VIDYA, v. 34, n. 1, p. 241-256, jan./jun., 2014 - Santa Maria, 2013. **ISSN** 2176-4603

JOGOS DE LINGUAGEM EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

LANGUAGE GAMES IN ACTIVITIES OF MATHEMATICAL MODELING

LOURDES MARIA WERLE DE ALMEIDA*

RESUMO

Neste artigo, apresentamos considerações sobre modelagem matemática à luz da perspectiva wittgensteiniana de linguagem. A partir de três cenários diferentes de modelagem matemática olhamos para uma atividade em cada cenário com vistas a identificar diferentes jogos de linguagem, como caracterizados por Ludwig Wittgenstein. Nosso olhar, por um lado, identifica jogos de linguagem com relação ao que é caracterizado como modelagem matemática. Por outro lado, também se evidenciaram jogos de linguagem em relação aos modelos matemáticos construídos no âmbito dessas atividades, levantando uma discussão sobre as semelhanças de família e formas de vida associadas a estes jogos.

Palavras-chave: Educação Matemática. Modelagem Matemática. Linguagem.

ABSTRACT

In this article we present mathematical modeling considerations in the light of Wittgenstein's perspective on language. From three different scenarios of mathematical modeling we look at an activity in each scenario to identify different language games, as characterized by Ludwig Wittgenstein. Our look, on the one hand, identifies language games with respect to that are characterized as mathematical modeling. On the other hand also showed language games in relation to mathematical models built in the framework of these activities, raising a discussion about the similarities of family and life forms associated with these games.

Keywords*: Mathematics Education. Mathematical Modeling. Language.*

* Docente do Programa de Pos-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática; UEL – Londrina – PR. E-mail: lourdes@uel.br

INTRODUÇÃO

Discussões sobre as distintas perspectivas de modelagem matemática na Educação Matemática e o desafio delas decorrentes para as práticas de sala de aula são recorrentes na literatura.

Em termos gerais, parece que alguns aspectos estão bem enraizados nas diferentes perspectivas. Pelo menos dois desses aspectos também são tematizados, embora de uma forma sutil, neste artigo: relações entre matemática e realidade e sua configuração em diferentes perspectivas de modelagem; a matemática e como se apresenta esta matemática nestas perspectivas de modelagem.

Para apresentar nossas reflexões, pautamo-nos na filosofia de Ludwig Wittgenstein, particularmente em suas teorizações a partir do que se costuma caracterizar como segundo Wittgenstein, cujo ícone é sua obra póstuma *Investigações Filosóficas.*

Neste livro, Wittgenstein formaliza em sua filosofia de linguagem a ideia de *jogos de linguagem*, argumentando que entre os diferentes jogos podem se perceber *semelhanças de família* e que estes são associados à *forma de vida*. Assim, a concepção referencial de linguagem defendida até este momento, inclusive pelo próprio filósofo, seria substituída por aquela em que a linguagem instaura processos de ação e de transformação e o significado passa a se constituir por meio dos usos que fazemos da linguagem.

Para ponderar sobre jogos de linguagem em relação à modelagem matemática e aos modelos matemáticos construídos mediante o desenvolvimento de atividades de modelagem, referimo-nos a três cenários em que o desenvolvimento de três diferentes atividades de modelagem é apresentado de forma abreviada.

Olhando para estas três atividades à luz das ideias de Wittgenstein identificamos diferentes jogos de linguagem em relação ao o que é modelagem matemática, bem como em relação aos modelos matemáticos construídos nas atividades. Problematizamos essa identificação com base em assertivas de Wittgenstein sobre os próprios jogos de linguagem, as semelhanças de família e possíveis desdobramentos para a modelagem e a matemática em atividades de modelagem.

MODELAGEM MATEMÁTICA

Para iniciar nossas reflexões sobre modelagem matemática numa perspectiva wittgensteiniana, apresentamos alguns *cenários* iniciais e na sequência tratamos da modelagem em cada um deles. Cada *cenário* tem a intenção de mostrar características de uma situação-problema que foi investigada por alunos em uma atividade de modelagem matemática.

Três cenários específicos

Cenário 1

Milhares de pessoas, independentemente de raça, cor, sexo e mesmo idade, apresentam queixas somáticas ou psicológicas relacionadas à ansiedade ou desordens psiquiátricas, muitas vezes caracterizadas como sintomas de depressão. Mais de 80% das pessoas com depressão melhoram com tratamento incluindo psicoterapia e medicamentos. A grande maioria dos medicamentos tem em sua fórmula o cloridrato de fluoxetina disponível no mercado sob a forma de cápsulas ou em solução oral. Diazepam é o nome comercial de um medicamento no qual cada cápsula contém 10 mg de fluoxetina. A curva de concentração plasmática/tempo do diazepam é bifásica: uma fase de distribuição inicial rápida e intensa e uma fase de eliminação terminal prolongada. A meia vida[1]·, associada à eliminação do diazepam, em geral, nas primeiras 24 horas após a ingestão é cerca de três horas; já depois de um uso mais prolongado do medicamento ela pode variar entre 20 e 50 horas, dependendo de situações de cada usuário. Este medicamento é controlado, podendo ser utilizado somente sob recomendações médicas.

Problema: estudar a concentração do medicamento no organismo, considerando a ingestão de diferentes doses e diferentes tempos de tratamento conforme esclarece a bula do medicamento.

