

EXPLORAR E COMUNICAR IDEIAS SOBRE ISOMETRIAS

EXPLORING AND COMMUNICATING IDEAS ON ISOMETRY

MARIA AUXILIADORA LAGE
MARIA CLARA REZENDE FROTA

RESUMO

Neste artigo, relatam-se resultados de uma pesquisa que investigou as possibilidades de mobilização das formas de pensamento matemático no estudo das Transformações Geométricas no Plano. Três grupos de estudantes, de diferentes níveis de escolaridade, trabalharam com o *software* GeoGebra, na resolução de atividades focalizando as habilidades matemáticas de: visualizar; descobrir e inventar coisas; descrever relações e processos; pensar, montando e desmontando ideias; fazer conjecturas; comunicar ideias. Os arquivos com as construções e os registros escritos dos alunos, além de protocolos de observação, foram analisados, buscando identificar as formas de pensamento algébrico e geométrico mobilizadas e as formas de comunicação utilizadas. Os resultados aqui apresentados apontam que os alunos mobilizaram formas variadas de pensamento matemático, comunicando oralmente suas descobertas sobre isometrias de polígonos, mas apresentaram dificuldades na elaboração dos registros escritos e formalização das ideias matemáticas. O ambiente informatizado e a postura investigativa adotados favoreceram a articulação entre as formas de raciocínio algébrico e geométrico, contribuindo para o estudo das isometrias.

Palavras-chave: Formas de Pensamento Matemático. Investigação Matemática. Comunicação Matemática. Isometrias.

ABSTRACT

In this article it is reported some results of a study that investigated the possibilities of mobilization of the forms of mathematical thinking in the study of Geometric Transformations in the Plan. Three groups of students of different levels of schooling worked with the software program GeoGebra in solving activities focusing on the mathematical skills of visualizing; discovering and inventing things; describing relationships and processes; thinking, assembling and disassembling ideas; making conjectures; and, communicating ideas. The files with the results and students' written records and observation protocols were analyzed in order to identify ways of algebraic and geometric thinking and forms of communication used. The results presented here indicate that students mobilized various forms of mathematical thinking, communicating their findings orally on polygon isometry, but they had difficulties in the preparation of written records and the formalization of mathematical ideas. The computerized environment and investigative approach adopted favored the articulation between the forms of algebraic and geometric reasoning, contributing to the study of isometry.

Keywords: Forms of Mathematical Thinking. Mathematics Research. Mathematics Communication. Isometry.

* Maria Auxiliadora Lage - Fundação Comunitária de Ensino Superior de Itabira - FUNCESI. E-mail: mauxiliadora.lage@hotmail.com

** Maria Clara Rezende Frota - Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerias - PUC Minas. E-mail: mclarafrota@gmail.com

INTRODUÇÃO

As diretrizes curriculares nacionais para o ensino de matemática na escola básica enfatizam o desenvolvimento de uma série de competências e habilidades, entre elas a de selecionar e analisar informações, que exigem dos alunos “a aquisição do conhecimento vinculado ao domínio de um saber fazer Matemática e de um saber pensar matemático” (BRASIL, 1999, p. 252).

Dessa forma, torna-se necessário que os alunos adquiram alguns hábitos de pensamento matemático, no sentido proposto por Cuoco, Goldenberg e Mark (1996) e Goldenberg (1998a, 1998b), como também se insiram em um ambiente de exploração e investigação no sentido proposto por Ponte, Brocardo e Oliveira (2003).

Esses pressupostos teóricos orientaram a pesquisa desenvolvida (LAGE, 2008), que teve como objetivo investigar as possibilidades de mobilização das formas de pensamento matemático no estudo de transformações geométricas no plano. Os conceitos de isometria e de homotetia foram abordados a partir de um trabalho com polígonos e posteriormente foram utilizados no estudo das funções e suas transformações. Neste artigo, são apresentados os resultados relativos ao trabalho com polígonos no estudo de isometrias, aplicado a três grupos de estudantes de diferentes níveis de escolaridade, cursando o ensino médio, a licenciatura e um curso de especialização em educação matemática.

Geometria e álgebra na comunicação de ideias matemáticas

Os Parâmetros Curriculares Nacionais enfatizam a importância de estudos de álgebra que possibilitem ao aluno desenvolver e exercitar sua capacidade de abstrair. Os conceitos geométricos compõem outra parte importante do currículo de Matemática, podendo incentivar o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento, útil para o aluno na compreensão, descrição e representação do mundo em que vive (BRASIL, 1998).

Assim sendo, torna-se relevante um trabalho com as transformações geométricas no plano, permitindo que o aluno estabeleça conexões entre as formas de pensamento algébrico e geométrico. A incorporação na sala de aula do estudo das transformações pode ser uma ferramenta poderosa para a compreensão das propriedades e relações entre objetos matemáticos, bem como para o desenvolvimento de hábitos de pensamento matemático.

Para Goldenberg (1998a), hábitos de pensamento são os “modos de pensar que adquirimos tão bem, tornamos tão naturais e incorporamos tão completamente em nosso repertório que se transformam, por assim dizer, em hábitos mentais” (p. 1).

A organização de um currículo de Matemática deve ter como eixo central o desenvolvimento dos principais modos de pensar em matemática: a tendência a detectar invariâncias; fazer experiências e explorações; descrever formal e informalmente relações e processos; pensar e inventar ideias; visualizar; fazer conjecturas e comunicar ideias (CUOCO; GOLDENBERG; MARK, 1996).

Ao longo da escolaridade, o desenvolvimento desse conjunto de hábitos é importante e requer uma atenção particular do professor. Os alunos podem ser motivados a buscar padrões e invariantes e a exploração e as descobertas feitas por eles próprios podem influenciar positivamente a aprendizagem. Essas explorações e investigações matemáticas desenvolvidas na sala de aula constituem parte da variedade da experiência matemática a que se referem Davis e Hersh (1995). Ao lidarem com um problema matemático, os alunos precisam aprender a jogar com as informações, reparando nos seus atributos independentes, fazendo ensaios para obter resultados experimentais e observá-los (CUOCO; GORDENBERG; MARK, 1996). Esses autores destacam que pensar, desmontar ideias, ser inventor, inserir alterações num sistema já existente e observar são formas de lidar com a matemática que os alunos precisam experimentar. Assim, aos poucos, eles aprendem a levantar conjecturas sobre as situações matemáticas propostas, sendo despertados para a importância de investigar acerca da veracidade das mesmas.

