VIDYA, v. 32, n. 2, p.149-161, jul./dez., 2012 - Santa Maria, 2012. **ISSN** 0104-270 X

INSIGHT: DESCRIÇÃO E POSSIBILIDADES DE SEU USO NO ENSINO DO CÁLCULO

INSIGHT: DESCRIPTION AND SOME USAGE POSSIBILITIES FOR THE TEACHING OF CALCULATION

FRANCISCO REGIS VIEIRA ALVES*

RESUMO

Apesar de se desenvolverem em níveis de dificuldades distintos, as atividades de investigação do matemático profissional e do estudante apresentam elementos de ordem e natureza cognitiva comuns. Dentre eles, destacamos como objetivos neste trabalho, a discussão do papel e as características da faculdade ontológica que nominamos *insight*. Para tanto, apesar do seu caráter de subtaneidade e imprevisibilidade, descrevemos e analisamos suas ligações com a percepção e a intuição. Para evidenciar, todavia, possibilidades e vias de seu uso consciente no ensino, trazemos algumas situações envolvendo o Cálculo Diferencial e Integral a Várias Variáveis.

Palavras-chave: *Insight.* Percepção. Resolução de problemas. Cálculo.

ABSTRACT

While developing into distinct levels of difficulty, the research activities of the professional mathematician and student have some elements of order and cognitive nature in common. Among them are the ones that constitute the object of this study that discusses the role and characteristics of the ontological faculty called insight. Therefore, despite its suddenness and unpredictability nature, it is described and analyzed its links with perception and intuition. In order to demonstrate, however, some possibilities and ways for its conscious use in teaching, it is brought some situations involving the differential and integral calculus with several variables.

Keywords: *Insight. Perception. Solving math activities. Calculation.*

* Doutor em Educação pela UFC. Professor do curso de licenciatura em Matemática do IFCE. Professor do Mestrado Profissional ENCIMA-UFC. Endereço para correspondência: Rua Monsenhor Otávio de Castro, nº 21. Fortaleza – Ceará. CEP: 60.050.150. E-mail: fregis@ifce.edu.br

INTRODUÇÃO

No contexto do ensino da Matemática, deparamo-nos com o uso recorrente de termos e/ou palavras às quais atribuímos extrema importância, pertinente à formação do professor. Neste rol, destacamos o vocábulo da língua inglesa "*insight*". O discurso oficial atinente a formação de professores valoriza a promoção desta atividade cognitiva no contexto do ensino-aprendizagem e da resolução de problemas diferenciados, que promovam o *insight* do aprendiz. Não obstante, é possível desenvolver uma mediação didática eficiente quando desconhecemos as características essenciais de um *insight*, sua natureza, as possibilidades de sua manifestação? É possível, ainda, explorar didaticamente situações de resolução de problemas, negligenciando elementos que podem catalisar/promover a manifestação do *insight*?

Neste escrito, assumimos uma posição que, apesar de óbvia, apresenta-se, por vezes, negligenciada no contexto do ensino: a posição segundo a qual é impossível estimular ou identificar a manifestação repentina do *insight,* em atividades de ensino propostas aos aprendizes, se desconhecermos sua natureza, seu funcionamento e suas características, do ponto de vista da cognição humana.

Posto que nossa discussão evolui no contexto da atividade matemática que se consubstancia a partir da ação solucionadora de problemas, discutiremos, de modo preliminar, o papel do *insight* na atividade investigativa do matemático profissional. Por fim, vale o comentário adicional que, tendo em vista o caráter polissêmico da língua portuguesa, optamos por preservar determinados termos e terminologias em inglês.

O papel do *insight* na atividade do matemático

A Matemática que conhecemos hodiernamente no Ocidente, sob maior influência e predomínio do pensamento helênico, possibilita o alcance de elevados graus e/ou níveis de abstração que envolve, necessariamente, o aperfeiçoamento de modelos mentais de cognição. O aspecto abstrato do conhecimento matemático constitui um elemento intrínseco a toda e qualquer forma de raciocínio mobilizado na mente de um solucionador de problemas, que age de modo intencional (POLYA, 1945, p. 121) e manifesta escolhas, tendo como referência um *corpus* teórico, o qual detém o potencial de indicar falhas ou contradições flagrantes no seu raciocínio matemático.

No contexto específico da resolução de problemas em Matemática, no que diz respeito ao tipo de raciocínio mobilizado na busca da solução, identificamos que o solucionador pode mobilizar um raciocínio lógico-matemático formal ou, de outro modo, mobilizar uma categoria de raciocínio que não possui características marcantes e determinantes de um raciocínio formal.