Cenário 2

As embalagens de milho de pipoca para serem estouradas no forno de micro-ondas apresentam, em geral, a seguinte informação: "*o tempo ideal para retirar a pipoca do forno de micro-ondas varia entre 2 e 5 minutos, dependendo da potência do forno. Mas em geral, o instante ideal para tirar o pacote do micro-ondas é quando o tempo entre um estouro e outro for superior a 2 segundos*". Muitas marcas ou modelos de fornos de micro-ondas possuem um botão para programar o tempo de preparo das pipocas. Vamos então estudar a adequação desse tempo, considerando que o fabricante deve ter feito um trabalho empírico para fazer essa indicação de tempo nos fornos. Com essa finalidade foram *produzidos* dados sobre o tempo e quantidade de pipocas estouradas, conforme é indicado na tabela 1.

Tabela 1 - Dados produzidos com relação ao tempo de estouro de pipocas

Pacote de pipoca	Quantidade inicial de milho (grãos)	Instante do primeiro estouro (em segundos)	Instante em que o pacote foi retirado do micro-ondas (em segundos)	Grãos que não estouraram
Pacote 1	715	96	170	52
Pacote 2	715	97	170	75
Pacote 3	715	92	170	63
Pacote 4	715	98	170	40

Problema: Como a Matemática pode *ditar* o tempo que o micro-ondas deve indicar quando o botão *pipoca* é acionado?

Cenário 3

A presença de cálcio em rios tem sido objeto de estudo, investigando a concentração de cálcio em solos de fundo de rios. Segundo estudos realizados pela Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária (EMBRAPA) com a criação de peixes em viveiros, o crescimento de fito plâncton (seres fotossintetizantes, base da cadeia alimentar aquática) e a produção de organismos aquáticos são limitados pelo suprimento inadequado de substâncias como o cálcio existente no substrato (solo do fundo de rios). A fertilidade natural das águas que garante a existência de diversas espécies de peixes aumenta com o aumento da concentração de cálcio e, consequentemente, do aumento da produção de fito plâncton. Um ambiente aquático com cerca de 150 mg/L de cálcio é considerado fértil.

Em uma pesquisa realizada, foram retirados sedimentos de diferentes profundidades do Rio Limoeiro – localizado em área rural da cidade de Ibiporã (PR) – e as concentrações de cálcio em cada profundidade são apresentadas na tabela 3.

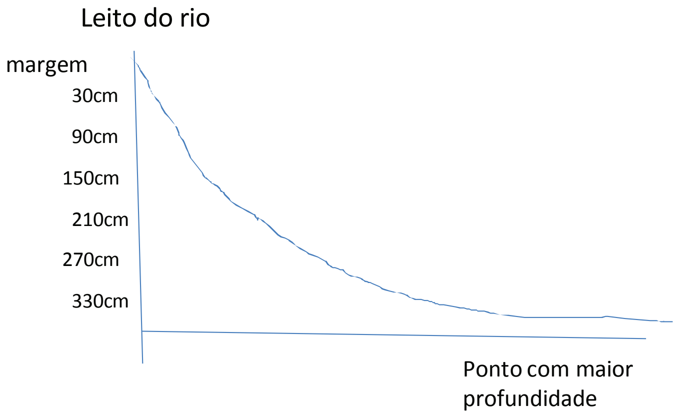
1 Meia-vida é o tempo necessário para que a quantidade inicial de um elemento químico decaia para a metade.

Tabela 2 - Concentração de cálcio no rio Limoeiro

Profundidade do rio (cm)	Concentração de Cálcio no substrato (mg/cm³)
30	2,958
90	2,316
150	1,641
210	1,264
270	0,893
330	0,697

Fonte: Borssoi, 2004.

Figura 1 - Representação do rio



Fonte: Silva (2013, p. 123).

Problema

Considerando que a produção de fito plâncton requer uma concentração de cálcio de 150 mg/L, ou seja, 0,15mg/cm³, até qual profundidade do rio Limoeiro esta produção ainda pode acontecer?

A Modelagem Matemática em cada cenário

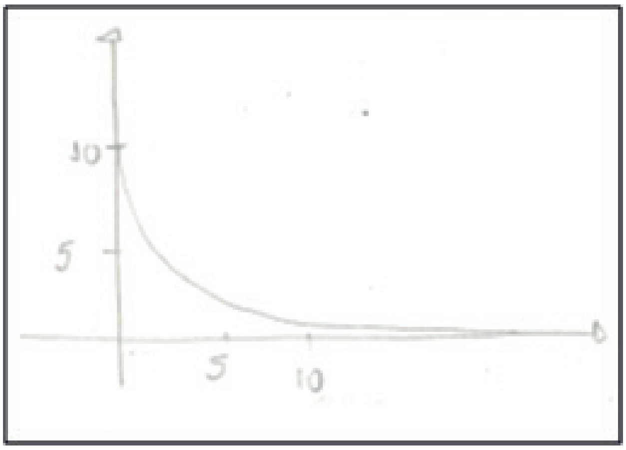
Para resolver o problema 'Estimar a concentração do medicamento no organismo, considerando a ingestão de diferentes doses e diferentes tempos de tratamento conforme esclarece a bula do medicamento' relativo ao cenário 1, alunos de um curso de Licenciatura em Matemática consideraram duas situações diferentes: 1 - Qual é a concentração de Diazepam no organismo, no decorrer do tempo, se uma pessoa ingerir um comprimido de 10 mg? 2 - Qual é a concentração de Diazepam no organismo, no decorrer do tempo, se o paciente ingerir um comprimido de 10 mg a cada 24 horas? A descrição detalhada do desenvolvimento da atividade é apresentada em Almeida e Palharini (2012). No presente artigo, referimo-nos apenas a procedimentos e respostas apresentados pelos alunos para a primeira situação. Para este caso definiram as variáveis: tempo (t), em horas, e concentração de Diazepam no organismo como variável dependente ($C(t)$), em miligramas. A partir das informações da bula do medicamento, introduzindo uma variável auxiliar n, ($C(n) = C_n$) e já fazendo uma análise sobre os dados, os alunos construíram a figura 2.

