VIDYA, v. 34, n. 1, p. 257-276, jan./jun., 2014 - Santa Maria, 2013. **ISSN** 2176-4603

O QUE ACONTECE QUANDO OS ALUNOS RESOLVEM EXERCÍCIOS DE CÁLCULO COM UM *SOFTWARE*?

WHAT HAPPENS WHEN STUDENTS SOLVE CALCULUS EXERCISES WITH A SOFTWARE?

GRAÇA LUZIA DOMINGUEZ SANTOS*
JONEI CERQUEIRA BARBOSA**

RESUMO

Neste artigo, relatamos um estudo que teve como objetivo compreender como os alunos resolvem exercícios de Cálculo Diferencial e Integral mediados com uma tecnologia digital. Utilizando dados de um experimento de ensino, a análise dos dados foi realizada com a ideia teórica de ação mediada tal como formulada por James Wertsch. Os resultados sugerem que a resolução de exercícios com tecnologias digitais pode levar os alunos a revisitarem tópicos estudados anteriormente com ênfase conceitual. Além disso, viabiliza o desenvolvimento de novas estratégias de solução, distanciando-se, assim, do modelo do exercício-com-lápis-e-papel.

Palavras-chave: Exercícios. Cálculo Diferencial e Integral. Tecnologias digitais. Ação Mediada.

ABSTRACT

In this paper, we report a study that aimed at understanding how students solve Differential and Integral Calculus exercises mediated through a digital technology. By using data from a teaching experiment, the data analysis was made with the theoretical idea of mediated action such as formulated by James Wertsch. The data analysis suggested that solving exercises with digital technologies might allow students to review previous studied topic with conceptual emphasis. Beyond, that makes it viable to develop new solution strategies, so moving it away from the so-called model of exercises-with-pencil-and-paper.

Keywords: *Exercises. Differential and Integral Calculus. Digital Technologies. Mediated Action.*

* Docente do Instituto de Matemática da Universidade Federal da Bahia (UFBA). E-mail: gracadom@ufba.br
** Docente da Faculdade de Educação da UFBA. E-mail: jonei.cerqueira@ufba.br

INTRODUÇÃO

O ensino de Cálculo Diferencial e Integral[1] tem recebido relevante atenção na área de Educação Matemática. Para ilustrar o interesse pelo tema, citamos o funcionamento regular de um grupo de estudo específico, *Teaching and Learning of Calculus*, no *International Congress on Mathematical Education*[2] para tratar das contribuições sobre a pesquisa e desenvolvimento do ensino e aprendizagem de Cálculo. Igualmente, o assunto é recorrente no Grupo de Trabalho de Matemática no Ensino Superior da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM)[3]. Um dos focos das investigações é a utilização de tecnologias digitais[4] nas aulas de Cálculo, tais como calculadoras gráficas, *softwares* geradores de gráficos e do tipo Sistema de Computação Algébrica (SCA)[5].

Ferrara, Pratt e Robutti (2006) traçaram a trajetória das pesquisas do *The International Group for the Psychology in Mathematics Education* (PME), nos últimos trinta anos, a respeito do papel e do uso das tecnologias digitais no ensino de Cálculo e Álgebra. Segundo os autores, as tecnologias têm alterado a forma como Cálculo e Álgebra são percebidos. Para eles, as tecnologias digitais possibilitam que as ideias centrais de Cálculo, como limites, derivadas e integrais, sejam tratadas dinamicamente, contrapondo-se às representações estáticas dos meios mediacionais convencionais, lápis e papel. Tal dinamicidade permite que os estudantes explorem muitas situações, levantem, testem e validem conjecturas. Concluem, afirmando que "[...] interatividade e dinamicidade são as duas características para as quais a tecnologia promete um amplo potencial, proporcionando mais atenção na construção de significados do que nos aspectos manipulativos" (p. 267, tradução nossa). No entanto, ressaltam que é necessário que as atividades matemáticas sejam adaptadas às potencialidades oferecidas pelo *software* em uso, melhor ainda se isso for feito de uma forma coletiva, trabalhando-se em pequenos grupos.

A dinamicidade e interatividade propiciada pelas tecnologias digitais nas aulas de Cálculo potencializam a visualização[6], afirma Barbosa (2009), ao relatar os resultados de uma investigação com o coletivo formado por alunos-com-tecnologias, durante experimentos de ensino, com alunos de um Curso de Matemática usando um software gráfico. A autora igualmente infere que os estudantes produziram conhecimento sobre função composta e regra da cadeia, em decorrência da elaboração de conjecturas, que foram formuladas, confirmadas ou refutadas a partir do entrelaçamento das representações algébricas e gráficas, durante o processo de visualização.

No ensino de Cálculo, tradicionalmente há uma primazia das representações algébricas somente registradas no caderno, que pode implicar em dificuldades para os alunos, por enfatizar primordialmente uma forma de representação[7] (WEBER, 2004; ALOCK; SIMPSON, 2005). A presença de tecnologias digitais no ensino e aprendizagem de Cálculo pode possibilitar o uso de várias representações, potencializando, dessa forma, compreensão de conceitos, como foi relatado por Barbosa (2009).

1 Por vezes, utilizaremos a palavra "Cálculo" para nos referir às disciplinas que abordam os seguintes temas: limites, derivada e integral para funções reais com uma ou duas variáveis.

2 Home: http://www.mathunion.org/icmi/conferences/icme-international-congress-on-mathematical-education/introduction/. Acesso em: 01 fev. 2014.

3 Home: http://www.sbembrasil.org.br. Acesso em: 01 fev. 2014.

4 Também, por vezes, mencionaremos apenas a palavra "tecnologias" em lugar de "tecnologias digitais", para evitar repetições.

5 A correspondente sigla em inglês é CAS - *Computer Algebric System*.

6 "[...] a concepção adotada para visualização é a de um processo que associa a compreensão dos estudantes, entre si, e a mídia externa" (p. 62).

7 Estamos nos referindo a representações verbais, gráficas, algébricas ou simbólicas, pictóricas (diagramas ou desenhos), tabelares e outras.

Rocha (2010), considerando a visualização como a interpretação de imagens visuais, sustenta que esta tem a potencialidade de fomentar a experimentação. O autor compreende experimentação como a possibilidade de construir, modificar e transitar entre representações. Os dados da pesquisa realizada em um ambiente informatizado (laboratório de informática com *software* Geogebra[8], alunos e professor-pesquisador interagindo) indicam que a experimentação, propiciada pela visualização, auxiliou na verificação de conjecturas e negociação de significados, facilitando a compreensão dos conceitos de limites, derivadas e integrais (ROCHA, 2010).

