VIDYA, v. 32, n. 2, p.133-147, jul./dez., 2012 - Santa Maria, 2012. **ISSN** 0104-270 X

ANALISANDO JUSTIFICATIVAS E ARGUMENTAÇÃO MATEMÁTICA DE ALUNOS DO ENSINO FUNDAMENTAL

ANALYZING MATH ARGUMENT AND JUSTIFICATION OF ELEMENTARY SCHOOL STUDENTS

CARLOS AUGUSTO AGUILAR JÚNIOR*
LILIAN NASSER**

RESUMO

Neste artigo é relatada parte de uma pesquisa sobre a visão do professor a respeito dos níveis de argumentação e prova, apresentados por alunos de Escola Básica em Matemática. O desenho da pesquisa é baseado num projeto de investigação desenvolvido por Hoyles (1997) na Grã-Bretanha. Na primeira etapa, os alunos respondem a questões que fogem à simples aplicação de resultados conhecidos e à realização de cálculos, demandando, ao contrário, maior raciocínio lógico-dedutivo, por meio da argumentação e da justificação. Na segunda etapa, professores são convidados a analisar e dar notas a diferentes argumentos extraídos de repostas apresentadas na primeira etapa. Em nosso levantamento e análise, ficou patente a preferência dos estudantes pelas provas ingênuas ou informais, principalmente por aquelas que recorrem a exemplos, o que pode sugerir a ausência de um trabalho pedagógico que possibilite desenvolver as habilidades de argumentar e provar em Matemática.

Palavras-chave: Argumentação. Justificação. Prova Matemática. Formação Docente.

ABSTRACT

This article presents the teacher’s view regarding the level of argumentation elaborated by elementary school students in the math class. The research design is based on a research project developed by Hoyles (1997) in Britain. In the first stage, students respond to questions that go beyond the simple application of known results and to calculations, which demand more logical-deductive reasoning, through argument and justification. In the second stage, teachers are asked to analyze and grade the different arguments drawn from the responses submitted in the first stage. It is noticed that the students prefer those more naïve tests that resort to examples, which may suggest the absence of a pedagogical approach that allows the development of the skills of arguing and proving in Math.

***Keywords:** Argumentation. Justification. Math Proving. Teacher Training.*

* Mestrando do PEMAT – IM/UFRJ e professor da SME-Rio. E-mail: carlosaugustobolivar@hotmail.com
** Dra. em Educação Matemática e docente do IM/UFRJ e CETIQT/SENAI. E-mail: lnasser@im.ufrj.br

INTRODUÇÃO

Avaliações internas em nosso país, como a Prova Brasil e o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), e internacionais, como o PISA (Programme for International Student Assessement), mostram que nossos alunos ainda não dominam a Matemática. O pouco que sabem se restringe à aplicação de técnicas operacionais, fórmulas e procedimentos, sem que haja uma compreensão do que realmente estão fazendo. Almeida (2007) percebe uma

> aguda deficiência, evidenciada por parcela considerável da população estudantil, no trato de questões matemáticas mais elaboradas no que concerne à profundidade do raciocínio lógico-dedutivo exigida para o encaminhamento das questões (p. 14).

As habilidades de argumentar e provar em Matemática são importantes tanto para o desenvolvimento em Matemática quanto para a formação do cidadão crítico, como já assinalam os PCN (BRASIL, 1997). No entanto, percebemos que esta habilidade não é, de modo geral, suficientemente desenvolvida pelos professores de Matemática em suas aulas. Ao professor cabe, em geral, apenas o papel de transmitir conhecimentos, apresentar ou "informar" os resultados (IMENES, 1997 p. 57) e, ao final, aplicar e corrigir uma série de exercícios sobre o tema abordado. Aos alunos cabe acumular as "informações" prestadas pelos professores e realizar as tarefas aplicadas.