À medida que desenvolvem as várias formas de pensamentos, os alunos são incentivados a descrever, formal e informalmente, relações e processos. A etapa de descrever é importante para compreender uma ideia matemática. Nesse momento, os alunos dizem o que significa aquele conceito ou objeto matemático, podendo inventar notações, discutir e tentar convencer os colegas que determinado resultado é verdadeiro, descrevendo as evidências, mostrando os cálculos, aprendendo sobre como se estruturam as demonstrações

matemáticas. As conjecturas levantadas, as perguntas e opiniões sobre a situação em questão podem ser descritas de forma escrita ou oral e podem favorecer a negociação e divulgação das ideias matemáticas. Esse tipo de experiência deve ser incorporado à sala de aula como forma de ajudar os alunos a desenvolverem capacidades essenciais da comunicação matemática.

A “boa performance de oralidade é uma das competências exigidas pelo atual mercado de trabalho” (PAIS, 2006, p. 44), o que demanda uma maior ênfase no diálogo nas aulas de matemática. A linguagem oral tem lugar de destaque na comunicação em sala de aula, nos diálogos conduzidos pelo professor sobre as questões matemáticas propostas no decorrer das aulas, na condução de trabalhos em pequenos grupos, nas discussões coletivas de socialização, sistematização e formalização de resultados, após a resolução de problemas e/ou investigações matemáticas.

Conforme destacam Souza e colaboradores (2011), é através da comunicação oral que os alunos expressam suas ideias, descrevendo e explicando as estratégias e processos que utilizaram para resolver as situações matemáticas propostas, argumentando, discutindo e confrontando (SOUZA et al., 2009). A linguagem oral antecede o trabalho escrito possibilitando aos alunos a estruturação do pensamento e a sistematização de ideias (COURA, 2008).

A qualidade da comunicação oral dos alunos depende da qualidade dessa comunicação incentivada pelo professor e evidenciada por meio do cuidado especial com que este apresenta os conceitos matemáticos em sala de aula e também através do incentivo que

para que conexões possam ser estabelecidas entre os conteúdos matemáticos.

A comunicação escrita precisa ser também privilegiada nas aulas de matemática. Santos (2009) ressalta que a escrita de um texto matemático atua como mediadora integrando as experiências individuais e coletivas na busca da construção e apropriação de conceitos estudados. Os textos escritos pelos alunos fornecem ao professor elementos de avaliação da aprendizagem, possibilitando verificar os conceitos que foram aprendidos e aqueles que precisam ser retomados. Dessa forma, a linguagem escrita torna-se uma ferramenta alternativa de diálogo, na qual o processo de reflexão e avaliação sobre a aprendizagem é mobilizado, além de um instrumento para atribuir significados, organizar o raciocínio e permitir a assimilação de conceitos estudados.

Coura (2008) assume que, quando escrevemos, criamos uma memória, permitindo que o aluno e outras pessoas possam ter acesso ao que foi pensado e vivido, ampliando a abrangência da produção feita. A escrita atua como um meio de comunicação e como forma de registro, tornando-se elemento importante na construção do conhecimento e na elaboração de redes de significados, favorecendo a compreensão de conceitos e procedimentos matemáticos.

Nesse processo de comunicar ideias, a visualização desempenha um papel importante, diz respeito à capacidade de criar, manipular e “ler” imagens mentais de aspectos comuns da realidade (GOLDENBERG, 1998b). Para isso, as informações apresentadas precisam ser interpretadas visualmente,

construindo-se representações visuais para situações ainda não visuais, por meio de tabelas, diagramas, gráficos, esboços que contribuem para a compreensão do processo. Dentro e fora da matemática, várias capacidades de visualização podem ser desenvolvidas, compreendendo a tradução de uma informação apresentada verbalmente em informação visual, utilizando diferentes formas de representação de ideias, por meio de desenhos, tabelas e gráficos.

A visualização é um processo pelo qual as representações mentais ganham existência, através da percepção e da manipulação de imagens visuais que contribuem para a comunicação e disseminação de ideias, a construção de argumentação e a descrição da dinâmica mental (COSTA, 2002). Esse duplo papel da visualização na construção e na comunicação de conceitos matemáticos é também destacado por Leivas (2009).

As ideias e conceitos da Matemática possuem uma grande riqueza de conteúdos visuais representáveis intuitivamente, geometricamente, cuja utilização é muito benéfica nas tarefas de exploração e de tratamento de conceitos (GUZMÁN, 1996). A visualização tem um papel importante no desenrolar do pensamento matemático; ideias apresentadas visualmente são rapidamente transmitidas, contribuindo, por exemplo, para melhorar a compreensão e o trabalho criativo na resolução de problemas.

Guzmán (1996), assim como Costa (2002) e Leivas (2009), entre outros, destacam o papel dos *softwares* enquanto instrumentos de visualização, que podem contribuir na exploração e compreensão das ideias, permitindo

a reconstrução de conceitos matemáticos. O trabalho utilizando os *softwares* matemáticos pode proporcionar representações interativas e versáteis de objetos matemáticos. Através de um diálogo inteligente dos alunos com a máquina, que pode facilitar a exploração visual e numérica de temas relativos a diferentes campos da matemática, são favorecidas as diversas formas de pensamento matemático.

A abordagem da visualização ultrapassa o simples ato de mostrar uma imagem; é uma ferramenta poderosa para o aprofundamento da compreensão matemática, principalmente para atrair a atenção dos estudantes que rejeitam, por vezes, a abordagem algébrica, segundo colocações de Borba e Villarreal (2005).

Silva e colaboradores ressaltam ainda que “[...] o computador constitui hoje uma preciosa ferramenta capaz de apoiar a formulação de conjecturas, o estabelecimento de provas e de aprofundar o conhecimento sobre objetos que ajuda a visualizar” (SILVA et al., 1999, p. 70).

A utilização de recursos computacionais permite realizar vários cálculos com muito mais eficiência e rapidez, possibilitando ao aluno se envolver em testes e na verificação de proposições e conjecturas levantadas, para que possa defendê-las oralmente ou por escrito. Alteram-se as condições de argumentar e registrar em Matemática (PAIS, 2006).

O uso do *software* GeoGebra no desenvolvimento das atividades integrantes da pesquisa aqui relatada foi uma opção teórico-metodológica. O trabalho utilizando recursos computacionais, enfatizando a visualização, a procura de invariantes e o registro formal ou informal das observações, permitiu que os alunos percebessem o deslocamento de

figuras geométricas, articulando as formas de pensamento geométrico e algébrico, incentivando o uso de diferentes maneiras de comunicar ideias matemáticas sobre o conteúdo de isometrias (LAGE, 2008).