Guimarais, Miranda e Laudares (2012) também destacam como característica predominante a experimentação proporcionada pelas tecnologias digitais, quando o conteúdo derivadas e taxa de variação foram abordados utilizando os *softwares* gratuitos - Virtual Cálculo Numérico (VCN) e Geogebra, em atividades investigativas, com alunos dos cursos de Engenharia de Produção e Engenharia Mecânica da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais (PUC-MG). Os autores creditam a experimentação ao rápido *feedback* para se obter equações, formas gráficas e padrões de tendências, através da simples alteração de parâmetros e modelos propiciados pelos *softwares*.

As pesquisas citadas assinalam que a utilização de *softwares* nas aulas de Cálculo pode oportunizar atividades de experimentação, consideradas explicitamente, ou não, pelas pesquisas, como a possibilidade de compor, converter e transitar ente representações algébricas, gráficas e tabulares. Outro aspecto igualmente ressaltado é a elaboração, validação e refutação de conjecturas, que são características das investigações matemáticas, se considerarmos o ponto de vista de Ponte (2005). Desta forma, utilização de *softwares* nas aulas de Cálculo alinha-se com cenários para investigação tal como conceptualizados por Skovsmose (2000). Para este autor, em um cenário para investigação, os alunos são convidados a formular questionamentos e a delinear rotas de investigação diversas (ALRØ; SKOVSMOSE, 2006). Quando os alunos aceitam o desafio posto por uma determinada tarefa, eles passam a assumir o processo de exploração e explicação, e o cenário para investigação pode se constituir em um novo ambiente de aprendizagem (SKOVSMOSE, 2000; ALRØ; SKOVSMOSE, 2006).

Os cenários de investigação desafiam o que Skovsmose (2000) e Alrø e Skovsmose (2006) denominam paradigma do exercício, que se caracteriza pela organização das aulas de Matemática, usualmente, em duas etapas: inicialmente o professor expõe o conteúdo e técnicas, geralmente tomando como base um livro-texto; a seguir, os alunos devem resolver exercícios, que usualmente são elaborados por uma autoridade exterior à sala de aula, aplicando diretamente as regras e algoritmos apresentados, e então o professor os corrige, verificando se as respostas estão corretas. (SKOVSMOSE, 2000; ALRØ; SKOVSMOSE, 2006). Desse modo, no paradigma dos exercícios, os exercícios, eles próprios, assumem o papel central nas aulas de matemática, servindo ao propósito de verificação da memorização de procedimentos (ALRØ; SKOVSMOSE, 2006).

Skovsmose (2000), no entanto, destaca que apesar dos cenários de investigação se apresentarem como uma alternativa ao paradigma do exercício, não se trata de abolir os exercícios na Educação Matemática. Nos cenários de investigação, os exercícios cumprem o papel de consolidar e explorar facetas de uma nova aprendizagem. Portanto, eles possuem um escopo distinto daquele que é empregado no paradigma do exercício. Por conseguinte, a resolução de exercícios não é exclusivamente inerente ao paradigma do exercício.

Skovsmose (2011) sugere "abrir" os exercícios, tomando-os como novas oportunidades para explorar os conceitos e algoritmos matemáticos ensinados. Por exemplo, certamente, no paradigma do exercício, os alunos seriam solicitados a obter as funções inversas de duas funções afins dadas f

8 Software livre que combina geometria dinâmica com SCA. Disponível em: http://www.geogebra.org/

e *g*, o que demandaria apenas empregar um algoritmo. Pode-se, entretanto, propor a seguinte questão: o que podemos dizer acerca das interseções de *f* e *g*, e de *f* e sua função inversa, de *g* e de sua função inversa, e das funções inversas de *f* e *g*? Além de ser necessária a determinação da lei de formação da função inversa, os alunos precisam ir além, tendo que levantar conjecturas e explorar outros conceitos matemáticos. Em uma tarefa desse tipo, a utilização de tecnologias digitais, em nosso entendimento, ampliaria mais ainda as possibilidades de experimentação e investigação.

Assim, uma alternativa de mudança nas aulas de Cálculo, em particular, é reconsiderar a resolução de exercícios com a utilização de um *software* ou qualquer outra tecnologia digital, tendo em vista a experimentação, interatividade, dinamicidade para se transitar entre representações propiciadas pela utilização destes, como mencionamos anteriormente. Tais características nos permitem conjecturar que a utilização de *softwares* na resolução de exercícios modifica essa atividade.

Ao convidarmos os alunos, nos cenários para investigação, ou mesmo no paradigma do exercício, para resolverem exercícios com tecnologias digitais, podemos proporcionar tarefas que potencializam a exploração, afastando essas tarefas das características estritamente fechadas dos exercícios-com-lápis-e-papel.

Diante do exposto, este artigo é o relatório de um estudo que teve por propósito investigar as características, propiciadas pelo uso de um *software* gráfico, na resolução de exercícios de Cálculo. Observemos que não estamos, aqui, focalizando a potencialidade de um *software* em tarefas que visam a uma nova aprendizagem, mas em tarefas com um *software* que se destinam a consolidar tópicos estudados anteriormente. Baseamo-nos na hipótese teórica de que a presença desta tecnologia coloca condições à forma como os alunos resolvem exercícios de Cálculo. Para melhor enquadrar o estudo, assumimos a noção de "ação mediada", a qual passamos a explicitar.

SOBRE A NOÇÃO DE AÇÃO MEDIADA

Quando os alunos resolvem exercícios utilizando um *software*, eles estão lidando com ferramentas culturais, já que ganham funcionalidade no conjunto de normas de um determinado grupo cultural, neste caso, o contexto de aulas de matemática. De acordo com Wertsch (1998), as ferramentas culturais (linguagem e ferramentas) que estão disponíveis em um determinado cenário sociocultural dão forma à ação humana. Quando esse autor fala de ação humana, está se referindo à ação mediada, ou seja, a sua unidade de análise é a forma como os agentes (indivíduos) e os meios mediacionais (ferramentas culturais) estão interagindo em um cenário sociocultural particular. Adotar como base esta unidade de análise significa que estamos empenhados com o princípio de analisar a ação e suas ferramentas de realização, situando-as em seu contexto sociocultural-institucional como, por exemplo, àquelas que se realizam em uma sala de aula.

Para Wertsch (1998), esses elementos - agentes e meios mediacionais - estão de tal forma imbricados, que é impossível, ou pelo menos muito difícil, que cada um deles seja analisado individualmente. A relação entre eles é tão fundamental que é caraterizada por uma "tensão irredutível" de maneira que é mais pertinente falar em indivíduos-agindo-com-ferramentas culturais, ou seja, as fronteiras entre eles são rarefeitas. O caráter do meio medicional e a utilização particular que os agentes fazem dele podem ser os mais variados possíveis. Apesar disso, um e outro, concomitantemente, são imprescindíveis para o entendimento da ação humana.

