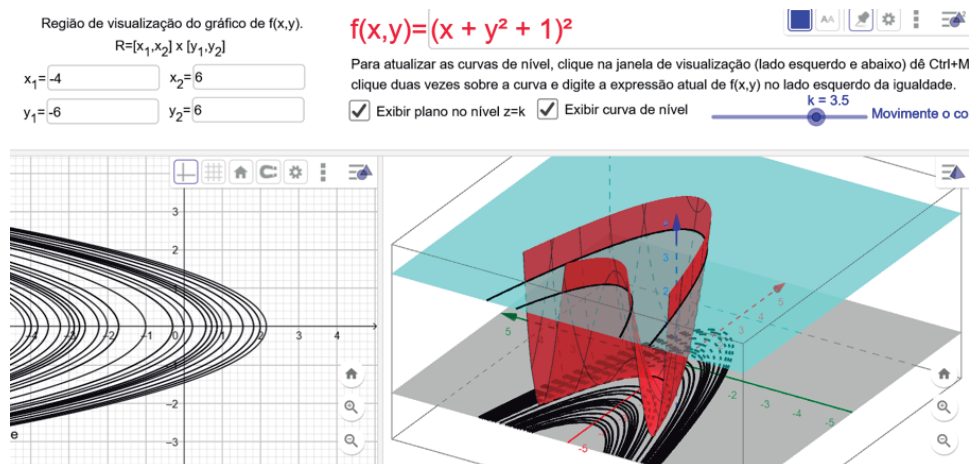
Você pode baixar o arquivo ([clique aqui](#)) para usar em seu computador pessoal, desde que tenha o **Geogebra** instalado, ou abrir o recurso digital da figura abaixo pelo link <https://ggbm.at/gZhr7WRy> e manipulá-lo on-line.



Fonte: arquivos da professora com recorte do AVEA.

O recurso educacional digital da Figura 2 possibilitava aos alunos de CDI 2 a representação de diferentes funções de duas variáveis, assim como a visualização de curvas de nível na janela 2D do aplicativo GeoGebra e sua correspondente visualização no espaço (janela 3D), como mostra a Figura 3.

Figura 3 - Representação de função de duas variáveis a partir de um recurso digital integrado ao AVEA.



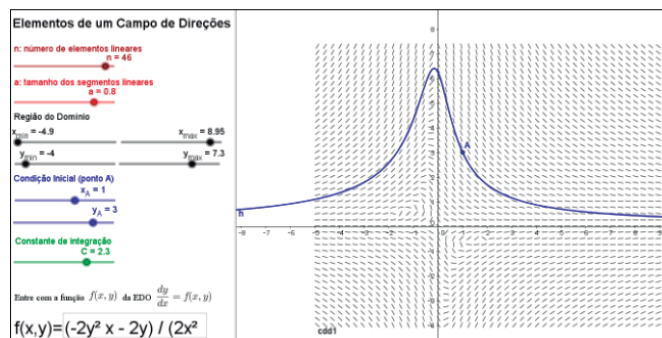
Fonte: arquivos das professoras.

Com as orientações produzidas pelas professoras e apresentadas no enunciado da questão - Para visualizar as curvas de nível e o gráfico da função $f(x,y)$, ative o(s) botão(ões) e digite a equação $f(x,y) = k$ no campo de entrada, de acordo com a expressão atual de $f(x,y)$ - os alunos poderiam investigar diferentes funções de duas variáveis, transitando entre diferentes representações possibilitadas pelos *softwares* disponibilizados. Na abordagem pedagógica que subsidiou a proposta da atividade, os alunos têm papel ativo “na construção de entendimento sobre os conhecimentos científicos” (SASSERON, 2015, p. 58), estudados na disciplina.

O recurso da Figura 4 permitia aos alunos explorar a solução de diferentes EDO de primeira ordem, a partir do campo de direções, ajustando parâmetros para o intervalo de visualização e da condição inicial.