Esta última forma de raciocínio, que adjetivamos por intuitivo, em virtude de suas inúmeras vias de formas de manifestação e estrutura variada, sempre recebeu o interesse e foi passível de análises por vários pensadores (BUNGE, 1996; FISCHBEIN, 1987, 1993; HADAMARD, 1945; POINCARÉ, 1899). Em todo caso, antes de delinearmos maior detalhamento acerca do que afirmamos no parágrafo anterior, vale destacar o seguinte modelo, evidenciado na sequência abaixo, característico de um raciocínio lógico-matemático formal. Evidenciamos na cadeia abaixo apenas formas e argumentos válidos que, de acordo com a Lógica, de raízes aristotélicas, se classificam como verdadeiras ou falsas (MACHADO; CUNHA, 2005, p. 33).

$$p_1 \overset{\textit{regra} \text{ de inferência}}{\Rightarrow} p_2 \overset{\textit{regra} \text{ de inferência}}{\Rightarrow} p_3 \overset{\textit{regra} \text{ de inferência}}{\Rightarrow} p_4 \Rightarrow \cdots \overset{\textit{regra} \text{ de inferência}}{\Rightarrow} \cdots \overset{\textit{regra} \text{ de inferência}}{\Rightarrow} p_n \quad (*)$$

Na cadeia acima, salientamos o caráter de linearidade e sua finitude, com um determinado número de proposições $\{p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n\}$, descritas em sentenças proposicionais empregadas num raciocínio. Do lado esquerdo de (*), admitimos a existência de certas "premissas" e, do lado direito, uma "conclusão". Colocamos em evidencia também o que chamamos acima por "passo de raciocínio". O modelo acima é fortuito para que possamos comparar e identificar as possibilidades de ocorrência de um *insight* de modo concomitante à evolução de um raciocínio lógico-formal.

De fato, na atividade de investigação do matemático profissional, a manifestação do *insight* pode ocorrer, em tese, a cada "passo de raciocínio" do mesmo (que descrevemos em (*)). Todavia, dada sua natureza que envolve uma experiência subjetiva de esforço mental e, nem sempre consciente, como destacaremos e explicaremos adiante, a prática mostra que a frequência de sua manifestação é rara (pois, em certos casos, pode estar vinculado a um processo de invenção) e, podendo mesmo, na maioria dos casos, nem ocorrer. Neste sentido, Polya (1945, p. 22) explica o enorme esforço intelectivo empregado por Euler (1707-1783) em sua atividade de descoberta em Matemática.

Por outro lado, para desenvolver uma compreensão maior do assunto, vale comentar que os psicólogos da *Gestalt* têm se interessado pelo *insight* em virtude de sua atenção pelo comportamento inteligente, o qual consideram ser afetado tendo em vista situações novas e inéditas que se apresentam ao organismo.

No âmago das discussões e estudos em Psicologia *Gestalt*, o *insight* é caracterizado como "uma súbita reestruturação de um problema envolvendo uma representação mental" (SMITH, 1996, p. 230). Smith (1996, p. 232) propõe uma hierarquização e útil distinção entre os termos *insight*, *insight experience* e *insight problem*. O autor define o primeiro termo como um entendimento tácito de uma situação. Deste modo, em virtude de sua própria definição, um *insight* pode ser adquirido por meio de uma variedade de maneiras, incluindo, nesses casos, uma aquisição incremental ao repertório de conhecimentos ou a súbita realização/atualização de uma ideia.

Já o termo *insight experience*, segundo ainda a tradição *Gestalt*, refere-se à emergência súbita de uma ideia num modo consciente de atenção. Tal termo pode ser metaforicamente entendido como a afirmação súbita: "Ahá!". Tal fenômeno preservou a atenção dos psicólogos, uma vez que ele se manifesta em situações em que a solução é, de súbito, alcançada. Por fim, Smith (1996, p. 233) acentua que "nem toda solução de um *insight problem* precisa ser oriunda de um *insight experience*". Em todo caso, o caráter de imprevisibilidade e imediaticidade vinculados a estes termos se destacam.

Na seção seguinte, discutiremos, com maior atenção e detalhamento, a perspectiva da resolução de problemas vinculada à noção de *insight problem*, entretanto, podemos antecipar que uma estrutura mental voltada à resolução de um problema pode ser encarada como um plano, no qual empregamos um conjunto de operações, e com estas podemos prever algum tipo de solução produzida por este. Problemas que não se encaixam na categoria de *insight problem* preservam uma única estratégia, mas de outro modo, a reconstrução mental peculiar de um *insight problem* detém a possibilidade de provocar variações no conjunto de operações envolvidas num plano de ação e a identificação de várias estratégias com a mesma meta e/ou objetivo.