Uma ferramenta cultural só pode ser considerada como tal, quando o agente a utiliza para realizar uma ação, isto é, à medida que o agente "age-com" e "reage-à". Nesse processo, o agente desenvolve as habilidades necessárias para lidar com a ferramenta cultural, que ocasionam alterações no fluxo e na estrutura da ação **mediada**. As mudanças fomentadas pela inserção de um novo meio mediacional são, amiúde, poderosas, causando desequilíbrios que transformam tanto o agente como a ação mediada (WERTSCH, 1998). Para citar um exemplo, podemos mencionar a rapidez de um determinado *software* para traçar o gráfico de uma função derivada, o que permite uma rápida análise da função primitiva por parte do aluno. Com isto, faz-se desnecessário que o aluno foque certos conhecimentos e habilidades que seriam necessárias sem a presença do *software*, porém canalizando seu esforço para uma tarefa mais analítica. Portanto, a combinação das funções e propriedades do meio medicional - por exemplo, um *software* - condiciona a natureza da própria ação mediada, e também o cenário no qual a ação foi realizada.

Análogo às atividades abertas que visam à exploração de novas ideias, o nosso entendimento é que a resolução de exercícios[9] de Cálculo mediados por um *software* propiciará certas condições para a ação (no caso, resolução de exercícios) e, portanto, na forma de consolidar a aprendizagem de tópicos já estudados.

Assim, a nossa unidade de análise é a interação entre os agentes (alunos) e um meio de mediação (*software*) na ação (resolução de exercícios de Cálculo) em uma dada situação social. Para investigar esta unidade, tomamos determinados procedimentos metodológicos, que passamos a apresentar.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

O foco deste estudo é investigar a ação dos alunos - resolvendo exercícios de Cálculo - mediados por um *software*, com o propósito de compreender características da resolução de exercícios com a presença deste meio de mediação. Em virtude desse desígnio, o estudo classifica-se como sendo de natureza qualitativa. Segundo Denzin e Lincoln (2005), a pesquisa qualitativa tem como foco a tentativa de interpretar os fenômenos sociais no que se referem aos significados que as pessoas trazem para eles, no caso da presente investigação, alunos resolvendo exercícios de Cálculo Diferencial e Integral mediados por um *software*.

Com o propósito de produzir tal entendimento, foi realizado um experimento de ensino. No experimento de ensino, o pesquisador atua como professor e geralmente interage com os alunos individualmente ou em pequenos grupos, acompanhando as atividades desenvolvidas pelos alunos, "ouvindo" a matemática que os alunos engedram no decorrer do experimento (STEFFE; THOMPSON, 2000; COBB, 2000). Neste experimento, a primeira autora atuou como professora, o que a permitiu se tornar parte da situação observada, interagindo com os demais atores (ALVES-MAZZOTTI, 1998).

Na investigação qualitativa, os dados são descritivos: palavras ou imagens (BOGDAN; BIKLEN 1994; LÜDKE; ANDRÉ, 1986). Para gerar dados que nos permitissem analisar as ações desenvolvidas quando alunos resolvem exercícios de Cálculo mediados por um *software*, optamos pela gravação em vídeo do experimento de ensino.

A gravação em vídeo é um recurso que permite ao pesquisador acompanhar e esquadrinhar eventos concomitantes (áudio e vídeo) e reexaminar os episódios várias vezes auxiliando na eficiência da análise (POWELL et al., 2000).

9 Estamos tomando exercício como uma tarefa na qual o aluno dispõe de um processo para resolver, que serve ao propósito de consolidação de tópicos já estudados (PONTE, 2005).

Após assistirmos à gravação em vídeo do experimento de ensino várias vezes e à medida que identificamos trechos em que emergiam regularidades e padrões, fizemos pequenos recortes. Essa segmentação teve como próposito identificar e desenvolver um sistema de categorização, que, de acordo com Bogdan e Biklen (1994), é “um meio de classificar os dados descritivos” (p. 220). Esses trechos foram transcritos linha a linha, permitindo que os dados fossem organizados em categorias que serão apresentados nas seções seguintes.

O CONTEXTO DO ESTUDO

Desse experimento de ensino, participaram quatro alunos. Dois desses estudantes eram alunos do curso de Engenharia Elétrica e os outros dois, do Curso de Química de uma universidade pública da Bahia. Na época da coleta de dados, eles estavam matriculados na disciplina denominada de Cálculo B[10], lecionada pela primeira autora deste artigo.

Como tínhamos um particular interesse em focalizar enunciações orais dos alunos, pois nos forneceriam importantes subsídios para compreender as suas ações, a seleção desses estudantes para participação na pesquisa foi realizada com base no interesse, engajamento e participação em sala de aula.

O *software* escolhido foi o *Winplot*[11], um programa gráfico, gratuito, com versão em português e fácil de ser instalado. Além disso, o *Winplot* apresenta menor grau de dificuldade na sua utilização, por ter uma sintaxe semelhante à usada na linguagem matemática. O supracitado *software* apresenta ambientes em duas e três dimensões. Nessa pesquisa, utilizamos apenas o ambiente em duas dimensões, por ser bastante eficiente no estudo de derivada e integral, e no traçado de gráficos de funções com uma variável, que foram os tópicos abordados nos exercícios aplicados no exprimento de ensino.

Os alunos foram separados em duas duplas, sendo que a escolha dos pares ficou sob a incumbência dos próprios participantes. A nosso ver, o agrupamento por afinidade proporciona mais interação, permitindo que os estudantes fiquem mais à vontade para compartilhar ideias. Dos quatro alunos que participaram do experimento, apenas um conhecia o *Winplot*, entretanto havia trabalhado superficialmente e exclusivamente no ambiente em três dimensões.

Durante o experimento de ensino, a dupla formada pelos alunos que nomeamos pelos pseudônimos de Gustavo e Fernando estava sempre adiantada na resolução dos exercícios e era muito falante. Por outro lado, em diversos momentos, a outra dupla, formada pelas alunas que designamos pelos pseudônimos de Fabiana e Rosa, parou para ouvir as discussões que ocorriam entre Gustavo e Fernando e entre estes alunos e a professora. Por esse motivo, na análise de dados utilizaremos apenas trechos das falas e ações da dupla Gustavo e Fernando, tendo em vista que os dados produzidos por esses alunos são representativos de cada categoria.

Como havia pouco tempo para que os alunos se ambientassem com o *software*, considerando que se tratava de apenas um encontro, e os alunos não estavam familiarizados com ele, elaboramos exercícios em que os comandos e sintaxe necessários para suas resoluções estavam descritos nas atividades.

O tema central do experimento de ensino foi Derivada de funções reais com uma variável real, sendo abordados os seguintes tópicos: reta tangente, máximos e mínimos relativos e absolutos,

10 Calculo B é a segunda disciplina de Cálculo oferecida por esta universidade e é cursada por todos os alunos da Área de Ciências Exatas. Os temas abordados são: aplicações de integral definida, estudo geral de funções reais com duas varáveis, funções vetoriais, integral de linha e teorema de Green.
11 A versão em português pode ser obtida no endereço http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html

crescimento, decrescimento e concavidade. Esses assuntos já haviam sido estudados pelos alunos em uma disciplina cursada no semestre anterior denominada por Cálculo A.