A pesquisa

A pesquisa foi desenvolvida com três grupos de estudantes de diferentes níveis de escolaridade, alunos da escola básica e professores em processo de formação inicial e continuada. Integraram o primeiro grupo 36 alunos da primeira série do ensino médio de uma escola particular de uma cidade do interior de Minas Gerais. O segundo grupo foi constituído de 26 alunos de um curso de Licenciatura em Matemática, selecionados para participar de um minicurso, ofertado como Atividade Complementar, prevista na grade curricular. O terceiro grupo reuniu 16 alunos de um curso de Especialização em Educação Matemática de uma instituição particular de ensino de Minas Gerais, cursando uma disciplina de Geometria Plana, em que conteúdos eram revistos e novas abordagens metodológicas apresentadas.

Um estudo qualitativo foi desenvolvido, em um ambiente computacional, em que os alunos utilizaram o *software* GeoGebra. Uma sequência de atividades foi elaborada e proposta aos estudantes compreendendo: 1) atividades com polígonos e suas transformações por isometrias e homotetias; 2) atividades de translação e reflexão de funções polinomiais. Neste artigo, apresentamos os resultados relativos ao primeiro tipo de atividades e que envolveram as transformações por isometrias.

O objetivo foi identificar e, ao mesmo tempo, incentivar a mobilização de formas de pensamento matemático no estudo das isometrias, propiciando aos alunos experiências matemáticas como: visualizar, experimentar, pensar, inventar, desmontar ideias, buscar padrões e invariantes, comparar, descrever, registrar oralmente e por escrito observações, conjecturas e argumentos, sistematizar resultados e comunicar ideias matemáticas.

As atividades foram apresentadas em forma de fichas contendo a proposta a ser desenvolvida e os alunos trabalharam inicialmente em duplas. Ao final de cada atividade, os resultados eram discutidos e socializados com o objetivo de perceber as explorações e descobertas feitas pelos alunos, as conjecturas levantadas e a confirmação ou refutação dessas. Nesse momento, os alunos comunicavam suas ideias e percepções e a professora-pesquisadora desempenhava o papel de orientadora no processo de sistematizar e generalizar os resultados.

Ao longo do trabalho os alunos tiveram oportunidades de visualizar a figura inicial e as figuras transformadas; levantar conjecturas; fazer registros formais e informais suas observações; desenvolver a argumentação e a reflexão sobre os variantes e invariantes.

As atividades aqui apresentadas abordaram as isometrias de reflexão e translação. Foram elaboradas numa linha de descoberta guiada (ERNEST, 1996) de modo a possibilitar que os alunos se familiarizassem com as ferramentas disponíveis no *software* GeoGebra.

Desse modo, a intenção era de que o aluno fosse conduzido a perceber que nas transformações dos polígonos por isometrias (iso =

mesma, metria = medida) a forma e as medidas são conservadas, ou seja, as figuras se mantêm congruentes. Além disso, pretendíamos que os alunos mobilizassem algumas formas gerais de pensamento matemático como: aprender a fazer experiências e explorações, reconhecer padrões e invariantes escondidos em uma situação matemática, fazer generalizações, previsões, formular descrições orais e escritas, interpretando e investigando as situações matemáticas com as quais se deparavam.

Os dados coletados consistiram nos arquivos produzidos pelos alunos contendo as construções geométricas, as representações algébricas e os registros escritos relativos às tarefas propostas, além das anotações da professora. Todos esses dados constituíram um acervo digital a partir do qual as soluções de cada dupla podiam ser acessadas, reconstituindo-se o caminho percorrido pelos alunos, através do “protocolo de construção” disponibilizado pelo GeoGebra. A análise dos dados teve como foco a identificação das formas de pensamento algébrico e geométrico mobilizadas durante a realização das atividades, com destaque para as formas utilizadas pelos alunos na comunicação das ideias matemáticas.

Principais resultados

Embora não conhecessem o *software* GeoGebra, os três grupos de estudantes se adaptaram rapidamente ao ambiente computacional e, ao final da primeira atividade, muitos alunos haviam descoberto várias ferramentas do *software*, além daquelas exigidas para a atividade que envolvia a reflexão dos polígonos. Foi grande a vibração dos

participantes no momento em que moveram um dos vértices dos polígonos e perceberam que os três polígonos se modificavam simultaneamente, mantendo-se congruentes.

Os alunos trabalharam sempre em duplas. Na primeira atividade, usando a janela de geometria do *software* GeoGebra, cada dupla deveria criar um polígono qualquer, preferencialmente no primeiro quadrante, para contribuir com a visualização do polígono. Com esse polígono a dupla iria fazer experimentações e explorações do conceito de isometria ou de simetria, por meio de transformações por reflexão e translação. O objetivo era que o aluno experimentasse e explorasse o conceito de simetria de reflexão e de translação. Para que tais explorações fossem possíveis, a dupla deveria observar as medidas dos ângulos, dos lados, do perímetro e da área dos polígonos iniciais e dos transformados. Utilizando as ferramentas disponíveis no *software*, como “ângulo”, “distância ou comprimento” e “área”, os alunos teriam na tela todas as informações necessárias para realizar as explorações. Em seguida, os alunos foram incentivados a estabelecer conexões entre a Geometria e a Álgebra, buscando representar os vértices dos polígonos por coordenadas no plano cartesiano.

Quando o aluno era orientado a utilizar a ferramenta “move”, a intenção era que ele percebesse que, na transformação geométrica por isometria ou simetria, as formas e medidas se mantêm, mas ocorrem alterações nas coordenadas dos vértices dos polígonos. Dessa maneira, a partir dos arquivos com as construções feitas pelos estudantes, seria possível verificar se eles detectaram os variantes e invariantes nas simetrias de reflexão e translação para que pudessem, aos poucos, concluir que essas simetrias são isometrias nas quais a forma, as medidas

dos ângulos, dos lados, do perímetro e da área se mantêm e que, portanto, as figuras são congruentes. Era também esperado que os alunos percebessem as variações das coordenadas dos pontos, realizando sistematizações e fazendo o registro informal e formal de suas conclusões.

Analisando o conjunto de dados, foi possível perceber que, de modo geral, os alunos perceberam que nas transformações por simetria as medidas dos lados, dos ângulos, do perímetro e da área do polígono inicial e dos polígonos refletidos foram invariantes. Perceberam, também, que, ao mover um dos vértices do polígono inicial, todos os demais se modificavam, alterando-se as medidas na mesma proporção do polígono inicial.