Figura 2 - A Concentração de medicamento no decorrer de um dia: análise da variação e visualização gráfica da solução.

Tabela 1: Concentração de uma dose do remédio no organismo em função do tempo

t (horas)	n	C_n (mg)	$C_{n+1} - C_n$	$\frac{C_{n+1} - C_n}{C_n}$
0	0	10	-5	-0,5
3	1	5	-2,5	-0,5
6	2	2,5	-1,25	-0,5
9	3	1,25	-0,625	-0,5
12	4	0,625	-0,3125	-0,5
15	5	0,3125	-0,15625	-0,5
18	6	0,15625	-0.078125	-0,5
21	7	0,078125	-0,0390625	-0,5
24	8	0,0390625	-0,01953125	-0,5

(a) Fonte: Palharini (2010, p. 80).



(b) Fonte: Palharini (2010, p. 81).

A última coluna da tabela construída na figura 2 indica aos alunos que $\frac{C_{n+1} - C_n}{C_n} = k$. Levando em consideração a *forma de vida* desses alunos, as discussões acerca de variável discreta e variável contínua fizeram-nos associar à situação o clássico problema de valor inicial de primeira ordem $\begin{cases} \frac{dC}{dt} = k.C \\ C(0) = 10 \end{cases}$ cuja solução obtida pelos alunos é $C(t) = 10.e^{-0,23104\ t}$. Na Figura 2 (b), consta uma visualização gráfica construída por uma aluna para essa solução. Usando seu conhecimento sobre funções exponenciais, os alunos fizeram os cálculos e concluíram que C(*t*) = 0,0000000001 após 109 horas da ingestão da primeira dose, ou seja, em 4 dias e meio, aproximadamente.

Para tratar da modelagem em relação à indicação do tempo para o estouro de pipocas em forno de micro-ondas, vou usar uma descrição apresentada em Almeida, Silva e Vertuan (2012) e realizada por alunos do segundo ano do Ensino Médio.

Duas especificidades parecem se evidenciar nessa atividade de modelagem matemática. A primeira diz respeito ao próprio problema que esta atividade visa responder. Não se trata de buscar solução para algo por meio da matemática, mas de buscar entendimento por meio da matemática para algo já resolvido. De fato, os tempos já estão definidos pelos fabricantes dos fornos e o que os alunos têm curiosidade (ou talvez interesse) em investigar é porque é este o tempo indicado. A segunda especificidade é de que neste caso não há dados prontos que possam ser obtidos por meio de um site da internet, por meio de uma revista ou alguma outra fonte. O que os alunos fizeram foi produzir dados, estourando pipocas e, provavelmente, comendo pipocas!

Além disso, os dados quantitativos obtidos com estes estouros de pipocas, na verdade, também não eram suficientes para a formulação da hipótese fundamental para a matematização da situação. Neste caso, esta hipótese tem origem empírica; é o 'ouvir' o barulho do estouro da pipoca que subsidia a afirmação dos alunos: experimentalmente, observa-se que, iniciado o processo de estouro intenso das pipocas, a velocidade de transformação do milho em pipoca vai diminuindo na medida em que o número de grãos que ainda não estouraram diminui; ou ainda, quanto menos grãos têm para estourar, menor é a velocidade com que os grãos estouram. Desta observação segue que: a variação do número de grãos que se transformam em pipoca é proporcional ao número de grãos que ainda não se transformaram em pipoca. Em linguagem matemática, considerando que P_n é o número de grãos que ainda não se transformaram em pipoca no instante n, os alunos puderam escrever $P_n - P_{n+1} = k.P_n$

Assim: $P_{n+1} = P_n - k.P_n$ e $P_{n+1} = P_n(1-k)$

Nesta expressão, usando um processo de recorrência, puderam escrever:

para $n = 0 \quad P_1 = P_0(1-k)$

para $n = 1 \quad P_2 = P_1(1-k) = P_0(1-k)(1-k) = P_0(1-k)^2$

para $n = 2 \quad P_3 = P_2(1-k) = P_0(1-k)(1-k)^2 = P_0(1-k)^3$

para $n = 3 \quad P_4 = P_3(1-k) = P_0(1-k)(1-k)^3 = P_0(1-k)^4$

Levando-se em consideração a recorrência, para um instante n qualquer de tempo (em segundos) a quantidade de grãos que ainda não estouraram é dada por:

De posse dessa equação, os alunos usaram os dados coletados com o estouro dos pacotes de pipoca indicados na terceira coluna da tabela 1. Considerando, a partir desses dados, o tempo médio para que as pipocas comecem a estourar como $t = 96$ segundos, faz sentido falar em P_n para $t \geq 96$ segundos o que corresponde dizer $n = t - 96$. Usando então *t* como variável contínua, o modelo que informa o número *P(t)* de grãos não estourados no instante *t* é dado por:

$$P(t) = \begin{cases} 715, & se\ t < 96 \\ 715.(1-k)^{t-96}, & se\ n \geq 96 \end{cases} \qquad (1)$$

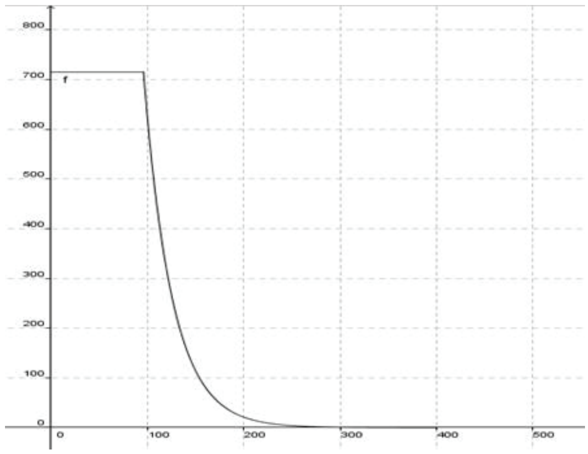
onde *t* é o tempo em que o pacote foi retirado do forno de micro-ondas.