Cada par ficou com um computador, situados em uma mesma bancada, onde o *software Winplot* estava instalado, e a professora permaneceu sentada entre as duas duplas, enquanto eles trabalhavam simultaneamente.

Os alunos receberam, por escrito, os seis exercícios que deveriam ser resolvidos e folhas de papel em branco. A professora participou fornecendo orientações, fazendo intervenções, dirimindo as dúvidas teóricas e também aquelas pertinentes ao uso do *Winplot* que surgiram no transcorrer do experimento.

No experimento de ensino analisado nesse estudo, os alunos receberam por escrito seis exercícios (Anexo). O tema do primeiro exercício foi reta tangente; o segundo versava sobre máximos e mínimos de uma função que dependia de um parâmetro; o terceiro tratava do teorema de Weierstrass; o quarto solicitava a análise do crescimento e decrescimento de uma função a partir do gráfico da sua função derivada; o quinto consistia em determinar a concavidade do gráfico de uma função analisando o sinal do gráfico da sua derivada de ordem dois; e o sexto, um problema de máximos e mínimos.

Alrø e Skovsmose (2006) classificam os exercícios de acordo com cada uma das seguintes referências: à matemática pura, à semirrealidade (situações fictícias) e ao mundo real. Empregando essa classificação, os cinco primeiros exercícios referem-se à matemática pura e o sexto, à semirrealidade.

ANÁLISE DE DADOS

Com base na análise dos dados, constituímos três categorias: utilização do *software* para não realizar procedimentos algébricos; utilização da resposta visual do *software* para orientar conclusões; e imprevisibilidade. A seguir, apresentamos trechos dos dados, que foram selecionados, entre os todos os que foram analisados, para ilustrar as categorias mencionadas neste artigo.

Empregaremos a seguinte nomenclatura para apresentação dos dados: <u>X</u>.<u>Z</u>, em que o X corresponde ao exercício listado no Anexo o qual os alunos estão abordando e Z, à enunciação de cada participante em ordem temporal para cada trecho. Os episódios estão organizados em quatro colunas: na primeira, consta o código da enunciação; na segunda, aquele que a enunciou; na terceira, a ação verbal propriamente dita; e, por fim, na quarta coluna, descrevemos as ações não verbais observadas e/ou o registro da tela do computador.

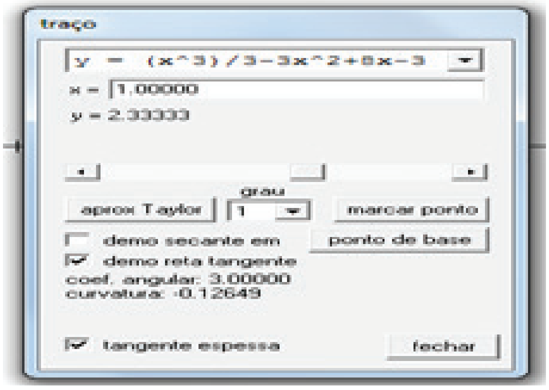
Utilização do *software* para não realizar procedimentos algébricos

No primeiro exercício, os alunos plotaram a reta tangente ao gráfico de uma função no ponto P, cuja abscissa é x = 1, usando o comando *demo reta tangente*.

O passo a seguir, era determinar a derivada da função no ponto 1, isto é, f´(1).

	Participante	**Enunciação**	**Outras ações ou tela do *software*/observações**
1.1	Fernando	Logo, f´(1) é igual ...	
1.2	Gustavo	f´(1) é aquele negócio da reta tangente ... reta tangente com derivada, como é? A reta tangente é a derivada, não é?	
1.3	Fernando	A derivada de f no ponto 1.	Pega o papel

1.4	Gustavo	Então é 3 também	Nesse tela do *software*, além das informações sobre lei de formação da função e valor de f(1), também apresenta o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f em x = 1.



1.5	Fernando	É 3, mas vamos fazer os cálculos para ver.
1.6	Professora	Não precisa calcular, eu quero que vocês deduzam a partir do que encontraram.
1.7	Fernando	Não precisa comprovar não?
1.8	Professora	Depois.
1.9	Fernando e Gustavo	Ah, então é 3!
1.10	Professora	Por quê?
1.11	Fernando e Gustavo	Porque[14] é o coeficiente angular.

Nas falas 1.4 e 1.5, os alunos usaram o *software*, que apresentava coeficiente angular da reta tangente no ponto (1, f(1)), para concluírem que f´(1) = 3. Nesse caso, eles relacionaram a derivada de uma função no ponto como sendo igual ao coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f nesse ponto, empregando o *Winplot* (ver tela no item 1.4), como fica explícito na resposta dada pelos alunos [Fala 1.11], ao questionamento da professora na fala 1.10.

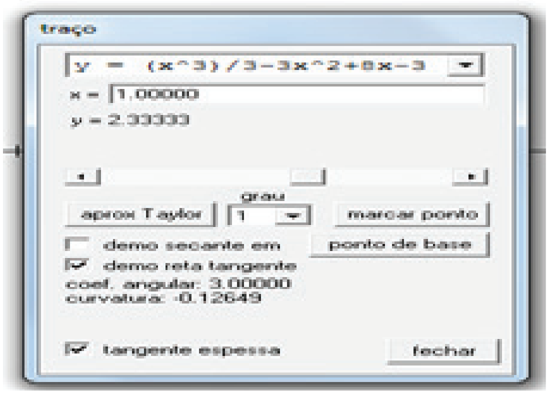
O exercício tinha como objetivo que os alunos recorressem à informação dada pelo *software*, no caso o coeficiente angular da reta tangente, para determinar o valor da derivada da função, sem calcular a derivada da função em x = 1, isto é, sem utilizar as regras de derivação e substituir x = 1, ou ainda, determinar f'(1) a partir da definição de derivada.

No entanto, Fernando tinha dúvidas se poderia utilizar o resultado fornecido pelo *software* para resolver o exercício, como podemos constatar na fala 1.7, quando o aluno disse "Não é preciso comprovar não?". Parece que o aluno não acreditava que era válido não utilizar um procedimento algébrico para resolver um exercício de Cálculo, mesmo de posse do *software*, que apresentava essa possibilidade, a qual inclusive estava prevista no exercício.

Todavia, como veremos nos extratos a seguir, após o aval da professora [Fala 1.6], os alunos começaram utilizar o *software* voluntariamente para não realizar procedimentos algébricos.

No item (d) do primeiro exercício, os alunos deveriam determinar a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto (1, f(1)), ou seja, a reta de equação .

14 O item (d) da questão solicitava que os alunos determinassem algebricamente e registrassem no papel a equação da reta tangente (ver Anexo).