Na apresentação e discussão de alguns resultados, fizemos referência a construções realizadas, indicando as duplas por um número e especificando o grupo a que pertenciam. Alguns dados dizem respeito a registros feitos pelo professor em seus protocolos de observação, referenciados, aqui, pelas iniciais PO seguidas de um número.

Entre o grupo de estudantes do Ensino Médio, apenas 10 duplas das 18 explicitaram as alterações ocorridas em relação às coordenadas dos vértices dos polígonos simétricos, o que indica que a atenção de alguns dos alunos estava focalizada nas figuras construídas, exibidas na janela de geometria e não na janela algébrica. Na Figura 01, apresenta-se a ilustração do trabalho de uma dupla, cujos componentes perceberam a alteração ocorrida com as coordenadas dos vértices.

A análise dos resultados possibilitou constatar que os alunos compararam, exploraram, observaram, reconheceram variantes e invariantes, porém demonstraram dificuldades

em organizar as ideias em textos matemáticos. Entretanto, durante o momento de socialização das atividades, os alunos conseguiram

comunicar suas ideias oralmente, apresentando bons argumentos (PO1).

O protocolo de observação (PO1) e os

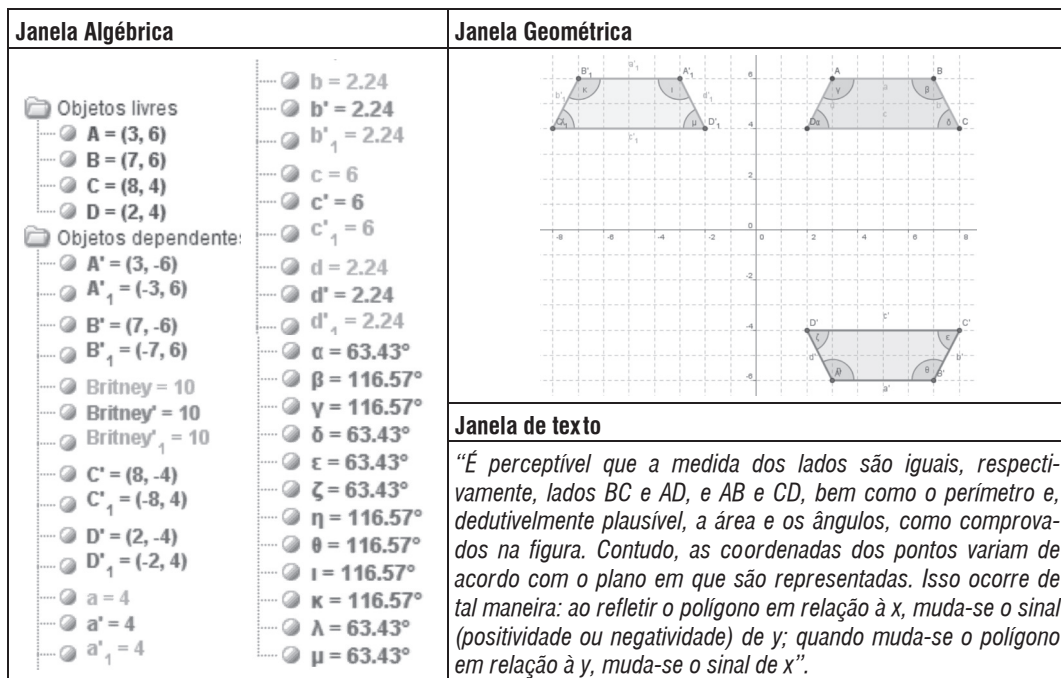


Figura 01: 1ª construção – D 1 - Ensino Médio.

arquivos produzidos pelos alunos no GeoGebra permitiram identificar que, apesar de procurarem estabelecer relações entre as experimentações que faziam ao levantar conjecturas, buscando argumentos para justificá-las, os alunos apresentaram dificuldades em registrar suas percepções por meio de descrições formais, com ideias organizadas e coerentes. Isso fica claro ao lermos o texto da dupla D15 do Ensino Médio: “Podemos perceber com a construção do primeiro polígono se comparado com os dois outros construídos através do seu espelhamento, que ao mudar do eixo x para o eixo y que ocorreu seu espelhamento através da mudança de si-

nais dos pontos”. Os alunos não conseguiram descrever as mudanças que ocorreram com as coordenadas dos vértices dos polígonos, uma das metas pretendidas com a atividade de construção proposta.

Os alunos do curso de Licenciatura agiram de forma bem diferenciada em relação aos alunos do Ensino Médio. Construíram seus polígonos em forma de triângulos e quadriláteros e partiram para a exploração de medidas dos lados, ângulos, perímetro e área, verificando o que muda e o que não muda nos polígonos, como podemos notar na Figura 02. Deslocaram vértices no intuito de perceber se a forma e as medidas dos polígonos trans-

formados seriam mantidas. Identificaram ângulos externos assinalados nos vértices dos polígonos e buscaram identificar por que tal fato ocorria, como exposto na Figura 02.

Um dos alunos, ao se deparar com o fato e não encontrar explicação, perguntou:

Leopoldo²: “Alguém sabe me explicar porque alguns ângulos estão sendo assinalados do lado de fora da figura?”

E a resposta veio imediatamente pelo aluno:

Sandro: “você tem que clicar nos vértices no sentido horário, se fizer o contrário o software assinala os ângulos do lado de fora” (P02).

Conclui-se que Sandro deu a resposta tão imediata porque, certamente, já havia experimentado assinalar o ângulo no sentido horário e anti-horário e observado os variantes e in-variantes que ocorreram na situação.

Os alunos da licenciatura atuaram como

verdadeiros matemáticos na busca de padrões que se mantêm ou se alteram, expressaram oralmente ideias matemáticas com linguagem mais adequada que os alunos do ensino médio; porém, apresentaram muitos problemas em redigir textos matemáticos (Figura 02).

Seus textos eram curtos, geralmente em forma de tópicos, omitiam pontos importantes exigidos na ficha de atividades, registravam suas descobertas e não o que foi realmente pedido ou não fizeram nenhum registro escrito. De certa forma, preocupa-nos verificar as deficiências de utilização das várias formas de expressão oral e escrita dos participantes, uma vez que esses alunos serão futuros professores. O fato atua como alerta para os professores das licenciaturas, ressalta a necessidade de se dar maior ênfase à linguagem formal matemática.