Reconhecidamente, a atividade do matemático profissional requer esforço, dedicação e descanso, para que ocorra uma reorganização (incubação) das ideias. Momentos como este são colocados em discussão de modo ímpar por Hadamard (1945), em vários trechos do seu livro. Em sua tese, Alves (2011, p. 120) discute e descreve o percurso abaixo (Figura 1) explicado pelos autores Grüber e Bodecker (2005). Reparemos as etapas corriqueiras enfrentadas pelo matemático profissional, em sua atividade investigativa, até o alcance do momento de iluminação (*intuitive grasp*), caracterizado como o alcance súbito de um maior estádio de compreensão e entendimento.

Arduous work → Sound conclusion → Naming the result

→ Compression of thought → Further economies

→ Intuitive grasp

Figura 1 - Os autores Grüber e Bodecker (2005 apud ALVES, 2011) discutem as etapas de investigação até o momento de surgimento de um *insight.*

No campo da Psicologia, o matemático profissional vivencia, do ponto de vista cognitivo, um momento que chamamos de incubação. Smith (1996, p. 242) acentua que o termo incubação sugere uma metáfora biológica, aplicada ao caso em que os padrões cognitivos se assemelham a um processo similar a uma maturação biológica. De acordo com esta via metafórica, a evolução de uma ideia que encerra um potencial de *insight* pode evoluir por intermédio de um processo cognitivo inconsciente.

Reparemos que, na atividade mental inicial de um matemático pela busca de uma informação crítica e fundamental numa tarefa, nem sempre o acesso a esta informação é imediato, posto que, nossa capacidade mental ontológica, chamada de memória, é determinante nesta busca. Na figura 2, Smith (1996) descreve os estágios e de que maneira o processo mental de incubação proporciona o acesso gradativo a uma informação crítica e essencial na execução de um plano ou estratégia. Divisamos na figura 2 o tempo exigido para a maturação de uma ideia, com vistas à solução de um problema.

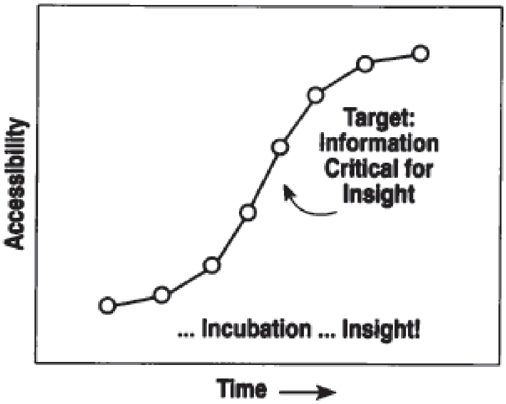

Figura 2 - Smith (1996, p. 243) descreve a atividade mental nos períodos de incubação até o surgimento de um *insight* ou momento de iluminação.

Na busca para responder ao questionamento sobre o significado do termo *insight*, concluiremos nossa discussão destacando quatro características, descritas por Seifert et al (1992, p. 67) frequentemente atribuídas ao *insight*, e que podem ser observadas tanto no contexto de investigação do matemático profissional, bem como no contexto do ensino, a saber: (1) subitaneidade, em que o termo *insight* parece acontecer abruptamente, mediante uma espécie de salto ou mudança de estádio da compreensão, por meio de um processo incremental; (2) espontaneidade, em que o *insight* parece ocorrer internamente, sem uma consciência ou controle total do solucionador de problemas; (3) imprevisibilidade, em que o *insight* se manifesta de forma surpreendente e sem aviso; e (4) satisfação, em que o *insight* graciosamente preenche as condições de solubilidade de uma situação previamente não resolvida, culminando com um triunfante "Aha!", de experiência. Esta última característica é entendida, por exemplo, por Kline (1980, p. 76) como um momento de iluminação. O caráter de subtaneidade é indicado também por Kline (1980, p. 241).

Na lista acima, adquirimos um entendimento inicial de suas características, todavia, o processo intelectivo aqui descrito não ocorre de modo isolado e a interação do professor, do pesquisador e também do aluno com seu meio, ante a determinada situação, funciona como um elemento desencadeador deste processo cognição.

A dificuldade aqui reside, então, no caso do matemático profissional, dado seu elevado grau abstrativo é que a interação e o meio a qual nos referimos pode ser seu meio mental (imaginário), em total independência de elementos sensíveis que o circundam. No próximo segmento, direcionamos nossa atenção à atividade solucionadora de problemas. Por esta via de discussão, o solucionador em questão pode tratar-se de um aluno, professor ou matemático profissional.

A contribuição das Ciências Cognitivas e a resolução de problemas no Cálculo

Dominowski & Dallob (1996, p. 37) esclarecem que o conceito de *insight* está intimamente relacionado com compreensão e entendimento. Adquirir um *insight*, por esta via, compreende a transição mental de um estádio de confusão para outro patamar cognitivo de entendimento. Por outro lado, embora por intermédio da ocorrência inesperada de um *insight*, em tese, o solucionador de problemas atinja um patamar mais elaborado de compreensão (de iluminação), o mesmo poderá ou não manifestar uma capacidade de explicar, *a posteriori*, de modo sistemático, as etapas do seu raciocínio, dado o seu caráter de (1) subitaneidade e (3) imprevisibilidade.