1.12	Gustavo	A equação da reta tangente	
1.13	Fernando	Você deriva e acha o ponto	
1.14	Gustavo	A equação da reta tangente não é y igual a derivada no ponto ...	
1.16	Gustavo	Professora, a reta tangente é só fazer y igual a reta tangente .... ah não, y menos y0 é y igual a reta tangente que multiplica x menos x0?	
1.17	Professora	Reta tangente não, o coeficiente angular, que é o f´(1).	
1.16	Gustavo	Certo, faz aí [falando com Fernando]	
1.17	Gustavo	xo é 1, y0 é quanto? Tem que calcular na equação...	
1.18	Fernando	Aqui 2.333...	O aluno olha para tela 
1.19	Professora	O que olha?	
1.20	Fernando e Gustavo	O y [referindo-se ao y0, ou seja, f(1)] (sub--índice)	Apontando para tela 

Os assuntos abordados nesse experimento tinham sido objeto de estudo de uma disciplina cursada no semestre anterior pelos estudantes e, diversas vezes, no decorrer da resolução dos exercícios, os alunos não estavam muito seguros dos conceitos e resultados teóricos, solicitando auxílio da professora. Como podemos constatar nas falas 1.12 a 1.14, em que Gustavo e Fernando tentavam recordar exatamente como determinar a equação da reta tangente ao gráfico de f, e na fala 1.15, quando Gustavo requisitava a professora para confirmar a sua asserção.

Cientes da forma da equação da reta tangente e de posse dos dados: $x_0 = 1$ e $f'(x_0) = 3$, restava determinar y_0. Na fala 1.18, Gustavo propôs que esse valor fosse calculado, ou seja, substituindo x = 1 em $f(x) = (x^3/3) - 3x^2 + 8x - 3$. Contudo, Fernando depreendeu que o valor de f(1) estava explícito no *software*, no mesmo quadro que já havia sido utilizado para determinar f'(1) [Fala 1.18].

É interessante ressaltar que a estratégia do aluno, usar o valor de f(1), fornecido pelo *Winplot*, não havia sido previsto pela professora, sendo os alunos que optaram por empregá-lo. Parece que eles começaram a entender a validade de utilizar os recursos do *software* para resolver os exercícios, no caso, não realizar procedimentos algébricos.

Este exercício possibilitou que os alunos coordenassem diferentes perspectivas acerca do conceito de derivada de uma função em um ponto, no caso, o coeficiente da reta tangente ao gráfico de f em x = 1 (obtido no *software*), com a derivada f'(1), além de terem utilizado tal informação e valor de f(1), também obtida no *Winplot*, para determinar a equação da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abscissa x = 1. Sendo característica própria do meio mediacional - *software* -, a não utilização de procedimentos algébricos, que, como vimos a princípio, não foi voluntária, necessitando que a professora recomendasse explicitamente [Fala 1.6].

Utilização do *feedback* visual do *software* para orientar conclusões

O quarto exercício consistia em determinar os extremos de uma função a partir do gráfico da sua derivada. Usando *Winplot*, os alunos plotaram o gráfico da derivada da função.

4.1	Fernando	Vamos integrar essa para fazer [sugerindo integrar a derivada para obter a função e assim determinar os extremos locais]
4.2	Gustavo	Ah ... tipo, analisa agora os pontos críticos pra saber. Não precisar integrar não. Aqui está mudando de sinal [apontando para tela] não é isso? [perguntando à professora?]

4.3	Professora	Isso.
4.4	Gustavo	No -2, muda de menos para mais; no zero, de mais para menos.
4.5	Fernando	E no 2, de menos para mais. Do menos pro mais, é ponto mínimo
4.6	Gustavo	É.
4.7	Fernando	E do mais pro menos, ponto de máximo.
4.8	Gustavo	É, então -2 e 2 são pontos mínimos
4.9	Fernando	E o zero ponto de máximo.

Na fala 4.1, Fernando sugeriu integrar a derivada, Gustavo refutou essa ideia [Fala/ação 4.2] e propôs a utilização do teste da derivada primeira para determinar os extremos locais com base no gráfico da derivada primeira.

Observe que ele solicitou o endosso da professora para prosseguir. A partir desse aval [fala 4.3], Fernando acolheu a sugestão e então, juntos interagindo, atuando em cooperação, usando o *feedback* visual do programa, ou seja, o gráfico da derivada primeira, obtiveram a solução do exercício [falas de 4.4 a 4.9].

A rápida visualização proporcionada pelo *software* gráfico possibilitou que os alunos trabalhassem apenas com a representação gráfica da derivada, usando-a para fazer a conexão com o teste da derivada primeira e, assim, resolver o exercício.

Provavelmente, o padrão de resolução algébrica, que tem sido usual nas aulas de Cálculo, tenha levado Gustavo a solicitar que a professora ratificasse a sua estratégia de resolução, que empregava somente a representação gráfica da derivada.

Imprevisibilidade

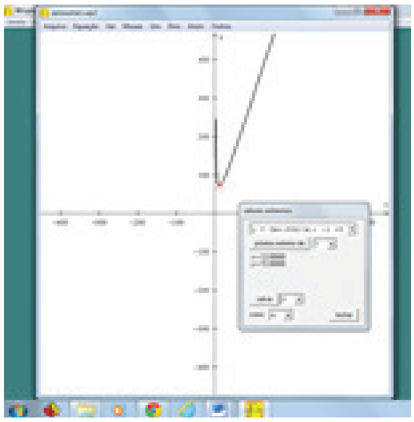
O sexto exercício, descrito a seguir, é uma questão de otimização com referência à semirrealidade: "Uma área retangular com 216 m^2 será cercada e dividida em duas partes iguais por outra cerca paralela a um dos lados. Quais as dimensões do retângulo externo que exigirão a menor quantidade total de cerca? Quantos metros de cerca serão necessários?" [Ver Anexo].

Considerando x e z como dimensões do retângulo externo, e que $x. z = 216$ (área do retângulo de dimensões x e z), os alunos determinaram a função que deveria ser minimizada, isto é, o comprimento da cerca, , para $x > 0$, e plotaram esse gráfico.

A etapa a seguir, era determinar os extremos da função empregando os comandos: *Um, extremos*. Mas, nesse momento, o *software* apresentou um problema.

6.1	Fernando	Professora, não está gerando não, o *Winplot*... os extremos...	
6.2	Professora	O que?	
6.3	Fernando	O *Winplot* não tá gerando os extremos...	
6.4	Professora	O que foi, não está funcionando? Não está "saindo" nenhum extremo aí?	
6.5	Fernando	Ele não...[fala incompreensível]	
6.6	Professora	Extremos... não tá saindo nenhum extremo aí	
6.7	Fernando	Desenhe de novo o gráfico.	
6.8	Gustavo	Não pode diminuir o intervalo não?	
6.9	Professora	Vá de novo aí, Um, extremos.	[Gustavo tinha digitado novamente a lei de formação da função]
6.10	Fernando/Gustavo	[fala incompreensível]	
6.11	Professora	A função [referindo-se à lei de formação da função] está certa, é isso mesmo. Não estou entendendo porque não está calculando [referindo-se aos extremos].	