Figura 4 -Recursos educacionais digitais para EDO

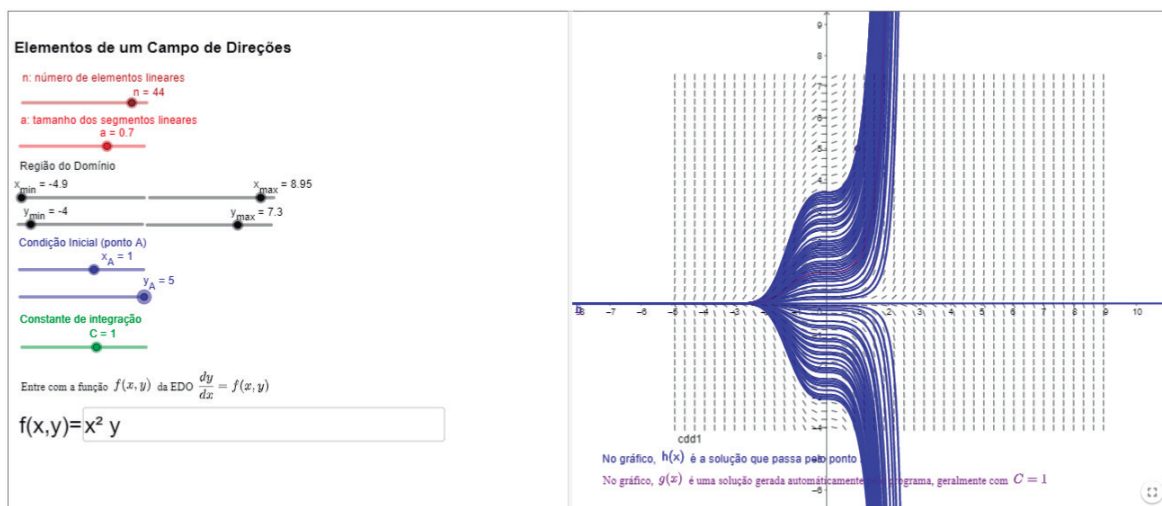
- Como plotar campo de direções com GeoGebra?
[Assista...](#)
- Link para um recurso digital sobre Campos de Direções
[Abrir](#)



Fonte: arquivos da professora com recorte do AVEA.

Esse encaminhamento, permitiu aos alunos analisar comportamentos de variáveis e simular comportamento de modelos matemáticos a partir da alteração de parâmetros. Para Gonçalves e Reis (2013, p. 427), “o uso de tecnologias, principalmente no ensino de Cálculo, pode expandir possibilidades de trabalho com diferentes abordagens e representações algébricas e geométricas, de forma rápida e articulada”, conforme podemos visualizar na Figura 5.


Figura 5 - Representação da solução de uma equação diferencial ordinária a diferentes condições iniciais



Fonte: arquivos da professora.

Na atividade representada na Figura 6, os alunos de EDO poderiam acessar o *software* livre *Modellus* para simulação de situações-problema representadas por meio de equações diferenciais ou sistemas de equações diferenciais de primeira ordem. Estavam disponíveis também um videotutorial (<https://www.screencast.com/t/9B4Du3XGaSso>) com instruções de uso e um arquivo para explorar um exemplo de atividade investigativa (<https://drive.google.com/file/d/1-RhNpmCeoGlmw9ZHK6x-P7uDSaulD9uF1/view?usp=sharing>), assim, os alunos poderiam utilizar o *software* sem depender unicamente das orientações da professora.

Figura 6 - Outros recursos educacionais digitais para EDO.



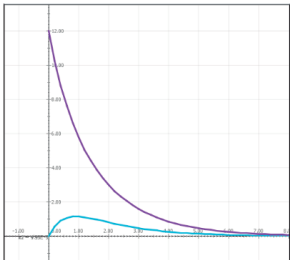
Simulação de Modelos Matemáticos

Baixar executável --> [Modellus 4.5.exe](#)

Exemplo de uso do Modellus: clique para assistir

(nesse vídeo você acompanha um exemplo introdutório de simulação e opções de configuração.)