Resta então, determinar o valor do parâmetro *k* na expressão (1), o que pode ser feito usando um dos valores do conjunto de dados observados, resultando em

$$P(t) = \begin{cases} 715, & se\ t < 96 \\ 715.(0{,}96662)^{t-96}, & se\ t \geq 96 \end{cases} \qquad (3)$$

cuja representação gráfica é apresentada na figura 3.

Figura 3 - Números de grãos que ainda não se transformaram em pipoca no instante t



Nesta atividade, entretanto, a obtenção do modelo não é a solução, nem mesmo representa a conclusão com relação ao que está sendo estudado. Era preciso retomar ao problema da análise do tempo indicado no forno, bem como a condição apresentada na embalagem de que a pipoca deve ser retirada no momento em que o tempo entre um e outro estouro é superior a dois segundos. Usando linguagem matemática, a informação de que entre os instantes e haverá apenas um estouro corresponde a $P(t) = P(t + 2) = 1$. Usando $P(t)$ como dado em (2) para $t > 96$, resulta que $t \approx$ 209 segundos. Isto equivale a dizer que o tempo de 3minutos e 29 segundos é aquele indicado para retirada do pacote do forno.

Voltar-se ao problema Como a Matemática pode 'ditar' o tempo que o micro-ondas deve indicar quando o botão 'pipoca' é acionado? seria então o que estes alunos fariam, buscando, em certa medida, confirmar nessas construções matemáticas o que o fabricante dos fornos já havia concluído.

A atividade que faz um estudo da concentração de cálcio em água de um rio, indicada no cenário 3, foi desenvolvida por alunos de um curso de Licenciatura em Matemática e numa disciplina de Modelagem Matemática na Perspectiva da Educação Matemática e está descrita com detalhes em Silva (2013). O que esses alunos fizeram, foi procurar uma solução para um problema que propuseram usando, entretanto, informações sobre a situação já fornecidas pela professora da disciplina.

Inicialmente, adicionaram aos dados da tabela 2 uma coluna incorporando o que denominaram de *variável auxiliar n* conforme se mostra na tabela 3.

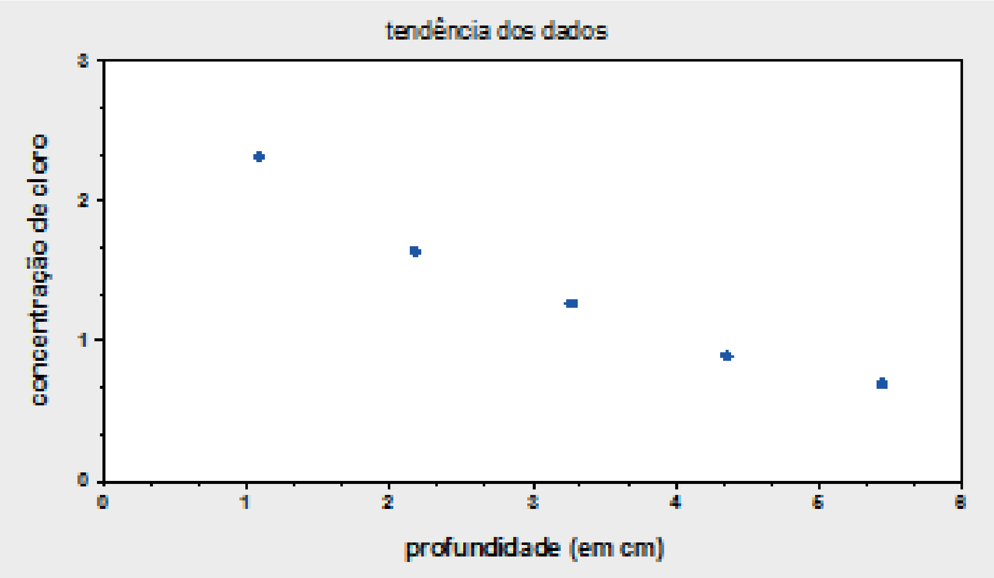
Tabela 3 – Concentração de cálcio no rio Limoeiro de acordo com profundidade, utilizando variável auxiliar.

Profundidade do rio, em centímetros (p)	Profundidade – variável auxiliar (n)	Concentração de cálcio (Cn), em mg/cm3
30	0	2,958
90	1	2,316
150	2	1,641
210	3	1,264
270	4	0,893
330	5	0,697

Fonte: Silva (2013, p. 123).

Os dados da tabela 3 foram representados no plano cartesiano utilizando a planilha Excel, conforme figura 3.

Figura 4 - Representação gráfica da tendência dos dados.



Fonte: Silva (2013, p. 124).

Nesta atividade, a modelagem dos alunos pode ser incluída numa categoria denominada por Bean (2012) de ajuste de curva. Neste caso, usando a tendência dos dados, a hipótese dos alunos foi de que o modelo matemático da atividade poderia ser representado por uma função do tipo exponencial. Deste modo, além de considerar que a concentração de cálcio diminui com a profundidade, levaram em consideração a tendência dos dados.