Este modelo de ensino-aprendizagem causa a falsa impressão de que o aluno sabe Matemática, pois não cumpre seu papel de desenvolver no aluno o raciocínio lógico-dedutivo, que é um dos objetivos do ensino de Matemática, estampado nos Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática - PCN (BRASIL, 1997):

> [...] desenvolvimento no educando da capacidade/habilidade de comprovação, argumentação e justificação, com vistas à formação do cidadão crítico, além de propiciar que a Matemática seja encarada pelo estudante como um conhecimento que possibilita o desenvolvimento de seu raciocínio e de sua capacidade expressiva (p. 26).

Para desenvolver este raciocínio é importante que o professor compreenda e aceite diversos níveis de argumentação e justificação que os alunos possam vir a apresentar para provar um dado resultado, e leve em consideração os elementos cognitivos presentes na faixa etária do educando e os conhecimentos adquiridos até a presente fase escolar.

De acordo com as pesquisas realizadas por Hanna (1990), Knuth (2002), Jahn, Healy e Pitta Coelho (2007), Jones (1997) e Boavida (2005), ao analisar a questão do ensino-aprendizagem de prova matemática, o pesquisador deve voltar seu olhar também para a formação acadêmica do professor, levantando informações que possibilitem obter uma visão da formação docente. Em nosso estudo, constatamos que

> a grande maioria de nossos alunos não sabe justificar afirmações simples, o que pode refletir negativamente na construção de sua cidadania. A Escola não está formando cidadãos críticos, que saibam quando concordar ou discordar de situações, elaborar e expor argumentos e justificativas que validem seu ponto de vista. Acreditamos que

> a Matemática é a disciplina escolar que possibilita este trabalho de argumentação e justificação (AGUILAR JÚNIOR; NASSER, 2012, p.701).

Por isso, este estudo, que se desenvolve no escopo de nossa investigação de mestrado, pretende investigar a habilidade de alunos da Escola Básica em apresentar justificativas para as soluções apresentadas, e entender como se dá a compreensão e a aceitação pelos professores dessas argumentações e justificações, realizando uma pesquisa de caráter qualitativo.

Neste artigo, detalhamos a primeira etapa da pesquisa de mestrado, que consistiu na aplicação de uma atividade a alunos do Ensino Básico (do 8º e 9º anos do Ensino Fundamental), com o objetivo de colher respostas a itens que exigem a habilidade de argumentação e prova.

A segunda etapa da pesquisa consta da aplicação a professores, das redes de ensino pública e privada, de um formulário com algumas das respostas dos alunos, retiradas da atividade aplicada inicialmente. Os professores devem, num primeiro momento, avaliar e atribuir uma nota a cada resposta dada, ou avaliar dentre as variadas respostas dadas a uma mesma questão aquela que se parece com a que ele daria, justificando seu ponto de vista, seguindo o esquema da pesquisa realizada no Reino Unido, durante o ano de 1996, por Hoyles (1997).

A análise das respostas se dará de acordo com as categorias definidas pelos modelos e tipos de prova sugeridos nos estudos de Sowder e Harel (1998) e de Balacheff (1988).

REFERENCIAL TEÓRICO

Os professores concluem seus cursos universitários envolvidos no formalismo defendido e praticado na academia, ficando, desse modo, com o olhar focado em justificativas que sigam rigoroso processo lógico-formal de prova, como se identifica na leitura de Hanna (1990, p. 7): “nos programas das universidades [...] a abordagem axiomática tornou-se denominador comum da maioria dos cursos de Matemática”. Para Knuth (2002), ao se avaliar as concepções de prova que os professores apresentam, devem ser analisados também o currículo trabalhado por estes professores e o nível de ensino do curso de formação destes profissionais.