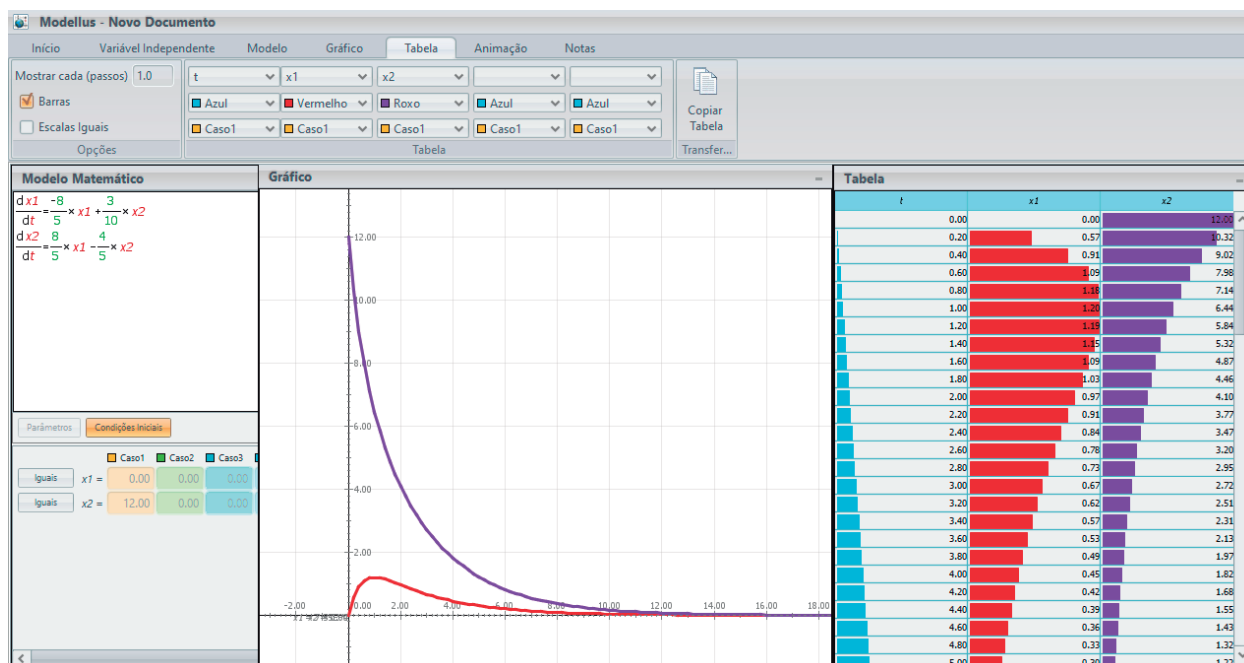
[Arquivo] Problema de Mistura em dois tanques



Fonte: arquivos da professora com recorte do AVEA.

A Figura 7 traz registros de diferentes representações proporcionadas pelo *software Modellus* no estudo de um problema de misturas proposto às turmas de EDO.

Figura 7 - Representação da solução de uma equação diferencial ordinária.