Então, para a variável auxiliar n usada da tabela 4, usando o *software Curve*, os alunos obtiveram o modelo exponencial $C(n) = 2{,}958(0{,}753)^n$, em que $n = \frac{p-30}{60}$ com $p \geq 30$. Também nessa atividade, como já ocorreu naquela a que nos referimos no cenário 1, os alunos optaram por uma mudança de base, escrevendo o modelo $C(p) = 3{,}409.e^{-0{,}0047.p}$ para indicar a quantidade de cálcio em função da profundidade do rio.

O que os alunos pretendiam nesta atividade, entretanto, não estava dito no modelo. No entanto, este seria usado para retomar ao problema e determinar até em que profundidade a quantidade de cálcio encontra-se adequada para a produção de fito plâncton. Para isso era necessário fazer $C(p) = 3{,}409.e^{-0{,}0047.p} = 0{,}15mg/cm^3$. O que esta igualdade indica é que até profundidade de 664 cm a quantidade de cálcio ainda é suficiente para a produção de fito plâncton.

O que podemos dizer a partir dos cenários

Discussões sobre o que é modelagem matemática na educação matemática, como devem ser conduzidas atividades de modelagem e com que finalidade são incorporadas às aulas de matemática são recorrentes na literatura.

Uma dessas discussões se encaminha numa argumentação que procura firmar a ideia de que a modelagem na educação matemática tem inspiração na matemática aplicada e, assim, o que se faz para desenvolver a atividade carrega esta descendência. Ainda que pudéssemos direcionar nossas considerações por essa linha, não o fazemos aqui, pois não nos interessa colocar esse aspecto em relevo, muito embora, possamos nos referir a Ludwig Wittgenstein, que no prefácio do seu livro mais reconhecido em sua segunda fase, o *Investigações Filosóficas*, refere-se ao seu livro anterior, o *Tractatus Logico-Philosophicus*, dizendo que novos pensamentos só podem ser verdadeiramente compreendidos por sua oposição ao seu velho modo de pensar, tendo-o como pano de fundo.

A primeira ideia que nos instiga a olhar para as atividades dos três cenários descritos é a de que vale a pena ainda considerar a questão 'O que é modelagem matemática?'. Neste caso, também o farei a partir de uma indicação de Wittgenstein "Não pense, mas veja![2]" (WITTGENSTEIN, 1999, p. 52).

Então, simplesmente *vendo* as atividades descritas, parece se clarear uma ideia de que cada atividade tem características específicas e que para desenvolver essa atividade são requeridas ações, procedimentos, pensamentos peculiares.

No cenário 1, o que vem do empírico, da experiência, da situação-problema, é a meia vida do medicamento e a dosagem de um comprimido. Isto parece ser suficiente para inspirar e gerar uma série de cálculos, acionar uma série de conhecimentos que os alunos já parecem ter ou então os construíram durante a atividade (isto não posso decidir agora) e então indicar uma resposta dizendo que em cerca de quatro dias, provavelmente, o efeito do comprimido já tenha se dissipado. Neste cenário a situação empírica vem subsidiar, ou vem mostrar a matemática que estes alunos precisam aprender (ainda que seja aprender a aplicá-la).

Para refletir sobre a matemática do micro-ondas, no cenário 2, a configuração da atividade é outra. Não há exatamente uma busca, uma necessidade de construção de uma resposta, porque não há uma pergunta! Mas também não há dados quantitativos! Neste caso, a informação da embalagem da pipoca é o que dita a regra do que a atividade deve seguir e conseguir. Como construir dados, como definir hipóteses, como fazer matematização, é o que as regras agora regulamentam. Assim, nesta atividade, a modelagem matemática parece organizar a situação empírica. Não haveria uma atividade se não houvesse uma curiosidade de saber, de entender como a matemática pode ter influenciado as decisões dos fabricantes com relação ao tempo a ser informado quando o botão *pipoca* for acionado no forno.

No cenário 3, o que parece se configurar é uma situação em que ensaios de uso da matemática em situações não matemáticas é o que os alunos têm intenção de fazer. A situação empírica, na verdade, é empírica porque leva em consideração observação de coisas. Todavia, ela não vem emaranhada na experiência dos estudantes. Os dados para o estudo do problema já lhes foram disponibilizados e eles puderam fazer bons exercícios com a matemática, com a tecnologia, para encontrar a resposta ao problema proposto. Neste caso, a atividade claramente proporciona aos alunos coisas diferentes que as atividades dos outros dois cenários. Os alunos tomam decisões sobre a matemática, que é normativa, dita as regras do que nesta atividade pode ser adequado para obter resposta para o problema definido.

Assim, os três cenários são um indicativo de que o que se caracteriza como modelagem matemática, pode variar em função dos próprios usos que se faz dela.

Uma segunda possibilidade de não pensar, mas olhar (na linguagem de Wittgenstein) sobre os

2 Mais adiante vou repetir essa afirmação de Wittgenstein e me referir ao contexto em que ele a usou. Por ora, vou me valer de seu poder enquanto ferramenta linguística.

três cenários é focar na matemática, nos modelos que os alunos construíram nessas atividades e como o fizeram.

Na primeira atividade, o decaimento da concentração de fluoxetina no organismo é descrito por uma função exponencial que foi obtida como solução de uma equação diferencial ordinária separável de primeira ordem. Ou seja, análise da variação da concentração no decorrer do tempo é que possibilitou concluir que esta concentração decresce exponencialmente e que, portanto, esta concentração segue as regras que uma função desse tipo determina.