A percepção de diferentes níveis de argumentação leva à necessidade de se reconsiderar os critérios de julgamento acerca da “validade formal de provas”, ou seja, reavaliar o valor de uma dada argumentação-justificação para um dado resultado. Neste sentido, Hanna (1990) cita a reavaliação, realizada por matemáticos e professores de Matemática ingleses, ocorrida entre as décadas de 1970 e 1980, quanto ao papel das estruturas axiomáticas e das provas formais. Segundo a autora,

> neste novo olhar, as provas passam a ter diferentes graus de validade formal, mantendo o mesmo grau de aceitação, permitindo com isso a reconsideração do que poderia ser prova ideal e do que se deveria ensinar nas escolas (p. 8).

Ainda segundo Hanna (1990), o nível de aprendizagem do aluno e o nível de exigência quanto ao valor do argumento dado para se comprovar uma declaração matemática não devem necessariamente seguir os padrões de rigidez quanto à validade de proposições, defendida na academia. Dessa forma, percebe-se que muitos educadores matemáticos assumem uma postura de afastamento quanto à exigência ou à dependência extrema de provas rigorosas em Matemática, para dar ênfase à concepção de prova como argumento convincente.

Verificamos, num estudo realizado junto a professores (NASSER; AGUILAR JÚNIOR, 2012), uma preferência dos participantes por argumentos dos alunos que se aproximam da prova formal. Isso pode evidenciar ou confirmar o que já destacavam Hanna (1990), Knuth (2002) e Jones (1997), quando ressaltam a influência da formação acadêmica sobre as concepções e a prática docente, associada ao afastamento da academia em relação à realidade e às demandas da Escola Básica.

O aprimoramento da situação atual está diretamente ligado ao ensino de prova. Provar um resultado matemático é validar a declaração feita, a partir de hipóteses verificadas e certificadas como verdadeiras. Ensinar por meio de uma prova consiste em mostrar ao educando a validade da declaração feita, exibindo as etapas do processo dedutivo, para assim desenvolver no educando o raciocínio lógico-dedutivo. E com isso possibilitar a construção das habilidades contidas nos PCN.

Em geral, o modelo de ensino adotado não estimula o aluno a ser agente do processo de aprendizagem, mas sim um mero receptor de informações. Quantos devem ser os professores que aceitam como justificativa apenas os cálculos desenvolvidos para comprovar um resultado matemático? Nesta mesma situação, o professor de certa maneira também é vítima, pois durante sua formação acadêmica, praticamente todos os resultados em Matemática que lhe foram apresentados foram provados por meio da prova rigorosa, seguindo o modelo formal lógico-dedutivo. Na maioria dos casos, isso ocorre sem contato com situações de sala de aula que permitam encontrar outros meios, também plausíveis, para argumentar e justificar os resultados. É a antiga discussão sobre o afastamento entre a academia e a realidade da escola.

Para podermos entender e melhor interpretar os dados que foram coletados nesta primeira fase da investigação, utilizamos como norteadores deste processo as pesquisas de Sowder e Harel (1998) e de Balacheff (1988).

O trabalho de Sowder e Harel (1998) descreve os tipos de prova que alunos apresentaram num teste realizado nos Estados Unidos. Os tipos de prova foram assim categorizados: *esquema de prova baseado em elementos externos, esquema de prova empírico* e *esquema de prova analítico*, de acordo com a figura 1. O esquema de prova baseado em elementos externos se caracteriza por "tanto o que convence o estudante e aquilo que poderia persuadir a outros" (p. 671). Já o esquema de prova empírico é descrito como aquele em que "justificações são feitas exclusivamente com base em exemplos" (p. 672). Quanto ao esquema de prova analítico, os pesquisadores destacam que, se houvesse uma escala de nível de rigor de justificações, os professores de matemática considerariam este esquema como o mais elevado tipo de prova (p. 673).