Por outro lado, para falar sobre uma atividade inteligente de um organismo, direcionado à resolução de problemas, não se pode esquecer certos elementos invariantes, pertinentes à percepção. Com efeito, tal capacidade é ontológica, na medida em que se apresenta ao solucionador por intermédio de uma situação reveladora de elementos que despertam atenção e seu interesse. A percepção, assim, provoca o *start* (a partida) inicial do processo de perquirir.

Mas a informação pertinente a uma tarefa, para que funcione como guia para o raciocínio, deve ser fornecida de modo constante. Em outras palavras, "o sujeito deve ser ininterruptamente informado, e que o conteúdo informacional detectado pela percepção permaneça o mesmo em um contexto dinâmico" (MORAIS, 2006, p. 102).

A explicação de Morais (2006) pode ser entendida a partir de um exemplo fornecido por Bunge (1996, p. 129) quando considera, por exemplo, a possibilidade de realizar a demonstração da seguinte propriedade $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$. De modo inicial, Bunge argumenta que podemos construir uma figura (um retângulo), de lados $a+b$ e $c+d$. Comenta ainda que "a figura sugerirá imediatamente a validez da igualdade em questão, por meio da identificação dos produtos invisíveis ac, ad, etc.".

Reparemos, todavia, que apesar de não contarmos com um contexto dinâmico, dado o caráter estático da axiomática euclidiana, registramos a exigência de uma atividade perceptiva de um solucionador de problemas mediante a produção de uma figura. Por outro lado, com recurso à tecnologia, podemos, por exemplo, ao considerar a função $g(x,y)=\left(1-(x^2+y^2)^{1/3}\right)$ inferir, por intermédio da visualização (percepção), que constitui importante faculdade cognitiva vinculada à percepção, identificar um "bico" ou "ponta" no gráfico da função em IR^3.

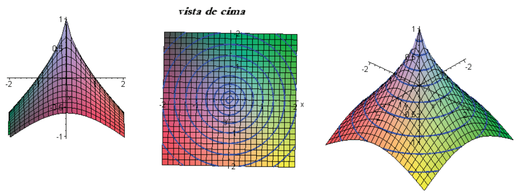

Figura 3 - A visualização como um componente da atividade perceptual.

Neste caso, a possibilidade de manifestação de um *insight* diz respeito à possibilidade do observador identificar o caráter de não diferenciabilidade da função em questão (Figura 3) quando visualizamos determinadas "representações sensoriais" de um objeto (FISCHBEIN, 1993, p. 139). Sublinhamos, contudo, que tal reconhecimento é condicionado, pelo menos em parte, por intermédio do conhecimento *a priori* de uma definição formal que descreve/caracteriza a diferenciabilidade e vincula tal conceito com a noção de suavidade (como forma de expressar o comportamento visual no caso dos espaços IR^2 e IR^3).

Dominowski & Dallob (1996, p. 34) comentam que alguns teóricos assumem que resolução de problemas requer justamente uma espécie de lembrança recuperada pela memória. De modo contrastante, podemos distinguir na atividade da resolução de problemas a relevância da memória. Para tanto, adotamos os termos descritos por memórias de curto e de longo prazo. Uma discussão detalhada sobre estes termos pode ser encontrada com maior detalhamento em Maio (2002).

No caso das situações que discutimos anteriormente, a quantidade e a diversidade de informações disponibilizadas ou percebidas no meio pelo aprendiz são determinantes pelo reforço, ou ao contrário, pelo esquecimento de dados retidos pela memória de curto prazo. Não nos deteremos, aqui, a questões de natureza neurológica, como regiões especializadas e distintas do córtex cerebral (centro visual de longa duração), como explica Maio (2006, p. 88), responsáveis pela condução e armazenamento de dados.

Exemplificando e identificando possibilidades de uso no ensino do Cálculo

Observamos que “o que nos parece psicologicamente óbvio não tem que ser logicamente imediato” (BUNGE, 1996, p. 123). Com estas palavras, o filósofo argentino Mario Bunge evidencia uma discussão em torno da atividade matemática dos aprendizes que ao se depararem com enunciados de teoremas, cuja formulação pode se apresentar de modo simples e rápido, porém, exigem difícil demonstração e complexas combinações e aplicações sucessivas de regras de inferências.

Nestes enunciados de modo *standard* em Matemática, encontram-se combinações de símbolos (representações) com a língua materna. Outrossim, como professores, devemos ter o conhecimento que existem representações internas e representações externas, como explica Morais (2006). Em Matemática, as últimas chamamos de notações, simbologias e sua descrição é condicionada por uma teoria matemática formal.