No cenário 2, ao contrário do primeiro, a via de obtenção do modelo final, também exponencial, precisava seguir outros encaminhamentos. No entanto, o barulho que os alunos ouviram ao estourar os vários pacotes de pipocas é que ditava as regras: quanto menor é o número de grãos que ainda não estouraram, mais lento é o som do tac, tac, tac... típico de quando se ouve os grãos de milho se transformarem em pipocas e, portanto, menos grãos vão estourar em cada unidade de tempo. Parece curioso, mas este é também um comportamento exponencial. Os alunos, entretanto, teriam que chegar a este modelo por um caminho diferente daquele usado pelos alunos no cenário 1.

Para além dessa diferença com relação às informações que o problema oferece, havia também a questão do nível de escolaridade dos alunos. Se para os alunos do curso de licenciatura em matemática, a exponencial surgiu como solução de uma EDO, neste caso sua origem teria de ser outra. O uso que estes alunos do ensino médio fizeram da recorrência construindo o modelo exponencial é um exemplo típico de como a matemática da atividade de modelagem matemática é muito mais normativa do que descritiva. A matemática, neste cenário, é criada para subsidiar a obtenção do modelo. O modelo também é exponencial. Ainda que estes alunos não tenham apresentado o modelo considerando a base e, provavelmente em função de sua forma de vida, poderíamos escrever o modelo usando essa base como sendo:

$$P(t) = \begin{cases} 715 & \text{se } t < 96 \\ 715.e^{(-0{,}03395t+3{,}26)} & \text{se } t \geq 96 \end{cases} \tag{4}$$

No cenário 3, os alunos, a partir uma tendência dos dados do comportamento da quantidade de cálcio em função da profundidade do rio, representada graficamente conforme mostra a figura 3, optaram por um ajuste exponencial para escrever a relação entre profundidade do rio e quantidade de cálcio. Neste caso, ainda que o ajuste tenha sido realizado com o uso de *software*, os alunos precisaram de algumas decisões para realizar esse ajuste. O comportamento global do fenômeno indicado pela tendência dos dados foi associado pelos alunos às propriedades da função exponencial e neste caso foi essa tendência que definiu as regras que deveriam ser seguidas. O que esse grupo considerou adequado para encontrar a função foi o uso de um *software* para determinar os parâmetros da função exponencial $y = a.e^{bx}$. Assim, o problema de conhecer a quantidade de cálcio nas diferentes profundidades do rio se transformou no problema de encontrar o valor de *a* e *b*.

Considerando estes três cenários associados a atividades de modelagem matemática, poderíamos agora sim pensar ou mesmo voltar a perguntar: o que é modelagem matemática? Qual o significado de função exponencial? Nosso olhar sobre as três atividades descritas, na verdade, revela diferentes usos da modelagem matemática, diferentes usos da função exponencial. São estes diferentes usos que, numa perspectiva wittgensteiniana, remetem ao que o filósofo caracterizou como jogos de linguagem.

JOGOS DE LINGUAGEM NA FILOSOFIA DE WITTGENSTEIN

Ludwig J. J. Wittgenstein (1889-1951) foi um filósofo austríaco, cuja trajetória intelectual, marcada por uma obra publicada em vida e várias outras obras póstumas, revela preocupações e ocupações com a filosofia da linguagem em geral e também, em grande medida, da linguagem matemática, mais especificamente.

O que seus escritos indicam, e muitos de seus admiradores e interpretadores dedicam-se justamente a esse aspecto de sua trajetória, é que entre a obra *Tractatus Logico-Philosophicus*, publicada em vida, e sua obra póstuma muito reconhecida, *Investigações Filosóficas*, revela-se uma profunda mudança em sua concepção com relação a filosofa da linguagem.

Sem adentrar nas discussões que este aspecto vem gerando na literatura, mas ainda assim reconhecendo que, enquanto o *Tractatus* revela uma concepção essencialista e referencial de linguagem, indicando que dizer algo é descrever algo, em sua segunda fase (como caracterizada por alguns) Wittgenstein passa a se ocupar dos usos que fazemos da linguagem.

Para expor em sua filosofia este aspecto dinâmico da linguagem, apontando que ela instaura processos de ação e de transformação, Wittgenstein se vale da expressão *jogos de linguagem*, numa comparação com a ideia de jogo e de como nos comportamos (ou podemos nos comportar) ao jogar ou olhar para um jogo.

A própria afirmação de Wittgenstein de que o conceito de 'jogo' é um conceito com contornos imprecisos (WITTGENSTEIN, 2012, § 71) contribui para as suas afirmações associando significados e usos da linguagem. Esta relação entre usos e jogos de linguagem em vários momentos vem associada com tentativas de mostrar o entendimento da própria palavra jogo:

> [...] tampouco pode-se dizer que 'jogo' tem apenas vários significados independentes. [...] O que chamamos 'jogos' são processos inter-relacionados de diversas maneiras, com muitas transições diferentes entre um e outro (WITTGENSTEIN, 2003, § 35)

Segundo Gottschalk (2004, p. 318), "a palavra jogo vem ressaltar as diversas atividades com as quais a linguagem se vincula" e neste sentido Wittgenstein refere-se aos jogos de linguagem como sistemas de comunicação humana e exemplifica o termo

> A expressão "jogo de linguagem" deve salientar aqui que o falar da linguagem é parte de uma atividade ou de uma forma de vida. Tenha presente a variedade de jogos de linguagem nos exemplos, e em outros: Ordenar e agir segundo ordens; descrever um objeto [...] relatar um acontecimento; cantar cantigas, pedir, agradecer [...] representar teatro [...] (WITTGENSTEIN, 2012, §23).