6.12	Gustavo	Se diminuir o intervalo, professora?
6.13	Professora	Tente diminuir [indica os comandos]
6.14	Professora	Vamos ver se agora ele vai
6.15	Fernando	Olha o negócio querendo ... [funcionar].
6.16	Gustavo	Não disse para diminuir o intervalo.
6.17	Fernando	x = 12



O *Winplot* assume uma janela padrão ([-5,5]x[-5,5]) de plotagem dos gráficos no plano. Como o gráfico da função que seria traçado estava fora dessa janela, foram inseridos na atividade os comandos necessários[12] para ampliar a região de plotagem, tornando possível, assim, a visualização do gráfico. Utilizando tais comandos, os alunos visualizaram o gráfico da função e consequentemente o seu ponto de mínimo [ver tela-6.17].

No próximo item do exercício, os alunos deveriam determinar o ponto de mínimo da função utilizando o *software*, mas nesse momento ocorreu situação imprevista e os extremos da função não foram gerados [falas 6.1 a 6.6]. Na tentativa de resolver o problema, os alunos deram algumas sugestões [falas 6.7 e 6.8]. A proposta de Fernando [fala 6.7] de plotar o gráfico novamente não funcionou, pois a dificuldade não era um erro de digitação na lei de formação da função. Gustavo então sugeriu, mais uma vez, [fala 6.12] restringir o intervalo para plotagem do gráfico[13]. A professora acolheu a sugestão e indicou os comandos necessários para tal procedimento, o que resultou na solução do problema.

Esse trecho é ilustrativo de como a utilização de tecnologias digitais para resolver exercícios de Cálculo pode gerar uma circunstância que não havia sido antevista. Isto indica que os alunos podem ter que realizar outras análises, inclusive em termos dos limites do próprio *software*, não prevista pelo professor ao elaborar a tarefa.

DISCUSSÃO

Nesse artigo, apresentamos o relatório de um estudo que buscou compreender as características da resolução de exercícios, em particular sobre o tema Derivada de função real com uma variável real, mediados por um *software*. Baseado no olhar teórico que consideramos, as ações desenvolvidas pelos alunos (agentes) neste cenário são essencialmente condicionadas pelos meios mediacionais que eles utilizam. Neste caso específico, nossa unidade de análise é alunos (agentes) - resolvendo exercícios de Cálculo (ação) - com - *software* (meio de mediação). A partir da análise dos dados, foi

12 Clicar a tecla Page Down várias vezes.

13 O domínio da função é R_+^*, mas no contexto do exercício, no qual a variável x representa a medida do lado de um retângulo, o domínio é .

possível destacar três categorias: utilização do *software* para não realizar procedimentos algébricos, utilização do *feedback* visual do *software* para orientar conclusões e imprevisibilidade.

Nos extratos [1.1 - 1.11; 4.1 - 4.9; 6.1 - 6.17], pudemos constatar que os alunos utilizam o *feedback* da tecnologia digital para resolver os exercícios. No excerto correspondente ao primeiro exercício, os alunos obtiveram a derivada de f em x = 1 (f'(1)) sem recorrer a rotinas algorítmicas. Portanto, a ferramenta cultural - no caso, um *software* gráfico - foi usada para não realizar procedimentos algébricos, transformando a ação, se comparada, por exemplo, com a realizada através do meio mediacional lápis e papel. A ação "não realizar procedimentos algébricos e resolver exercícios de Cálculo" é uma propriedade possível do meio mediacional - *software* gráfico -, configurando-se, no caso, em uma característica da resolução de exercícios.

Tais condições permitiram que os alunos se detivessem na compreensão da relação entre a derivada da função em um ponto (se esta existe) e o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de uma função neste ponto. A supracitada abordagem pode assumir um papel secundário quando o ensino de Cálculo privilegia o registro algébrico somente no caderno, no qual o foco tende a recair em rotinas algébricas.

O *feedback* rápido da tecnologia digital foi igualmente utilizado pelos alunos na resolução do quarto exercício [falas 4.1 a 4.9], no qual os alunos recorreram à representação gráfica, o gráfico da derivada primeira, proporcionada pelo *Winplot*, com o escopo de determinar os extremos locais da função, articulando a representação gráfica e o resultado teórico (a saber, o teste da derivada primeira para determinação de extremos locais).

A primazia da representação gráfica também esteve presente na resolução do sexto exercício [falas 6.1 - 6.17], em que os alunos plotaram o gráfico da função. A partir do *feedback* fornecido pelo *software*, bem como mobilizando seus conhecimentos prévios acerca da definição de extremos relativos[14], visualizaram que a função possuía um ponto de mínimo relativo para um número real positivo [ver tela no item 6.17]. Porém, como a representação gráfica da função não apresentava o valor numérico desse ponto, era necessário usar um comando específico para determiná-lo e assim resolver o exercício. No entanto, tendo em vista que o *software* não gerou os extremos, os alunos concluíram que havia um problema com o *Winplot* e sugeriram diminuir o intervalo de plotagem, considerando que o gráfico produzido pelo *software* já exibia a localização do ponto de mínimo relativo.

Nesse caso, as condições para as ações (alunos-resolvendo exercícios de Cálculo-mediados por uma tecnologia digital) ocorreu conforme os agentes (alunos) não apenas *agiram-com*, mas também *reagiram-à* ferramenta, adequando-se as possibilidades e limitações oferecidas pelo *software*. Tais condições também impuseram certas características na interação professor-alunos, pois os participantes (professora e a dupla de alunos) envolveram-se de forma cooperativa para a ação de tentar solucionar o problema inesperado e prosseguir na resolução do exercício.

À vista disso, podemos afirmar que, em função da utilização do meio mediacional - *software* -, se compararmos à forma que tradicionalmente os exercícios são resolvidos com lápis-e-papel, ocorreu uma transformação na ação de resolver exercícios e, portanto, na forma de sedimentar tópicos matemáticos estudados anteriormente. Das três categorias apresentadas neste artigo, podemos observar que os exercícios com o *software* demandaram mais dos alunos a análise conceitual das representações algébricas produzidas do que manipulação algorítmica.

14 Uma função real com uma variável real tem: i) um mínimo relativo em x_0, se existir um intervalo aberto I, contendo x_0, tal que $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in I \cap D(f)$. ii) um máximo relativo em x_0, se existir um intervalo aberto I, contendo x_0, tal que $f(x_0) \geq f(x)$ para todo $x \in I \cap D(f)$.