Por outro lado,

> as representações internas não são de fácil conceituação, por que estão, em geral, relacionadas com a subjetividade, podendo ser entendidas como imagens, regras ou conceitos (MORAIS, 2006, p. 22).

Apesar deste entrave e a pouca nitidez epistemológica e de caráter ontológico, de modo simplificado, podemos assumir, por influência da tradição filosófica que “as representações internas são necessárias para a elaboração dos juízos e da percepção” (MORAIS, 2006, p. 22).

Mas desde que nossa atenção agora é com o ensino do Cálculo e contando com o interesse manifesto por um solucionador de problemas, dá-se, então, início a uma atividade cognitiva perceptiva, na medida em que elaboramos um “cenário propício” para o ensino (ALVES, 2012). Mas, ao passo que, por intermédio de nossa percepção e da interação entre o novo conhecimento e os antigos conhecimentos, os quais detemos em nosso repertório de saberes acessíveis pela memória, ativamos, então, nossas crenças (*beliefs,* em inglês) vinculadas ao nosso objeto de observação, em determinada situação.

Notamos que Maddy (2003) diferencia o vocábulo *crenças* (*beliefs*) de *crenças perceptuais* (perceptual beliefs). De fato, não necessitamos adquirir *crenças* para perceber algo, mas simplesmente percebemos. Por exemplo, quando observamos um espaço visual tridimensional, notamos padrões geométricos invariantes, percebemos curvas, linhas retas, magnitudes, intersecções, distâncias, ângulos e elementos de natureza essencialmente qualitativa em cada configuração geométrica.

Todos estes elementos podem ser divisados por um observador, quer detenha ou não algum conhecimento mais aprofundado de Geometria. Mas na condição em que o mesmo não possua nenhuma familiaridade com o estudo formal e axiomático da Geometria Plana, ou mesmo de outras Geometrias, ele adquiriu, de modo súbito, as primeiras crenças perceptuais dos objetos captados pelos órgãos sensórios.

Deste modo, depreendemos que nossas crenças são elaboradas a partir da aquisição de crenças perceptuais e, para a ocorrência e/ou produção de uma percepção adequada, necessitamos da condição de que quem "percebe necessita adquirir crenças perceptuais apropriadas" (MADDY, 2003, p. 51).

Outro problema que se coloca diz respeito à possibilidade de adquirirmos crenças inadequadas e/ou em flagrante contradição com nossos antigos conhecimentos. Com efeito, a partir de dados colhidos diretamente no meio, adquirimos falsas crenças sobre os objetos. Na figura 4, indicamos a situação comentada por Indow (2004, p. 109) ao recordar que "todo mundo já teve a experiência de enxergar ou ter a impressão de que a lua parece ser mais larga quando está no horizonte do que quando se encontra no zênite (ou apogeu).". Na figura 4, descrevemos a aquisição de uma falsa crença.

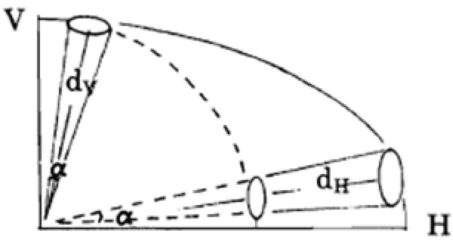

Figura 4 - Ilusão da lua (*moon ilusion*) descrito por Indow (2004).

Outra característica marcante apontada por Maddy diz respeito ao caráter não inferencial (o que contrasta com a cadeia de inferências que descrevemos em (*)), não consciente ou linguístico de uma *crença*. Por exemplo, Indow apresenta os resultados de um estudo o qual mostrou que os sujeitos participantes manifestaram a tendência em descrever a parte não percebida ou destacada na figura, de modo predominantemente condicionado pela *simetria* do objeto ou quadrado ABCD (Figura 5-I, lado esquerdo) observado em uma direção oblíqua, o que necessariamente pode não ocorrer.

Reparemos, entretanto, que carregar consigo um conjunto de crenças adequadas em relação à determinada situação proporciona ao solucionador de problemas um campo fértil e propício ao surgimento de um *insight* condicionado pela questão (Figura 5). Nela, divisamos três objetos representados no espaço IR^3.

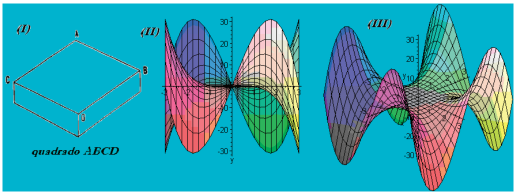

Figura 5 - Exemplos de objetos que possibilitam a exploração perceptiva.