Assim, as diferentes práticas em que a linguagem é usada, ou contextos em que ela se inclui também são chamadas de jogos de linguagem, de modo que o filósofo afirma "Chamarei também de 'jogos de linguagem' o conjunto da linguagem e das atividades com as quais está entrelaçada" (WITTGENSTEIN, 2012, § 07) e em outro momento coloca "o significado de uma palavra é seu uso na linguagem" Wittgenstein (2012, § 43) e a esses usos Wittgenstein (2012, § 7) denominou de *jogos de linguagem*.

A opção pelo termo jogos de linguagem e sua relação com os usos instaura uma reflexão sobre o que se poderia dizer com relação ao contexto, à atividade, à prática em que este jogo de linguagem é usado.

Neste sentido, Wittgenstein argumenta que não há algo comum a tudo aquilo que denominamos *jogo* e que isso é que nos faria denominar a isso de *jogo*. Há uma impossibilidade de generalização e identificação de uma essência nos diferentes jogos. Há entretanto, semelhanças a que Wittgenstein procura explicar:

> Considere, por exemplo, os processos que chamamos de 'jogos'. Refiro-me a jogos de tabuleiro, de cartas, de bola, torneios esportivos etc. O que é comum a todos eles? Não diga: 'Algo deve ser comum a eles, senão não se chamariam 'jogos'', - mas veja se algo é comum a eles todos. – Pois, se você os contempla, não verá na verdade algo que fosse comum a todos, mas verá semelhanças, parentescos, e até toda uma série deles. Como disse: não pense, mas veja! Considere, por exemplo, os jogos de tabuleiro, com seus múltiplos parentescos. Agora passe para os jogos de cartas: aqui você encontra muitas correspondências com aqueles da primeira classe, mas muitos traços comuns desaparecem e outros surgem. Se passarmos agora aos jogos de bola, [...] E assim podemos percorrer muitos, muitos outros grupos de jogos e ver semelhanças surgirem e desaparecerem. E tal é o resultado desta consideração: vemos uma rede complicada de semelhanças, que se envolvem e se cruzam mutuamente, semelhanças de conjunto e de pormenor. Não posso caracterizar melhor essas semelhanças do que com a expressão 'semelhanças de família'; pois assim se envolvem e se cruzam as diferentes semelhanças que existem entre os membros de uma família: estatura, traços fisionômicos, cor dos olhos, o andar, o temperamento etc., etc. – E digo: os jogos formam uma família (WITTGENSTEIN, 2012, § 66 e § 67).

O que regula os diferentes usos de uma palavra são as r*egras, fazendo com que o uso da linguagem não seja uma atividade arbitrária, mas seja configurado pela nossa experiência, pelo nosso conhecimento das regras em cada contexto específico. Segundo* (GOTTSCHALK, 2004), então

> *aprender* o significado de uma palavra pode consistir na aquisição de uma regra, ou um conjunto de regras, que governa seu uso dentro de um ou mais jogos de linguagem. Uma das consequências dessa ideia para a educação é que não há sentido em se ensinar um significado essencial de uma palavra independente de seus diversos usos. Uma palavra só adquire significado quando se opera com ela, ou seja, seguindo uma regra em um determinado contexto linguístico. (p. 321).

JOGOS DE LINGUAGEM E MODELAGEM MATEMÁTICA: CONSIDERAÇÕES FINAIS

No texto, ainda que não apresentemos conceitualizações em relação ao que é modelagem matemática, olhamos para essa questão a partir de três cenários específicos. À luz da caracterização de jogos de linguagem podemos identificar que em cada cenário temos um jogo de linguagem particular que indica como se deu a atividade ou até o que vem a ser modelagem matemática.

No cenário 1, a atividade, ainda que se situe no campo do empírico, o que vem da observação direta (a meia-vida e a dosagem de um comprimido) não é precisamente o que gera o problema.

O problema se formula a partir de algo que, ainda que seja determinado pela observação, não é o que os alunos de fato querem saber. O que os alunos desejam com a atividade é saber como o medicamento se comporta no organismo. Isto por si só, não diz respeito ao medicamento, mas a como o medicamento atua no organismo. Ou seja, o jogo de linguagem da modelagem se confunde com o jogo de linguagem dos dados.

A atividade descrita no cenário 2 nos coloca o jogo de linguagem em que a modelagem matemática visa dar entendimento a uma situação empírica, ou mesmo organizar essa situação. O que os alunos querem investigar na atividade é exatamente o que a situação indica. As regras nesse jogo são diferentes daquelas da atividade anterior.

Já no cenário 3, a modelagem matemática tem uma aproximação grande do que parece ser caracterizado como modelagem na matemática aplicada. Uma situação que ainda que não esteja no âmbito da experiência desses alunos, ela é capaz de requerer matemática, de solicitar a tomada de decisão no âmbito da matemática, de conciliar a matemática com a tecnologia.

Assim, se considerarmos os jogos de linguagem para a modelagem em cada atividade, podemos inferir que as semelhanças de família, como caracterizadas por Wittgenstein, dão conta de nos referirmos a cada cenário de *modelagem matemática*.

O que estes cenários revelam em relação à semelhança de família, parece que pode ser entendido se olharmos para o que Wittgenstein diz sobre o *Ver o comum*:

> Suponha que eu mostre para alguém diferentes quadros coloridos e diga: 'A cor que você vê em todos esses quadros chama-se ocre'. Esta é uma explicação que é entendida na medida em que o outro procura e vê o que é comum àqueles quadros. Ele então pode olhar para o comum, apontar para ele.
> Compare com o seguinte: mostro-lhe figuras de formas diferentes, todas pintadas da mesma cor e digo: 'O que elas têm em comum entre si, chama-se ocre'.
> E compare isso com: Mostro-lhe padrões de diferentes matizes de azul e digo: 'A cor que é comum a todos eu chamo de azul' (WITTGENSTEIN, 2012, §72).