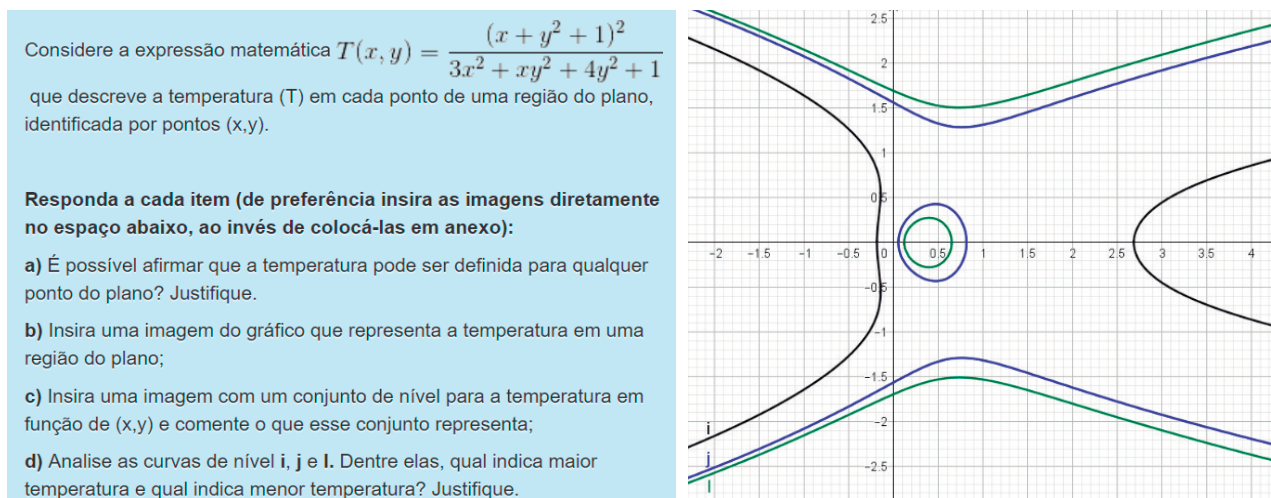


Fonte: arquivos da professora.

Entendemos que as atividades apresentadas (Figura 1, Figura 2, Figura 4, Figura 6) contemplam as três características de atividades investigativas conforme Zompero e Laború (2011). No que diz respeito à primeira característica, os alunos dos três contextos investigados, de certa forma, aceitaram o convite para desenvolver as atividades, pois faziam parte do ambiente em que as disciplinas foram organizadas e das quais escolheram cursar. Em se tratando de atividades das quais os alunos manipularam recursos digitais e estabeleceram interações com os colegas e professoras, em busca de esclarecer dúvidas, corresponderam a problemas que não tinham de antemão regras e técnicas bem definidas para serem resolvidos, segunda característica de atividades investigativas. As resoluções foram encaminhadas pelos alunos por meio de hipóteses que implicam em testes e busca de generalizar ou mesmo apresentar uma resposta para o problema investigado, terceira característica de atividades investigativas.

No AVEA também foram propostas atividades cuja característica investigativa não se apresentava de forma explícita, sendo necessárias intervenções por parte da docente. A Figura 8 apresenta um exemplo desse tipo de atividade e que foi proposta para as turmas de CDI 2.

Figura 8 - Exemplo de atividade proposta no AVEA de CDI 2.



Fonte: arquivo das professoras com recorte do AVEA.

Podemos conjecturar que a atividade como apresentada tem potencial para se configurar enquanto atividade investigativa, isso porque, dependendo das respostas do aluno aos itens abrem-se oportunidades para a intervenção da docente por meio da ferramenta de *feedback* do AVEA. A Figura 9 ilustra a resposta de uma aluna ao item a) da questão da Figura 8 e um comentário de *feedback* da professora.

Figura 9 - Recorte da resposta de uma aluna ao item a).

a) Sim, é possível afirmar que a temperatura esta definida para todos os pontos do plano. Isso é afirmado porque não há nenhuma restrição na função pois a função do dividendo é sempre continua e a do divisor também, mas além de ser continua, a função do divisor não é nula em nenhum dos pontos do plano.

b) imagem em arquivos enviados

c) as curvas de níveis representam as temperaturas, em alguns pontos é possível definir máximos e mínimos locais.

[imagens questões.docx](#)

Comentário:
seguem comentários sobre suas respostas. Você pode revisar suas respostas e se conseguir melhorá-las, pode reenviá-las, ok. **Cada item tem valor 1,0.**

Obrigada por responder as três últimas questões.

Item a) [0,4]: Sua resposta não está satisfatória. Embora você tenha razão quanto a continuidade do numerado e de denominador, não é verdade que o denominador não se anula. É importante rever isso e encontrar os pontos de restrição, ok.

Fonte: arquivo das professoras com recorte do AVEA.

Neste caso, a proposta não se configura como uma atividade investigativa se a aluna não se sentir provocada a partir da intervenção. Assim, o *feedback* consiste em um potencial da TDIC para o Ensino por Investigação no AVEA, pois um processo investigativo foi colocado em prática pela professora - É importante rever isso e encontrar os pontos de restrição - e a aluna precisa realizá-lo de modo a tornar sua resposta satisfatória.