Entre o grupo de estudantes do curso de

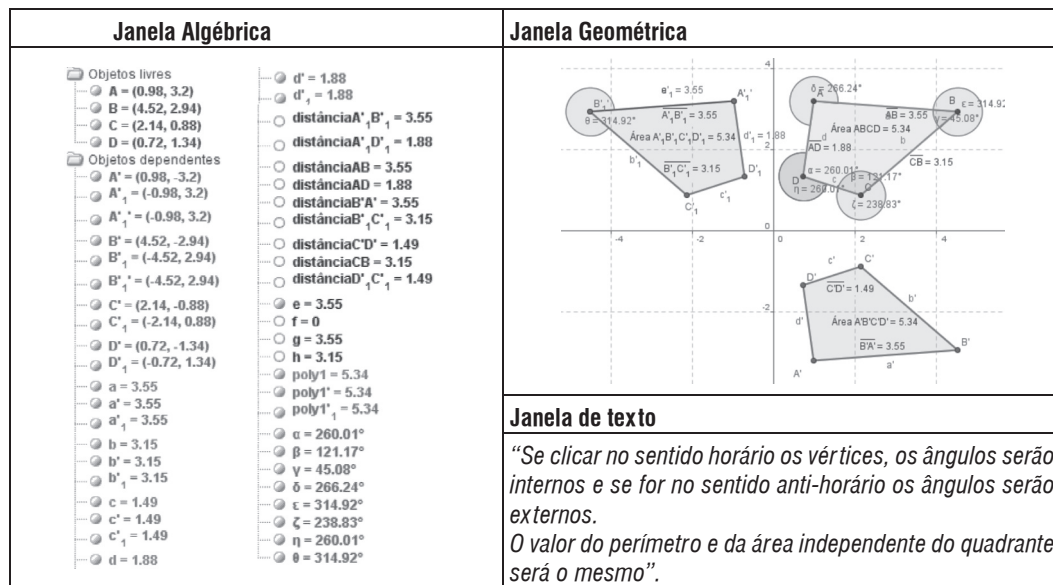


Figura 02: 1ª construção – D 5 – Licenciatura em Matemática.

¹ Todos os nomes dos alunos apresentados neste trabalho são fictícios.

Especialização em Educação Matemática nenhuma dupla apresentou dificuldades no manuseio das ferramentas do *software*. Todas as duplas exploraram, experimentaram, compararam formas e medidas. Foram capazes de identificar os padrões e invariantes, perceberam as propriedades relacionadas às coordenadas dos vértices, recorreram às janelas de geometria e de álgebra, buscando conexões entre elas e, principalmente, registraram suas percepções em forma de textos mais organizados e coerentes.

A maior facilidade na utilização do *software* e em seguir as orientações propostas pela

professora-pesquisadora pode, talvez, ter contribuído para a organização das ideias em forma de registro escrito. Observando o texto da Figura 03, podemos perceber que as ideias matemáticas estão bem estruturadas. Apenas uma dupla apresentou um texto menos formal. Essa dupla, de modo geral, demonstrou maior dificuldade em manusear o *software*, durante as atividades, o que parece evidenciar, talvez, pouca experiência na utilização de recursos computacionais.

A segunda atividade focalizou a simetria de translação, compreendendo os dois tipos de translação: vertical e horizontal. Como na

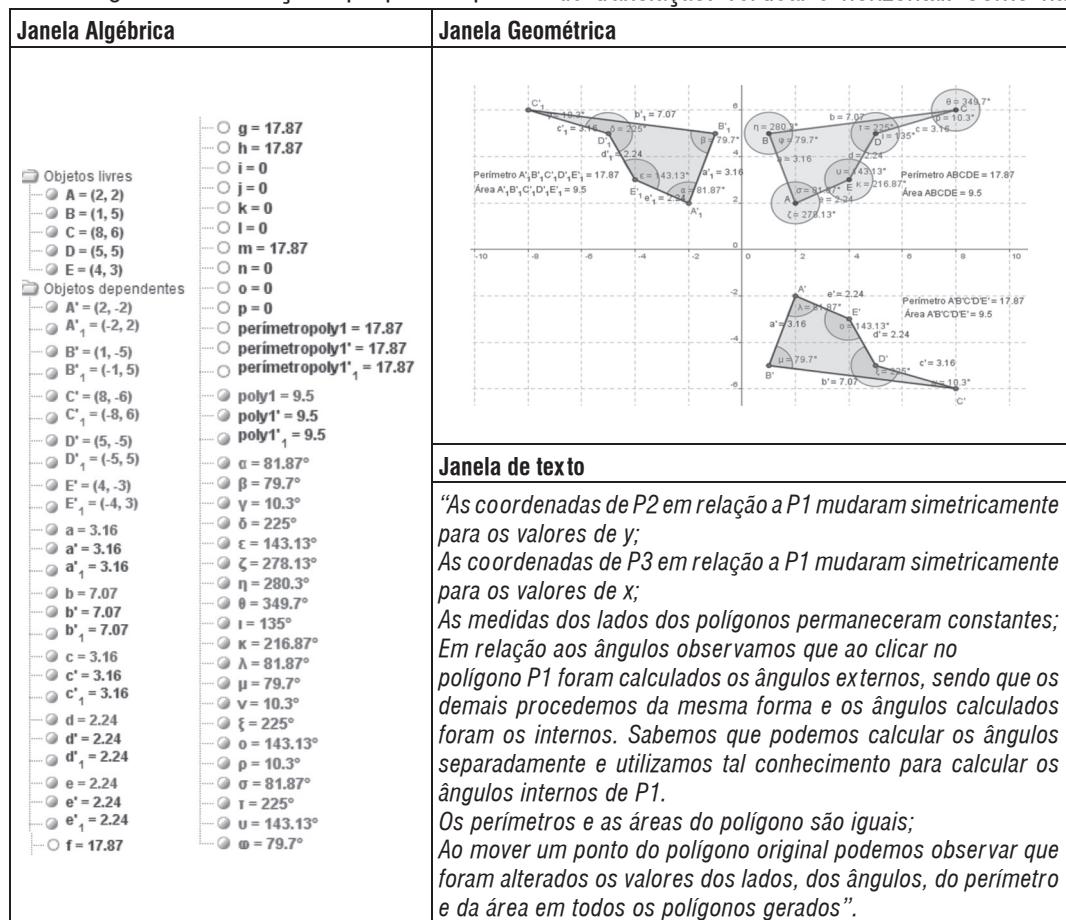


Figura 03: 1ª construção – D 8 – Educação Matemática.

atividade anterior, os alunos deveriam construir alguns polígonos e comparar as medidas dos ângulos, dos lados, do perímetro e da área dos polígonos iniciais e dos polígonos transformados, identificando congruências, observando as coordenadas dos vértices, de forma a estabelecer conexões entre as duas formas de representação algébrica e geométrica. Era esperado que os alunos percebessem que, na translação, a figura é arrastada para cima ou para baixo (translação vertical), para a direita ou para a esquerda (translação horizontal), bem como identificassem as alterações das coordenadas dos vértices dos polígonos transladados. Novamente foi incentivado que os alunos fizessem o registro informal e formal do que percebiam na construção, tendo utilizado os recursos disponíveis no *software* para comparar medidas, observar os variantes e invariantes nos três polígonos e fazer o registro

escrito das observações numa janela de texto.