Na condição em que utilizamos o aparato computacional, proporcionamos a produção de crenças pelo intermédio do estímulo de *categorias perceptuais*. No caso da figura 5-II e 5-III (lado direito), quando restringimos a atividade de solução de problemas ao quadro algébrico, pela simples inspeção da função $f(x,y)=x^3y-xy^3$, é impossível transmitir ao sujeito, imbuído do interesse na resolução de problemas, um caráter (sensação) de suavidade do seu gráfico no IR^3, da altura relativa ao eixo Oz e da pouca variação da função nas proximidades do ponto $(0,0,0)$.

Pela via de abordagem que exibimos na figura 5, estimulamos a produção de *imagens mentais* relacionadas a uma figura que constitui uma das representações de um mesmo objeto matemático (uma superfície). Neste caso, consideramos que

> uma figura é considerada com identidade quando esta parece similar a algumas figuras e não a determinadas outras, ou quando ela é próxima a algumas categorias e não a outras, ou mesmo quando pode ser facilmente reconhecida, recordada ou nomeada (MADDY, 2003, p. 53).

Na figura 5, depreendemos que apenas duas (do lado direito) pertencem à mesma categoria de figuras e estimulam imagens mentais distintas do quadrado ABCD.

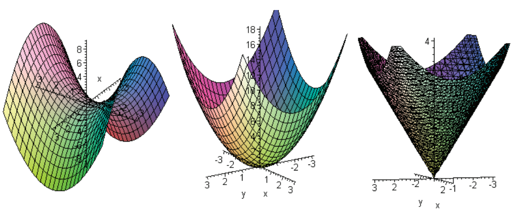

Figura 6 - Figuras relacionadas com a classe das superfícies quádricas.

Observamos, todavia, que a região do espaço IR^3, onde temos definida uma superfície que chamamos no Cálculo de hiperboloide elíptico não parece similar as outras duas chamadas de paraboloide elíptico e cone elíptico respectivamente. Ademais, comparando as superfícies das figuras 5 e 6, depreendemos, por intermédio de uma ação perceptual, aspectos geométricos incomuns pertinentes a categoria das superfícies quádricas e a superfície descrita algebricamente por $f(x,y)=x^3y-xy^3$.

Assim, proporcionamos ao solucionador de problemas certa hierarquização de *imagens mentais* associadas às figuras exibidas pelo computador que, ao decorrer de outras situações semelhantes a que apresentamos anteriormente, adquirem complexidade e hierarquização, na medida em que se compreende que na figura 6 todas as superfícies pertencem à mesma classe. Mais adiante, Maddy (2003, p. 56) conclui que "qualquer estímulo visual cria uma verdadeira cadeia de atividade por meio do córtex visual e a atividade correspondente a diferentes estímulos retinais são globalmente semelhantes".

A questão é compreender como tal atividade mental é organizada. Certamente, a compreensão do próprio mecanismo de apreensão perceptiva pode nos levar ao entendimento para a escolha do mais adequado modo ou via de estimulação para determinado tipo ou classe de crenças perceptuais, vinculadas a um conceito matemático particular, em uma situação problema, que detenha a capacidade de impulsionar o interesse do indivíduo.

Não podemos deixar de comentar situações vinculadas aos conceitos que possibilitam o comportamento estrutural de objetos no IR^n, para $n \geq 4$. Nestes casos, não contamos mais com a percepção como elemento impulsionador do *insight*; por outro lado, devemos apoiar-nos agora no *feeling* matemático (intuição).

A História da Matemática registra vários casos em que os matemáticos evoluíram com suas conjecturas somente com o apelo da intuição. Por exemplo, no século XVIII, torna-se necessário considerar funções do tipo $f(x, y, z) = xy + yz + zx$, como exemplifica Dieudonné (1987, p. 122) e adverte para o fato de que

> no caso de duas variáveis, podemos ainda falar de gráfico que neste caso é uma superfície; por exemplo, como a função $f(x, y) = xy$ possui por gráfico a superfície de equação $z - xy = 0$, chamada de paraboloide hiperbólico. Mas na medida em que o número de variáveis ultrapassa a duas, deve-se desistir de analisar qualquer imagem.

Na figura 7, observamos os gráficos das superfícies para alguns casos particulares das curvas de nível ($k = 3, 6, 9$) da função $f(x, y, z)$, que possui seu gráfico no IR^4. Nesse caso, sem o recurso computacional, não há o apelo à atividade perceptual pertinente ao reconhecimento de formas geométricas no espaço.