No planejamento da atividade foram antecipadas possíveis respostas dos alunos de modo que o *feedback* os colocasse em atitude de investigação. Assim, os alunos deveriam realizar a atividade individualmente respondendo aos itens que seriam analisados por uma das docentes, com a qual poderiam se comunicar preferencialmente pelo AVEA para que a evolução das discussões ficasse registrada. Com isso, o AVEA se configurou como uma extensão da sala de aula. Essa ideia é complementada pelas assertivas de Borba *et al.* (2016), para os quais:

A experiência on-line pode oferecer aos alunos oportunidades de revisitar e estender ideias e conceitos que já haviam visto na sala de aula presencial. Ele também pode ser usado como uma maneira de “inverter” a experiência da sala de aula, dando aos alunos oportunidades para encontrar, explorar e refletir sobre ideias e conceitos antes de se envolverem com eles na sala de aula presencial (BORBA *et al.*, 2016, p. 603).

O enunciado da questão traz um modelo matemático que representa a temperatura em cada ponto de uma região de um plano. No item a) pergunta-se: “É possível afirmar que a temperatura pode ser definida para qualquer ponto do plano? Justifique”. Considerando possíveis respostas dos alunos, no planejamento configurou-se alguns encaminhamentos.

Se o aluno respondesse “Não, pois há restrição no domínio da função”, a resposta seria considerada correta, mas não permitiria evidenciar se o aluno tem habilidade de identificar os pontos de descontinuidade da função, por exemplo. Uma intervenção docente do tipo “ok, complemente sua resposta indicando os pontos de restrição” de certo oportunizaria o aluno revisitar o item de maneira que reformulasse sua resposta para atender o que lhe foi requerido.

Se a resposta fosse positiva estaria indicando equívoco do aluno e intervenções do tipo “Sua resposta não está correta, você não analisou o domínio da função algebricamente. Procure verificar o comportamento da equação: denominador=0.” ou “Sua resposta não está correta, você não analisou o domínio da função algebricamente. Verifique o que ocorre quando o ponto é $(x,y)=(-5,\text{raizquadrada}(74))$, por exemplo.” poderia orientá-lo a repensar os caminhos experimentando, conjecturando e desenvolvendo argumentação que o levasse a percepção de seu equívoco.

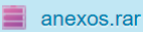
O Quadro 2 apresenta recortes da interação por meio de um fórum no AVEA a partir das respostas à atividade avaliativa e dos comentários de *feedback*.


Quadro 2 - Registros do desenvolvimento do item a) da Figura 8.

A) Sim, pois o domínio pertence a todos os reais sem nenhuma restrição. Sendo assim a imagem pode assumir qualquer número real.

Porque, $(3x^2+xy^2+4y^2+1)$ nunca terá um numero real igual a zero. Logo ela existirá em qualquer ponto.

B) Imagem anexada.




Comentário:
, seguem comentários sobre suas respostas. Você pode revisar suas respostas e se conseguir melhorá-las, pode reenviá-las, ok.

Cada item tem valor 1,0.

Item a) [0,0]: Sua resposta não está correta, você não analisou o domínio da função algebricamente. Teste o ponto $(x,y)=(-5,\sqrt{76})$, por exemplo, e veja o que ocorre.


Nota do item revisada após discussão presencial (em 05dez): 1,0


Re: Fórum sobre a Atividade 1
 por  - quarta, 4 Out 2017, 22:09

Boa noite professora, a senhora me disse que "Sua resposta não está correta, você não analisou o domínio da função algebricamente. Teste o ponto $(x,y)=(-5,\sqrt{74})$, por exemplo, e veja o que ocorre."

Substituí os valores sugeridos sendo $(-5,\sqrt{74})$ na equação em questão, e percebi que há nenhum problema com esse ponto sendo imagem igual a 2

[Link direto](#) | [Marcar como não lida](#) | [Mostrar principal](#) | [Editar](#) | [Excluir](#) | [Responder](#)

Re: Fórum sobre a Atividade 1
 por  - quarta, 18 Out 2017, 15:46

Foi bom você ter comentado . Obrigada pelo retorno.