Os alunos conseguiram perceber que, ao “transladar um polígono por um vetor”, os polígonos mantêm a forma, as medidas de lados, ângulos, perímetro e área e que, ao usar a ferramenta “move”, a forma dos polígonos se altera, porém eles se mantêm congruentes entre si. Na 1ª série do Ensino Médio, apenas sete duplas das 18 evidenciaram suas percepções com relação à modificação das coordenadas, explicitando que, ao mover o polígono verticalmente para cima ou para baixo, a forma do polígono se mantém, mas o valor de y se altera, assim como, ao mover polígono horizontalmente para a direita ou para a esquerda, o que sofre alteração é o valor do x (Figura 04).

Com relação aos registros, é possível perceber, mais uma vez, a dificuldade de organização das ideias na elaboração dos textos,

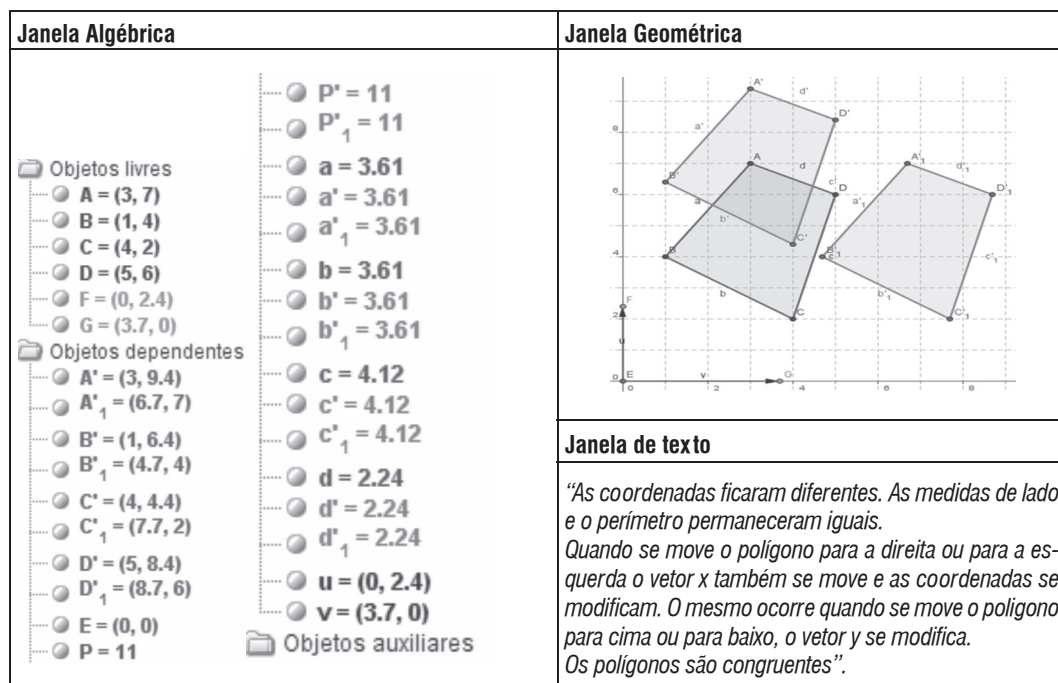


Figura 04: 2ª construção – D 3 - Ensino Médio.

evidenciando que os alunos não têm o hábito de registrar suas conclusões em Matemática. A dificuldade de registrar as informações fica evidente, inclusive pelos erros de ortografia, conforme se percebe nos textos produzidos pelos alunos. “A figura desenhada é um exágono. Pode perceber que quanto maior o tamanho do vetor, maior será o tamanho. Desta forma estará transladando a figura. Com o movimento das figuras, notamos que as figuras transladadas movem-se em todos os sentidos sem se desfazer” (D 6 - Ensino Médio- 2ª construção).

Na Licenciatura de Matemática, 3 duplas não registraram nenhuma informação com relação a suas explorações e percepções; 8 duplas registraram que, ao “transladar um polígono por um vetor”, os polígonos mantêm a forma, as medidas de lados, ângulos, perímetro e área e que, ao usar a ferramenta “move”, a forma dos polígonos altera, porém eles se mantêm congruentes.

Apenas três duplas expressaram suas percepções com relação à modificação das coordenadas, concluindo que, ao mover o vetor vertical, altera-se o valor de y e ao mover o