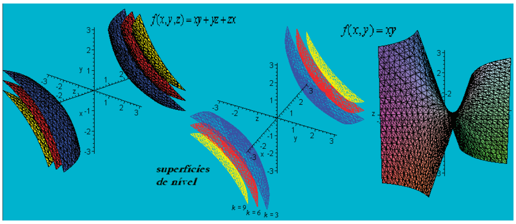

Figura 7 - Gráficos no IR^3 estimulam a percepção e proporcionam o *insight.*

Todavia, sem o apelo do aparato tecnológico, o matemático profissional se apoia somente em sua intuição (*feeling*). Reparemos que matemáticos têm de fato alcançado conclusões e respostas por intermédio de imagens visuais (HADAMARD, 1945), porém, "seus resultados têm sido tradicionalmente expressos através de significados simbólicos" (O´HALLORAN, 2005, p. 130). O problema que se coloca está relacionado ao emprego do método axiomático (CHOQUET, 1963), este apaga os vestígios e traços dos argumentos intuitivos, marcadamente de natureza subjetiva, ao imprimir a hegemonia do pensamento estrutural e abstrato.

Assim, apesar de imprimir toda sua idiossincrasia condicionadora e criadora dos resultados iniciais, o matemático efetua, *a posteriori*, uma formalização no saber capaz de proporcionar a veiculação das informações (de modo cifrado) a outros matemáticos, de modo *standard*, seguindo os padrões exigidos pelos seus pares.

O possível entrave é que no contexto de ensino e de investigação do estudante, tal tipo de ritual *standard,* registrado em pesquisa, pode ser nocivo e improdutivo. Com efeito, é esperado que a atividade de abstração do estudante atinja somente patamares de raciocínio mais elementares e incipientes. Outrossim, os argumentos intuitivos são essenciais neste contexto de aprendizado inicial, na medida em que o estudante compreende os próprios resultados alcançados e tal fato proporciona sua ulterior sistematização e reelaboração dos esquemas mentais adquiridos.

Por fim, no contexto do ensino do Cálculo, constatamos que em um primeiro momento,

> o significado de imagens visuais matemáticas é visto como menos preciso do que o simbolismo que conduz a uma dedução lógica a partir de resultados estabelecidos

> e procedimentos formalizados (O´HALLORAN, 2005, p. 130).

Com consequência, os estudantes tendem a priorizar os argumentos mais estruturais e gerais, em detrimento de interpretações pessoais, informais, tácitas e intuitivas. Como consequência, o papel da intuição e, também, do *insight* é reduzido.

Este tipo de distorção no ensino, bem como outros produzem a desvalorização de modelos de raciocínio intuitivo, de base originada na percepção. Um destes modelos caracteriza, por exemplo, o raciocínio por analogia (POLYA, 1945) ou o raciocínio metafórico (OTTE, 2008). Em relação ao raciocínio por analogia, por exemplo, Dominowski & Dallob (1996, p. 37) põem em destaque que "em certas ocasiões, chegamos ao entendimento de algo novo a partir de alguma relação estabelecida como outro elemento familiar". Nesses casos, percebemos a importância do uso de analogias e metáforas que produzem fértil terreno para a promoção e o surgimento de um *insight*.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na atividade de investigação, quer seja do matemático profissional ou do estudante, não podemos negligenciar os fatores de ordem psíquica que intervêm no progresso cognitivo de um organismo vivo, em situação de resolução de problemas. Assim, neste texto, destacamos a natureza, as características e o *modus operandi* da capacidade de iluminação do ser humano, que psicólogos (FISCHBEIN, 1987), filósofos e matemáticos (KLINE, 1980; POINCARÉ, 1899) nomeiam de *insight*, que se manifesta de maneira súbita, em um ambiente de aquisição e incorporação de novos conhecimentos ao repertório original e idiossincrático do indivíduo imbuído de uma tarefa.

Apresentamos, pois, algumas situações de ensino que encerram um potencial de produzir situações de investigação, estimuladas, nos momentos iniciais, pela percepção de propriedades matemáticas e podem engajar os estudantes em situações de adaptação dos conhecimentos e um "novo contexto de aprendizagem" (BROUSSEAU, 1986). As situações, apoiadas na visualização e percepção, detêm o potencial e o efeito de produzir, por parte do observador, sentenças proposicionais e conjecturas não condicionadas pela cadeia descrita em (*). Tal processo pode conduzir o sujeito ao alcance de um *plateau* mais elevado, como consequência de um *insight* (KLINE, 1980, p. 297), por outro lado, a argumentação formal, fundamentada predominantemente em teoremas e definições formais pode até "inibir o fluxo produtivo de ideias" (FISCHBEIN 1993, p. 160).

Como discutimos, a reorganização e estruturação dos conteúdos de cada sentença, condicionadas pela capacidade de memória, poderão proporcionar o surgimento de um *insight*, acompanhado de um sentimento de satisfação, que indicamos em (4). Esta mudança de estádio psicológico vicenciada pelo indivíduo é semelhante à metáfora descrita por Heráclito (540 a. C. – 480 a. C.), para quem tudo está em movimento e, este movimento "confere às coisas um caráter transitório" (LIMA, 2010, p. 64).