Falha minha! Na verdade o ponto a ser testado é $(x,y)=(-5,\sqrt{76})$

[Link direto](#) | [Marcar como não lida](#) | [Mostrar principal](#) | [Editar](#) | [Excluir](#) | [Responder](#)

Continuidade...

O aluno a que se referem parte dos registros desse quadro se manifestou ao final de uma aula afirmando ter percebido, após testar o ponto $(x,y)=(-5,\sqrt{76})$, que havia restrição no domínio da função. A partir de então, com a presença de outros colegas, estabeleceu-se novas interações em que a professora instigou os alunos a investigar se este seria o único ponto de restrição do domínio e como poderiam proceder para determinar precisamente o conjunto de pontos de restrição. Os alunos se sentiram desafiados e trabalharam em conjunto na lousa buscando resolver a equação $3x^2+xy^2+4y^2+1=0$. A determinação do conjunto que representa o domínio da função de duas variáveis não foi imediata, mas, com algumas intervenções da professora e o trabalho colaborativo com os pares a atividade foi concluída com êxito. A disponibilidade de um computador pessoal na sala permitiu que validassem a solução a partir do esboço do gráfico da equação, representado na figura a seguir.

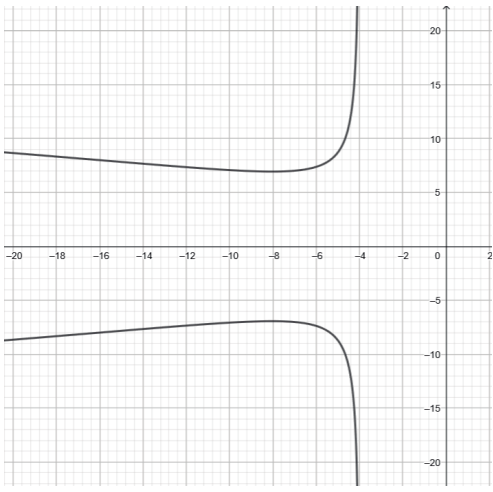
$$3x^2 + xy^2 + 4y^2 + 1 = 0$$

$$3x^2 + y^2(x + 4) + 1 = 0$$

$$y^2 = -\frac{(3x^2 + 1)}{x + 4}$$

$$y = \sqrt{-\frac{(3x^2 + 1)}{x + 4}}$$

$$Dm(f(x, y)) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < -4 \text{ e } y \in \sqrt{\frac{(3x^2 + 1)}{x}} \}$$



Fonte: arquivos das professoras com recorte do AVEA.

Conforme Borba *et al.* (2016, p. 605) “a colaboração mediada por tecnologia pode levar a formas qualitativamente diferentes de conhecimentos e relacionamentos entre alunos, professores e a própria tecnologia”. Estendemos essa inferência ao trabalho colaborativo experienciado pelas docentes que compartilharam o AVEA.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao realizar uma análise das práticas docentes que temos empreendido no AVEA, buscamos indícios que permitissem inferir sobre o potencial das TDIC em aulas de Matemática do ensino superior quando desenvolvidas por meio do Ensino por Investigação. Neste cenário, após realizarmos aproximações entre os três contextos de ensino - Cálculo Diferencial e Integral 1 (SPO), turmas regulares de Equações Diferenciais Ordinárias e Cálculo Diferencial e Integral 2 - evidenciamos que as TDIC apresentam potencial para testar hipóteses, analisar comportamentos de variáveis, simular comportamento de modelos matemáticos a partir da alteração de parâmetros e transitar entre diferentes representações de objetos matemáticos presentes em atividades investigativas.

Conforme apresentamos em nosso referencial teórico, uma atividade é de cunho investigativo se permitir que o aluno observe, encontre padrões, construa hipóteses, teste-as e se for necessário construa outras hipóteses para solucionar seu problema. Neste sentido, as intervenções docentes na abordagem pedagógica do Ensino por Investigação têm papel fundamental para instigar nos alunos o senso investigativo.