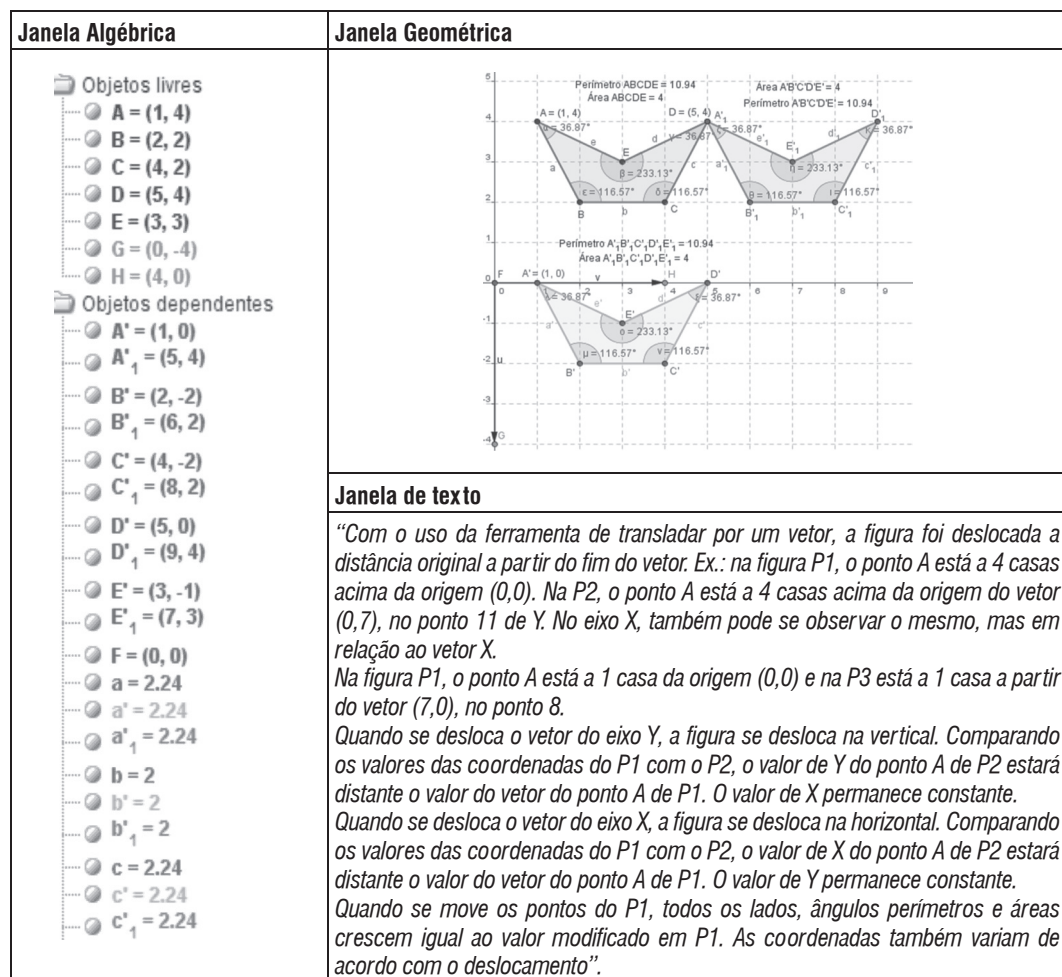


Figura 05: 2ª construção – D 3 – Licenciatura em Matemática.

vetor horizontal o que sofre alteração é o valor de x . Uma dupla se destacou em relação ao registro das percepções, sendo mais detalhista nessa atividade, conforme se observa na Figura

05.

O grupo de alunos da Especialização em Educação Matemática resolveu mais rapidamente as tarefas e conseguiu traçar os vetores

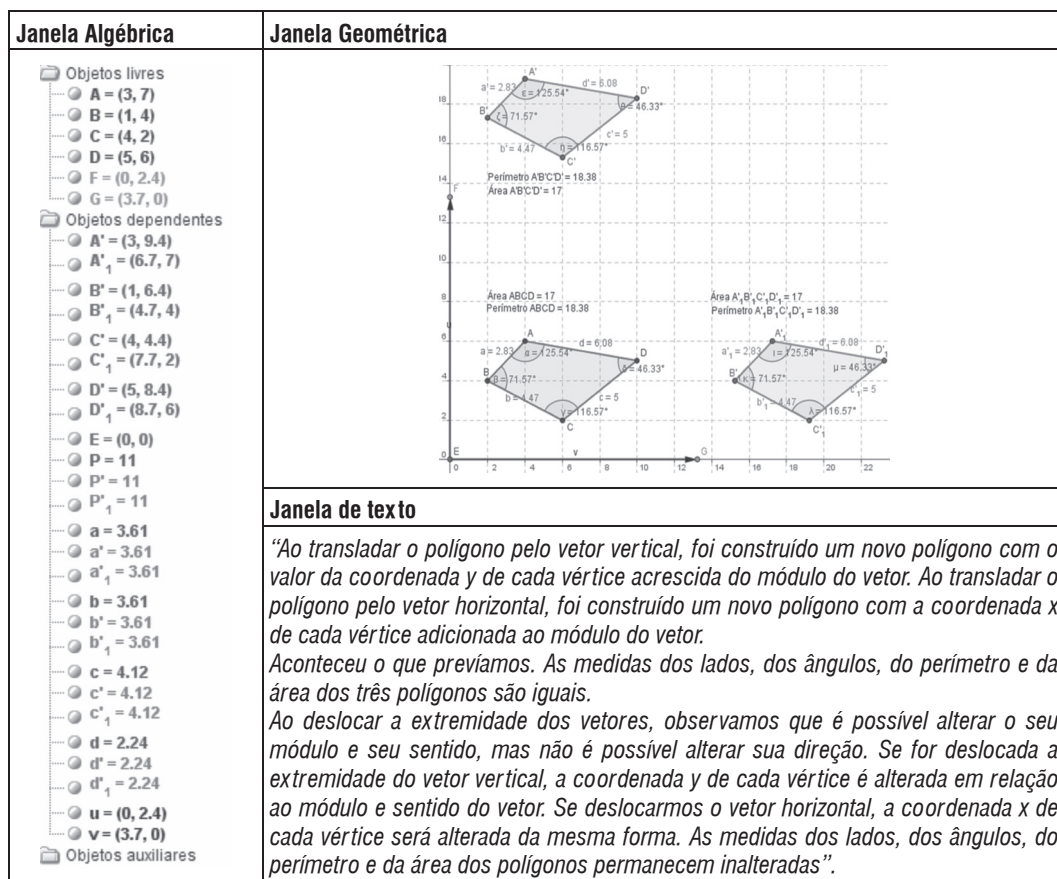


Figura 06: 2ª construção – D 2 – Educação Matemática.

na forma horizontal e vertical, percebendo que ao “transladar os polígonos por um vetor” eles mantêm a forma e as medidas dos ângulos, dos lados, o perímetro e a área. Os registros escritos foram organizados e coerentes (Figura 06); apenas uma dupla não explicitou a mudança ocorrida com as coordenadas dos vértices ao transladar os polígonos. Assim, sete dentre as oito duplas conseguiram esta-

belecer conexões entre a janela algébrica e a geométrica do GeoGebra, demonstrando perceber as propriedades da simetria, observando que, na translação horizontal, as coordenadas dos pontos se transformam em $(x+a, y)$ e, na translação vertical, as coordenadas dos pontos são transformadas em $(x, y+b)$, conforme era esperado pela professora-pesquisadora.

Os resultados da pesquisa nos levam a

refletir que precisamos oferecer mais oportunidades ao aluno de realizar investigações matemáticas nas quais ele tenha oportunidades de discutir, produzir textos matemáticos, utilizando formas variadas de comunicação de suas ideias matemáticas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Uma análise comparativa do trabalho desenvolvido nos três contextos - Ensino Médio, Licenciatura e Especialização - permitiu verificar que houve uma identificação positiva dos alunos com o GeoGebra, o que pode ser um indicativo de sua potencialidade para auxiliar os alunos no levantamento de conjecturas sobre os variantes e invariantes quando das transformações geométricas feitas com os polígonos.