Contudo, há momentos em que os alunos não tinham certeza se podiam basear-se apenas na tecnologia digital [falas 1.7 e 4.2] para resolver os exercícios. É compreensível que isto ocorra, considerando que a ação mediada é inerente ao contexto cultural, histórico e institucional, ocorrendo em um contexto que lhe dá significado (WERTSCH, 1998). Lembremos que os alunos possuíam um histórico de experiências com Cálculo baseadas em manipulações algorítmicas no caderno, o que lhes sugeriram que tais formas de resolução de exercício seriam demandadas mesmo com a presença de um *software*.

Apenas após indicação da professora validando o uso do *software*, os alunos perceberam que podiam empregá-lo. Isso possibilitou não somente a resolução do exercício sem a utilização de procedimentos algébricos no caderno, mas também que os alunos desenvolvessem uma rota alternativa no processo de resolução do primeiro exercício [falas 1.17 a 1.20], mesmo se tratando de um exercício que apresentava uma única solução.

Os episódios analisados, portanto, sugerem que a presença da tecnologia digital possibilitou que os alunos desenvolvessem novas estratégias de resolução de exercício, quando comparados com a forma de resolver exercícios com lápis-e-caderno.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao realizar um experimento de ensino, colocando nossas lentes na unidade alunos-resolvendo exercícios de Cálculo (agindo)-com-tecnologias digitais, buscamos compreender as ações desenvolvidas pelos alunos na resolução de exercícios sobre o tema "Derivada de função real com uma variável real", mediados por uma determinada tecnologia digital. O objetivo do exercício em qualquer que seja o ambiente de aprendizagem é sedimentar a aprendizagem (seja qual for o conceito de aprendizagem que se mencione) de tópicos estudados anteriormente (SKOVSMOSE, 2000). A análise apresentada neste artigo nos sugere que a realização de exercícios de Cálculo com tecnologias digitais coloca uma ênfase mais conceitual do que algorítmica.

Ademais, a presença das tecnologias digitais na resolução dos exercícios de Cálculo, mesmo que de natureza fechada, cuja solução é prevista, parece viabilizar certas estratégias de solução de natureza, vamos assim dizer, "não-algorítmica". Ou seja, há chance para a variabilidade de formas de soluções, porém, devido à resposta rápida do *software*, é possível a predominância de soluções de natureza mais conceitual.

No entanto, considerando as experiências anteriores dos alunos, particularmente nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral (ROCHA, 2010), eles podem se sentir inseguros para apoiar-se apenas na tecnologia digital para levantar essas soluções e/ou conclusões. Parece ser necessário que o professor indique a legitimidade do uso *feedback* da tecnologia para a solução de exercícios.

Outro aspecto é a imprevisibilidade dessa ferramenta, que pode ser ocasionada por problemas técnicos[15], como no caso do experimento em análise. Todavia, isto não é necessariamente uma limitação desse meio mediacional, pois demanda o desenvolvimento de ações e estratégias dos alunos que mobilizam conhecimentos anteriores, bem como habilidades em lidar com a tecnologia digital que surgem com a experiência.

Uma implicação do resultado desse estudo é que a resolução de exercícios de Cálculo com tecnologias digitais, no cenário de investigação ou mesmo no paradigma do exercício, apresenta características próprias, no que concerne aos processos de resolução e aos conhecimentos os quais os alunos tiveram que recorrer para resolver as tarefas, distanciando-se, assim, do modelo fechado do exercício-com-lápis-e-papel.

15 O mesmo tipo de tarefa foi testado em outros computadores e o problema não se repetiu.

AGRADECIMENTOS

Ainda que não sejam responsáveis pelas posições adotadas neste artigo, nossos agradecimentos, pelos comentários à versão preliminar deste artigo, a Ana Virgínia de Almeida Luna, Flávia Cristina Macêdo Costa, Jamille Vilas Boas, Jaqueline de Souza Pedreira Grilo, Maria Rachel Pinheiro Pessoa Pinto de Queiroz, Paulo Diniz, Roberta D'Angela Menduni Bortoli, Thaine Souza Santana e Thiago Viana de Lucena.

REFERÊNCIAS

ALRØ, H.; SKOVSMOSE, O. **O Diálogo e aprendizagem em Educação Matemática**. Coleção Tendências em Educação Matemática. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2006. 158p.

ALOCK, L.; SIMPSON, A. P. Convergence of sequences and series 2: interactions between nonvisual reasoning and learner's belief about their own role. **Education Studies in Mathematics**. v. 58. n. 1, p. 157-175, 2005.

ALVEZ-MAZZOTTI, A. J.; GEWANDSZNAJDER, F. O **Método nas Ciências Naturais e Sociais**: pesquisa quantitativa e qualitativa. 2. ed. São Paulo: Pioneira, 1999.

BARBOSA, S. M. **Tecnologias de Informação e Comunicação, Função Composta e Regra da Cadeia**. Tese (Doutorado em Educação Matemática). UNESP. Rio Claro -SP. 2009.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação Qualitativa em Educação:** Uma introdução à teoria dos métodos. Porto - Portugal: Porto Editora, 1994. 336 p.

COBB, P. Conducting teaching experiments in collaboration with teachers. In A. E. Kelly & R. Lesh (Eds.), **Handbook of research design in mathematics and science education** (p. 307-333). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum, 2000.

FERRARA, R.; PRATT, D.; ROBUTTI, O. The Role and Uses of the Technologies for the Teaching of Algebra and Calculus. In A. GUTIÉRREZ, A., P. BOERO, (eds.), **Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future**. Sense Publishers. p. 237–273. 2006.

GUIMARAIS, Y.; MIRANDA, D.; LAUDARES, J. Utilização de uma sequência investigativa no ensino-aprendizagem de taxa de variação. In V SIPEM. **Anais**... Petrópolis - RJ. 2012.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. **Pesquisa em educação:** abordagens qualitativas. São Paulo: EPU. 1986.

PONTE, J. P. Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.). **O professor e o desenvolvimento curricular.** Lisboa: APM. 2005. p. 11-34.

ROCHA, M. D. **Desenvolvendo atividades Computacionais na disciplina Cálculo Diferencial e Integral:** Estudo pautado na articulação entre Visualização e Experimentação. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto-MG. 2010.

SKOVSMOSE, O. Cenários para Investigação. Boletim de Educação Matemática (BOLEMA), Rio Claro, n. 14, p. 66-91, 2000.

SKOVSMOSE, O. **An invitation to critical mathematics education**. Rotterdam: Sense Publishers, 2011.

STEFFE, L.; THOMPSON, P. Teaching Experiment Methodology: Underlying principles and essential eltements. In.: Lessh R., Kelly A. E. (Eds.) **Research Design in mathematics and science education**. Hillsdale, N.J: Erlbaum. 2000. p. 267-307

WEBER, K. Traditional instruction in advanced mathematics courses: a case study of on theather's leactures and proofs in an introductory real analysis course. **The Journal of Mathematics Behavior**, v. 23. n. 2, p. 115-133, 2004.