De fato, após experimentar o efeito do alcance de um *insight*, na resolução de um problema, tanto o sujeito como o problema sofrem mudanças e adquirem novas formas de serem perspectivados. Deste modo, diante da impossibilidade de se entrar no mesmo rio duas vezes, segundo a concepção heraclitiniana, após experimentar uma situação de *insight*, se adquire outro olhar pertinente a mesma situação.

REFERÊNCIAS

ALVES, Francisco. R. V. **Aplicações da Sequência Fedathi na promoção das categorias do raciocínio intuitivo no Cálculo a Várias Variáveis**. 2011. 353 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2011. Disponível em: <http://www.teses.ufc.br/tde_biblioteca/login.php>. Acesso em: 06 ago. 2012.

______. Intepretação geométrica para a regra de L´Hospital com o auxílio do Geogebra. In: CONFERENCIA LATINOAMERICANA DO GEOGEBRA. 2012. **Anais da Conferência Latinoamericana do Geogebra.** Montevideo, 2012. Disponível em:< http://www.geogebra.org.uy/2012/home.php>. Acesso em: 1 set. 2012.

BROUSSEAU, Guy. **Théorisation des phénomènes d´enseignement des mathématiques.** Bourdeux (thése de doctorat d´Etat). Université de Bordeaux I, 1986, Bordeaux, 905p.

BUNGE, Mario. **Intuición y Razón**. 1. ed. Buenos Aires: Delbossillo, 1996.

CHOQUET, Gustave. **What is Modern Mathematics**. England: Lamport Gilbert & Co.,1963.

DIEUDONNÉ, Jean. **Pour l´honneur de l´esprit humain: le mathématique aujourd´hui**. Paris: Hachette, 1987.

DOMINOWSKI, Roger. L.; DALLOB, Pamela. In: STERNBERG, Robert. J.; DAVIDSON, Janet. E. **The nature of insight**. Cambridge: MIT, 1996, p. 33-63.

FISCHBEIN, Efrain. **Intuition in science and mathematics:** an educational approach. Netherlands: D. Reidel Public, Mathematics Educational Library, 1987.

FISCHBEIN, Efrain. **The theory of figural concepts**. Educational Studies in Mathematics, 24, 1993, p 139-162.

HADAMARD, Jacques. **The Psychology of Invention in the Mathematical Field**. Princenton: Dover Publications, 1945, 153p.

INDOW, Tarow. **The structure of visual space**. New Jersey: World Scientific, 2004.

KLINE, Morris. **Mathematics:** the loss of certainty. Oxford: Oxford University Press, 1980. 374p.

LIMA, Carmen, R. G. **O conhecimento da verdade e suas bases conceptuais metafóricas.** 2010. 204 f. Tese (Doutorado em Estudos Linguísticos) - Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2010. Disponível em: <http://repositorio.uff.br/jspui/bitstream/1/437/1/TESE%20CD.pdf>. Acesso em: 21 ago. 2012.

MACHADO, Nilson, J. & CUNHA, Marisa, O. **Lógica e Linguagem cotidiana:** verdade, coerência, comunicação e argumentação. Belo Horizonte: Autêntica, 2005. 125p.

MADDY, Penelope. **Realism in Mathematics**. Oxford: Oxford Press, 2003.

MAIO, Valdemar. **O raciocínio lógico-matemático:** sua estrutura neuro-fisiológica e aplicações à educação matemática. 2002. 281 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2002.

MORAIS, Sonia R. **O papel das representações mentais na percepção-ação:** uma perspectiva crítica. 2006. 167 f. Tese (Doutorado em Filosofia) - Universidade Estadual Paulista, Marília: UNESP, 2006.

O´HALLORAN, Kay L. **Mathematical discourse:** language, symbolism and visual images. London: Continuum, 2005.

OTTE, Michael. Metaphor and Contingency. In: RADFORD, Luis; SCHUBRING, Gert; SEEGER, Falk (Eds.). **Semiotics in Mathematics Education:** Epistemology, History, Classroom and Culture, 2008, p. 63-85.

POINCARÉ, H. **La logique et l´intuition dans la science mathématique**, **L´enseignement Mathématique**, v. 1, 1899, p. 158-162.

POLYA, George. **Induction and Analogy in Mathematics.** Princeton: University of Princeton. Princeton, 1954, 148p.

SEIFERT, C. et al. Demystification of cognitive insight: opportunistic assimilation and the prepared-mind perspective. In: DAVIDSON, J.; STERNBERG, R. **The Nature of Insight**. Cambridge: MIT University Press, 1992, p. 235-274.

SMITH, Steven M. Getting into and Out of Mental Ruts: A theory of fixation, incubation and insight. In: STERNBERG, Robert J.; DAVIDSON, Janet E. **The nature of *insight***. Cambridge: MIT University Press, 1996, p. 210-245.

RECEBIDO EM: 01/09/2012.
APROVADO EM 22/10/2012.