Levando em consideração a diversidade de ambientes educacionais que o aluno está inserido para desenvolver suas atividades, consideramos a potencialidade que ambientes virtuais podem desencadear, intentamos empreender nossas pesquisas para configurar ações que permitam estruturar e implementar cada vez mais esse ambiente no desenvolvimento de atividades investigativas. Esse interesse está ancorado no fato de que ao fazer uso do AVEA podemos ampliar o espaço de interação e não limitamos o seu tempo, permitindo que novos elementos sejam incorporados pelos alunos.

Ao permitir espaços comunicativos variados (*e-mail*, *chat*, fórum, redes sociais etc.), cada cenário assume uma dimensão discursiva própria no aprendizado. Embora a aprendizagem não tenha sido o foco da discussão neste artigo, esse é um tema que merece ser evidenciado, o que pretendemos desenvolver em trabalhos futuros.

A flexibilização no ensino, com a incorporação de espaços como o virtual para desenvolvimento de atividades que visam a aprendizagem, requer, também do docente, abertura para se analisar a interação dos alunos em espaços menos formais.

Desse modo, as práticas docentes necessitam de alterações em um AVEA, por exemplo, a avaliação deve seguir um encaminhamento em que a aprendizagem é evidenciada por diferentes formas de participação e não apenas pela realização de tarefas formativas.

Entendemos que os elementos que trouxemos à discussão nesse texto carecem de amadurecimento. Nessa perspectiva é que conduziremos nossa investigação sobre o desenvolvimento de atividades investigativas em AVEA a fim de que trabalhos futuros possam contribuir com o Ensino por Investigação em Educação Matemática.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, L. M. W.; FERRUZZI, E. C. Uma aproximação socioepistemológica para a modelagem matemática. **Alexandria. Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v. 2, n. 2, p. 117-134, 2009.
- ARAÚJO, J. L.; CAMPOS, I. S. Negotiating the Use of Mathematics in a Mathematical Modelling Project. In: STILLMAN, G. A.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Eds.), **Mathematical Modelling in Education Research and Practice: cultural, social and cognitive influences**, p. 283-291. New York: Springer, 2015.
- BACICH, L.; TANZI NETO, A.; TREVISANI, F. M. (Org.). **Ensino híbrido: personalização e tecnologia na educação**. Porto Alegre: Penso, 2015.
- BORBA, M. C.; ASKAR, P.; ENGELBRECHT, J.. Blended learning, e-learning and mobile learning in mathematics Education. **ZDM: The International Journal on Mathematics Education**, v. 48 n. 5, p. 589-610, Aug 2016.
- BORSSOI, A. H.; TREVISAN, A. L.; ELIAS, H. R. Percursos de Aprendizagem de alunos ao resolverem uma Tarefa de Cálculo Diferencial e Integral. **Vidya** (Santa Maria. online), v.37, p.459 - 477, 2017.
- BORSSOI, A. H.; SILVA, K. A. P. Mídias Educacionais em um Ambiente Virtual de Ensino e Aprendizagem: ampliando possibilidades para o trabalho colaborativo. **Contexto & Educação**, Editora Unijuí, Ano 32, n. 103, p. 248-274, Set./Dez. 2017.
- CLEMENT, L. CUSTÓDIO, J. F.; FILHO, J. P. A. Potencialidades do Ensino por Investigação para Promoção da Motivação Autônoma na Educação Científica. **Alexandria. Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v. 8, n. 1, p. 101-129, 2015.
- DANTAS, S. C.; LINS, R. C. Reflexões sobre interação e colaboração a partir de um curso On-line. **Bolema**, Rio Claro, SP, v. 31, n. 57, p. 1-34, abr. 2017.
- FERRUZZI, E. C.; ALMEIDA, L. M. W. Diálogos em modelagem matemática. **Ciência & Educação**, v. 21, n. 2. p. 377-394, 2015.
- GONÇALVES, D. C.; REIS, F. S.. Atividades Investigativas de aplicações das derivadas utilizando o GeoGebra. **Bolema**, Rio Claro, v. 27, n. 46, p. 417-432, 2013 . Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1590/S0103-636X2013000300006>. Acessado em: 25 Fev. 2019.
- HORN, M. B.; STAKER, H. **Blended: usando a inovação disruptiva para aprimorar a educação**. Porto Alegre: Penso, 2015.
- IGLIORI, S. B. C.; BELTRÃO, M. E. P. Ensino de Cálculo pela Modelagem Matemática e Aplicações em um Curso Superior Tecnológico. **Unión: Revista Iberoamericanade Educación Matemática**, n. 42. p. 55-76, 2015.
- LESH, R.. Research design in mathematics education: Focusing on design experiments. In ENGLISH, L. D. (Ed.). **Handbook of International Research in Mathematics Education** (p. 27-49). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, 2002.
- MENDES, I. A.. **Matemática e Investigação em sala de aula: tecendo redes cognitivas na aprendizagem**. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009. v. 01. 216p.