WERTSCH, J. V. **Mind as action**. New York: Oxford University, 1998. 203p.

ANEXO

ATIVIDADE EM LABORATÓRIO DE INFORMÁTICA USANDO O WINPLOT.
Derivadas e estudo da variação de funções

1) Seja a função $f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x - 3$.

a) Represente f(x) graficamente usando o *Winplot* e os comandos:
Equação; Explícita; digite: (x^3)/3-3x^2+8x-3, clique ok
b) Vamos traçar retas secantes ao gráfico tomando como base o ponto $(1, f(1))$, usando os seguintes comandos:
Um, traço, na caixa x = ... digite 1, clique marcar ponto, clique demo secante em, leve a barra de rolamento para o canto direito, faça x $\longrightarrow$ 1 clicando, várias vezes, com o mouse na seta à esquerda.
A reta secante tende à ....
Desmarque demo secante, clicando em demo secante.
c) Trace a reta tangente ao gráfico de f em x = 1, usando os comandos:
Na caixa x = ... digite 1, clique demo reta tangente.
Observe que abaixo de demo reta tangente aparece coeficiente angular = ...
Logo, $f'(1) =$.........
d) Determine algebricamente, no papel, a equação da reta tangente ao gráfico de f em x = 1.
e) Trace a equação da reta tangente obtida no item d) , usando os comandos:
Equação; Explícita; digite: a equação obtida, clique ok.
Feche esse gráfico.

2) Seja $f(x) = Axe^{-x^2}$, vamos determinar para que valores de A o ponto de abscissa $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ é um ponto de mínimo de f, siga as instruções:
a) Represente f(x) graficamente usando o *Winplot* e os comandos:
Equação; Explícita; digite: Axe^(-x^2), clique ok
b) Calcule $f(\frac{1}{\sqrt{2}}) =$ ....

c) Represente graficamente o ponto $P\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, f(\frac{1}{\sqrt{2}})\right)$, usando os comandos:

Equação, ponto, (x,y), digite x = 1/sqr(2), y = ...
Obs: $\sqrt{\square} =$ sqr( )

d) Faça A variar usando os comandos:
anim A, parâmetros A – W, faça A variar, clicando sobre a barra de rolagem.
e) Para que valores de A o ponto de abscissa $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ é um ponto de mínimo local de f?
f) A função f possui um máximo local?

3) Dada a função $f(x) = 2sen(x) + \cos(2x)$, com $-\pi \leq x \leq \pi$.
[Teorema de Weierstrass: Se f é contínua em [a,b] então f atinge seu valor máximo e mínimo em [a,b]].

Como f é contínua em $[-\pi, \pi]$ então f possui um máximo e um mínimo absoluto em $[-\pi, \pi]$. Vamos determinar esses extremos.

a) Represente graficamente f usando os comandos: Equação; Explícita; digite 2sin(x)+cos(2x), clique em travar intervalo, para x min use pi, para x max use –pi, clique ok.

b) Para determinar os pontos extremos usando o *Winplo*t, use os comandos:

Um, extremos. Clicando em próximo extremo em o *Winplot* apresenta as coordenadas dos extremos de f.

c) Quais as coordenadas do ponto de máximo e mínimo absoluto de f em $[-\pi, \pi]$.

4) Sejam a função $f(x) = x^3 - 4x$ e g(x) uma função tal que g´(x) = f(x).

Vamos usar f(x) para estudar o crescimento de g(x).

a) Represente f(x) graficamente usando o *Winplot* e os comandos:

Equação; Explícita; digite: x^3-4x.

b) Determine os zeros de f(x) usando os comandos:

Um; Zeros; clique próximo para ver os outros zeros. Os zeros de f(x) são os pontos críticos de g(x).

c) Utilizando o gráfico, determine os intervalos onde f é positiva e os intervalos onde f é negativa.

f(x) > 0 em ....

f(x) < 0 em ....

d) Complete usando o gráfico de f(x);[Lembre que f(x) = g´(x)]

i) g(x) é crescente nos intervalos: ....

e decrescente em ....

ii) g(x) possui máximo relativo para x = ...

iii) g(x) possui mínimo relativo para x = ...

e) g(x) é uma das primitivas de f(x) [existe uma infinidade de primitivas para cada função que possui primitiva)]

Confira suas respostas para d) obtendo o gráfico de uma primitiva para f, com os seguintes comandos:

Um; Medidas; Integrar f(x) dx; lim inferior, digite -3 e lim superior digite 3, clique em indefinida.

5) Sejam as funções $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ e g(x) uma função tal que g´(x) = f(x).

a) Represente f(x) graficamente usando o *Winplot* e os comandos:

Equação; Explícita; digite: ln(x^2+1)

b) Complete: g(x) é crescente no intervalo …………

[Vamos usar a 2ª derivada de g(x), ou seja a 1ª derivada de f(x), para estudar a concavidade de g(x)].

c) Obtenha o gráfico da derivada de f(x) usando os comandos:

No quadro inventário clique derivar.

d) g(x) tem concavidade voltada para cima no intervalo ...., g(x) tem concavidade voltada para baixo no intervalo ....

e) Complete: A abscissa do ponto de inflexão de g(x) é x = ...

f) Confira suas respostas esboçando o gráfico de g(x), isto é, obtendo uma das primitivas de f(x), com os seguintes comandos Um; Medidas; Integrar f(x) dx; lim inferior, digite -3 e lim superior digite 3, clique em indefinida.

Caso não visualize o gráfico de g, clique a tecla *page down* várias vezes até visualiza-lo.

6) Resolva o seguinte problema de otimização (com aproximação) completando os passos abaixo. “Uma área retangular com 216 m^2 será cercada e dividida em 2 partes iguais por outra cerca paralela a um dos lados. Quais as dimensões do retângulo externo que exigirão a menor quantidade total de cerca? Quantos metros de cerca serão necessários? ”

a) Se x e z são as dimensões do retângulo externo e y é o comprimento total da cerca então y = ...

b) De acordo com a área do retângulo externo temos que x.z = ... $\Rightarrow$ z = ...

c) Substituindo o valor de z em a) temos y = ...

d) Determine o domínio de y.

e) Considerando a função obtida em c), use o *Winplot* para

i) Representa-la graficamente. (para visualizar o gráfico use a várias vezes a tecla *Page Down*)

ii) De acordo com o problema devemos nos restringir a analisar o gráfico de f para x................ ....

ii)Determinar seus pontos de extremos locais usando os comandos: Um, extremos.

f) As dimensões do retângulo externo que exigirão a menor quantidade total de cerca são x = ... e z = ...

g) A quantidade de metros de cerca que serão necessários y = ...

RECEBIDO: 01.03.2014.

CONCLUÍDO: 01.04.2014.