Ou seja, a compreensão sobre os jogos de linguagem da modelagem matemática, a busca por semelhanças ou mesmo a busca por entendimento sobre o que é modelagem matemática dependem de como cada um olha (ou é convidado a olhar) para esses jogos.

No que se refere ao olhar sobre a matemática, sobre os modelos matemáticos e os procedimentos (matemáticos) de construção e interpretação ou uso desses modelos, as semelhanças de família parecem ter uma caraterização diferente. As regras que regem estes jogos são outras.

No cenário 1, o jogo de linguagem em que a função exponencial se faz presente envolve a análise de um decaimento (identificado a partir da ideia de meia-vida apresentada nos dados) representado a *priori* em um plano cartesiano pelos alunos e ela é determinada como solução de uma EDO.

No caso do tempo de estouro das pipocas, no cenário 2, não havia dados, nem mesmo eles poderiam ser construídos (como foi no cenário 1 em que a tabela 1 foi construída pelos alunos). Assim, a hipótese foi definida pelos alunos primeiro em linguagem natural (a variação do número de grãos que se transformam em pipoca é proporcional ao número de grãos que ainda não se transformaram em pipoca) e depois em linguagem matemática ($P_n - P_{n+1} = k.\,P_n$, em que P_n é o número de grãos que ainda não se transformaram em pipoca no instante n). A partir dessa hipótese os alunos construíram, usando um processo recursivo, a função exponencial nessa atividade. O gráfico nessa atividade viria depois da obtenção da função.

No cenário 3, encontrar uma função exponencial foi uma opção dos alunos e eles justificam essa opção por meio da análise da curva de tendência no plano cartesiano construída com os pontos dados pelo problema. A partir dessa opção de que seria uma função do tipo $y = a.e^{bx}$ que poderia fornecer a solução para o problema é que eles orientaram seus procedimentos na atividade. Neste caso, o jogo de linguagem da concentração de cálcio em fundo de rio era o que abarcava o jogo de linguagem da função exponencial.

Assim, no que se refere aos modelos nos três cenários, função exponencial é o que há de comum nos jogos de linguagem. Em cada cenário identificamos um uso da função exponencial. As regras de obtenção da função e seu uso na atividade são peculiares em cada atividade e refletem a forma de vida desses alunos. O que os modelos (as funções) têm em comum? As semelhanças de família neste caso dão conta de contemplar o que há de comum nas representações de função exponencial em cada atividade? Em cada atividade em particular, as diferentes representações (tabela, expressão algébrica, gráfico) também conservam apenas semelhanças de família?

Wittgenstein, neste sentido, coloca: "Cada vez que em vez de tal e tal representação também seria possível usar alguma outra, damos mais um passo rumo ao objetivo, que é entender a natureza do que é representado" (WITTGENSTEIN, 2009, p. 37). Pensar que semelhanças de família identificadas entre os diferentes jogos de linguagem parece também ser o tom de Wittgenstein quando coloca: Não procure apenas por semelhanças a fim de justificar um conceito, mas também por conexões. O pai transmite seu nome ao filho mesmo que este seja bastante diferente dele (WITTGENSTEIN, 1980, § 923).

Em termos da matemática, a partir dessa assertiva de Wittgenstein, poderíamos perguntar também: reconhecer nos diferentes jogos de linguagem o mesmo objeto matemático, seria conhecer esse objeto matemático? Reconhecer as características do objeto matemático nos diferentes jogos de linguagem seria um passo para elucidar o significado desse objeto?

Ainda que pudéssemos responder de forma afirmativa a estas questões, é preciso considerar que "aprender a dominar uma linguagem, ou aprender como compreender as expressões num jogo de linguagem, exige que nos exercitemos numa determinada forma de vida." (MARTINS, 2010, p. 96).

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. M. W.; PALHARINI, B. N. Os mundos da matemática em atividades de Modelagem matemática. **Bolema**. v. 26, n. 43, p. 907-934., 2012.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na educação básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

BORSSOI, A. H. **A aprendizagem significativa em atividades de Modelagem Matemática como estratégia de ensino**. 2004. Dissertação (Mestrado) - Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2004.

GOTTSCHALK, C. M. C. A Natureza do Conhecimento Matemático sob a perspectiva de Wittgenstein: algumas implicações educacionais. **Cadernos de História e Filosofia da Ciência**, Campinas, v. 14, n. 2, p. 305-334, jul./dez, 2004.

MARTINS, C. A. Sobre jogo de linguagem: Habermas e Wittgenstein. **Revista de Filosofia**, v. 35, n. 2 (2010): 91-104, 2010.

SILVA, K. A. P. **Uma interpretação semiótica de atividades de modelagem matemática**: implicações para a atribuição de significado. Tese de doutorado; PECEM, UEL, Londrina, PR, 223p., 2013.

WITTGENSTEIN, L. **Remarks on the philosophy of psychology** (RPP, 1). Oxford: Blackwell, 1980.

WITTGENSTEIN, L. **Gramática filosófica** (GF). São Paulo: Loyola, 2003.

WITTGENSTEIN, L. J. J. **Gramática Filosófica**. 2. ed. Tradução de Luís Carlos Borges. São Paulo: Edições Loyola. Tradução de: Philosophical Grammar, 2010.

------. **Investigações Filosóficas**. 7. ed. Tradução de Marcos G. Montagnoli. Petrópolis: Editora Vozes; Bragança Paulista: Editora Universitária São Francisco. (Coleção Pensamento Humano). Tradução de: Philosophische Untersuchungen, 2012.

RECEBIDO: 01.03.2014.

CONCLUÍDO: 01.04.2014.