Destacamos a importância da utilização do *software*, pois as construções ganhavam cores e movimento, podendo facilmente ser feitas e desfeitas, num processo de construir e desconstruir que favorecia a exploração de conjecturas. O *software* foi, assim, utilizado como um instrumento para incentivar a mobilização das formas de comunicação por meio da representação algébrica e geométrica de objetos matemáticos, além da linguagem natural e simbólica usada na janela de textos.

Os dados coletados revelaram que, de modo geral, os alunos evidenciaram maior facilidade em se expressar oralmente, durante os momentos de socialização das atividades desenvolvidas, fato evidenciado nos protocolos de observação feitos pela professora-pesquisadora. A dificuldade geral foi efetuar registros escritos das conjecturas levantadas e argumentar, utilizando a linguagem matemática formal, o que pode ser uma evidência de que a redação do texto matemático

- a comunicação escrita das ideias - não é um hábito cultivado ao longo da escolarização. Esse fato é destacado também em outras pesquisas, como em Fonseca (2000), Frota (2002), Ponte (2003) e reafirma a importância a ser dada à questão, principalmente nos programas de formação docente inicial e continuada.

Os resultados sinalizam potencialidades do uso de roteiros escritos de tarefas estruturadas sob forma de descoberta guiada, que contribuem para que os alunos avancem nas investigações e na compreensão conceitual. Merece destaque o papel importante que é demandado do professor na condução do processo de sistematização e formalização das ideias exploradas pelos alunos. A dificuldade no registro das ideias pode comprometer o desenvolvimento desta etapa e pode exigir do professor saber controlar o tempo de condução do trabalho; foi necessário, por exemplo, conceder um tempo maior aos alunos da Licenciatura e da Especialização, para que eles pudessem fazer algumas deduções.

Os resultados da pesquisa sugerem ainda que, nos cursos de formação inicial ou continuada de professores, os alunos tenham mais oportunidades para desenvolver formas variadas de pensamento matemático algébrico e geométrico e que sejam incentivados a sistematizar e formalizar ideias. À medida que têm experiências dessa natureza, compreendem a importância de desenvolver um trabalho semelhante com seus alunos.

Atos de ensinar e aprender são, na sua essência, atos de comunicação. A comunicação em sala de aula é um objetivo curricular importante. É necessário proporcionar momentos em que se privilegie a linguagem oral, em outros a linguagem escrita e a visualização, de forma a favorecer a comunicação entre o professor e os

seus alunos e entre os próprios alunos.

De modo geral, os alunos conseguem expressar-se mais facilmente utilizando a linguagem oral. Novas pesquisas são necessárias para indagar formas de como contribuir para que a comunicação escrita seja também incentivada e incorporada na sala de aula de Matemática.

REFERÊNCIAS

BORBA, M.; VILLARREAL, M. E. **Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking**: Information and Communication Technologies, Modeling, Visualization, and Experimentation. Springer, 2005.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**/ Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/ SEF, 1998.

_____. **Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio**/ Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Brasília: Ministério da Educação, 1999.

COSTA, C. Visualização, veículo para a educação em geometria. In: SARAIVA, COELHO, MATOS (Orgs.). **Ensino e Aprendizagem da Geometria** (p. 157-184).

Covilhã: Secção de Educação Matemática e Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação. (SPCE). Disponível em: < <http://www.spce.org.pt/sem/CC.pdf>>. Acesso em: 08 ago. 2007.

COURA, F. C. F. **A Escrita Matemática em uma turma de 6ª série do ensino fundamental**. Dissertação (Mestrado em Educação). FAE-UFMG, Belo Horizonte, 2008, 166 p.

CUOCO, A.; GOLDENBERG, E. P.; MARK, J. Habits of Mind: an organizing principle for mathematics curriculum. **Journal of Mathematical Behav-**

ior, v. 15, p. 375-402, 1996.

DAVIS, P. J. HERSH, R. **A experiência matemática**. Lisboa: Gradativa, 1995.

ERNEST, P. Investigações, Resolução de Problemas e Pedagogia. In: ABRANTES, LEAL, PONTE (Ed.). **Investigar para aprender matemática**, p. 25-48. Lisboa: Projeto MPT e APM, 1996.

FONSECA, H. **Os processos matemáticos e o discurso em actividades de investigação na sala de aula**. (Tese de Mestrado em Educação) - Universidade de Lisboa, 2000.

FROTA, M. C. R. Competências de Representação e Comunicação em Matemática: o papel do livro didático. In: Encontro Nacional de Didática E Prática De Ensino (ENDIPE), 11. Goiânia. Igualdade e diversidade na educação. **Anais do XI ENDIPE**, Goiânia, 2002.

GOLDENBERG, E. P. Hábitos de pensamento: um princípio organizador para o currículo (I). **Educação e Matemática**, n. 47, p. 31-35. 1998 a.

_____. Hábitos de pensamento: um princípio organizador para o currículo (II). **Educação e Matemática**, n. 48, p. 37-44. 1998 b.

GUZMÁN, M. El Papel de la Visualización. In: **El Rincón de la Pizarra**. Madrid: Ediciones Pirámides. 1996.

LAGE, Maria A. **Mobilização de formas de pensamento matemático no estudo de transformações geométricas**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Belo Horizonte, 2008.

LEIVAS, J. C. P. **Imaginação, Intuição e Visualização**: a riqueza de possibilidades da

abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de matemática. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2009.

PAIS, Luiz C. **Ensinar e aprender Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

PONTE, J. P. Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal. **Investigar em Educação**, v. 2, p. 93-169, 2003.

PONTE, J. P. ; BROCARD, J. ; OLIVEIRA, H.. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

SANTOS, S. A. Explorações da linguagem escrita nas aulas de Matemática. In: LOPES, C. A. E. (Org.). **Escritas e Leituras na Educação Matemática**. p.127 – 141. 1 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

SILVA, A. et al. O currículo de matemática e as Actividades de Investigação. In: ABRANTES P. et al. (Eds.). **Investigações matemáticas na aula e no currículo**. Lisboa: Projecto MPT e APM, 1999, p. 69-85.

SOUZA et al. Comunicação Matemática: Contributos do PFCM na reflexão as práticas de professores. Disponível em: < http://www.apm.pt/files/_CO_Sousa_Cebolo_Alves_Mamede_4a41313eee16e.pdf>. Acesso em: 10 ago. 2008.

RECEBIDO EM: 25. 08. 2011.

APROVADO EM: 03. 10. 2011.