MILANI, R. "Sim, eu ouvi o que eles disseram": o diálogo como movimento de ir até onde o outro está. **Bolema**, Rio Claro, v. 31, n. 57, p. 35-52, 2017

RAMOS, N. S.; FONSECA, M. O. S.; TREVISAN, A. L. Ambiente de aprendizagem de cálculo diferencial e integral pautado em episódios de resolução de tarefas. In: SIMPÓSIO NACIONAL DE ENSINO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA, SINECT, 5., 2016, Ponta Grossa. **Anais...** Ponta Grossa: Ed. da UTFPR, 2016. p. 1-11. V. 1.

SASSERON, L. H. Alfabetização científica, ensino por investigação e argumentação: relações entre ciências da natureza e escola. **Revista Ensaio**, 17(especial). 49-67, 2015.

SEDANO, L.; CARVALHO, A. M. P. Ensino de Ciências por Investigação: oportunidades de interação social e sua importância para a construção da autonomia moral. **Alexandria. Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v. 10, n. 1, p. 199-220, 2017.

SILVA, K. A. P.; VERTUAN, R. E. Um estudo sobre as intervenções docentes em contextos de atividades investigativas no âmbito de aulas de Matemática do Ensino Superior. **Ciência & Educação**, Bauru, v. 24, n. 2, p. 501-516, 2018.

SILVA, K. A. P.; VERTUAN, R. E.; SILVA, J. M. G. Ensino por investigação nas aulas de matemática do curso de licenciatura em química. **Amaz RECM - Especial Saberes Profissionais do Professor de Matemática**, v.14, n. 31, Mar-Out. p. 54-72, 2018.

SKOVSMOSE, O. Cenários de investigação. **Bolema**, Rio Claro (SP), n. 14, p. 66-91, 2000.

SUART, R. C.; MARCONDES, M. E. R. A manifestação de habilidades cognitivas em atividades experimentais investigativas no ensino médio de química. **Ciências & Cognição**, v. 14, n. 1. p. 50-74, 2009.

TRACTENBERG, L.; BARBASTEFANO, R.; STRUCHINER, M. Ensino colaborativo on-line (ECO): uma experiência aplicada ao ensino da Matemática. **Bolema**, Rio Claro, SP, v. 23, n. 37, p. 1037-1061, dez. 2010.

TUDELLA, A., FERREIRA, C., BERNARDO, C. PIREA, F. FONSECA, H. SEGURADO, I. VARANDAS, J. Dinâmica de uma aula com investigações. In: ABRANTES, P. PONTE, J. P. FONSECA, H. BRUNHEIRA, L. (Eds.). **Investigações matemáticas na aula e no currículo** (p. 87-96). Lisboa: Projecto MPT e APM, 1999.

ZOMPERO, A. F.; LABURÚ, C. E. Atividades investigativas no ensino de ciências: aspectos históricos e diferentes abordagens. **Ensaio: pesquisa em educação em ciências**, Belo Horizonte, v. 13, n. 3, p. 67-80, 2011.

RECEBIDO EM: 31 dez. 2019

CONCLUÍDO EM: 26 maio 2020