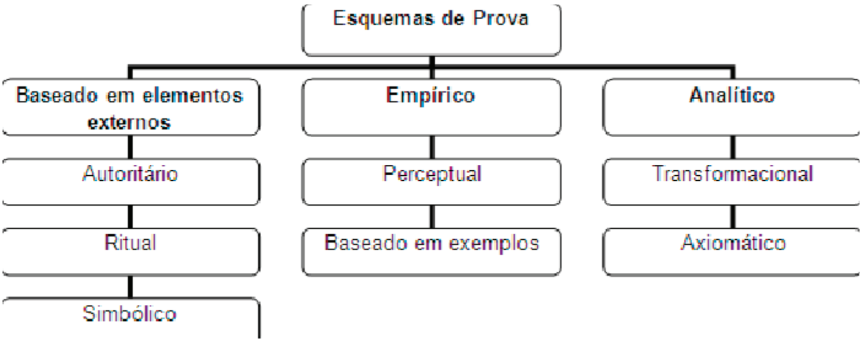


Figura 1 - esquemas de prova propostos no trabalho de Sowder e Harel (1998).

Balacheff (1988) desenvolveu pesquisa com estudantes na França, onde identificou dois tipos básicos de prova: o tipo *pragmático* e o tipo *conceitual*. Para Balacheff (1988, p. 217), prova pragmática é aquela que recorre a testes de validade, busca de regularidades, exemplos ou desenhos para justificar um determinado resultado, chamados pelo autor de "recursos de ação", enquanto a prova conceitual não recorre a tais recursos no momento de formular as propriedades envolvidas e as possíveis relações entre elas. Para delinear melhor sua pesquisa, Balacheff (1988) destaca quatro modalidades de prova: *empirismo natural* (naive empiricism), *experimento crucial* (crucial experiment), *exemplo genérico* (generic example), e *experimento mental* (thought experiment). Estes quatro desdobramentos se originam dos movimentos existentes entre os tipos de prova: o empirismo natural e o experimento crucial repousam na seara da prova pragmática, e o experimento mental reside no campo da prova conceitual. Já o exemplo genérico transita entre os dois tipos, dado que o exemplo genérico

> consiste na explicitação das razões que validam uma propriedade que encerra uma generalidade, mesmo fazendo uso de um representante particular (GRAVINA, 2001, p. 67).

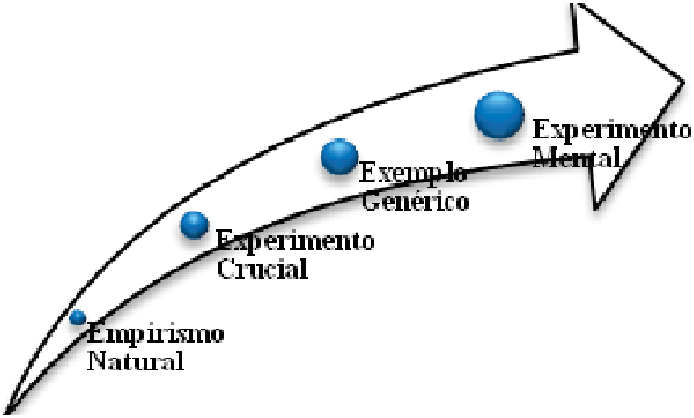


Figura 2 - tipos de prova de acordo com Balacheff (1988).

METODOLOGIA, COLETA E ANÁLISE DE DADOS

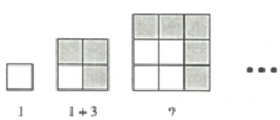
Elaboramos uma atividade com o objetivo de levantar as respostas dos estudantes que apresentassem suas justificações e as argumentações acerca de questões de Aritmética, Álgebra e Geometria. Essa atividade foi aplicada durante o mês de novembro de 2011 a 124 alunos de duas escolas municipais (que chamaremos de EM1 e EM2) e uma escola federal (que rotularemos por EF1), todas na cidade do Rio de Janeiro. A amostra é composta de 3 turmas de 9º ano e apenas uma turma de 8º ano. A aplicação contou com a colaboração de professores-aplicadores, regentes das próprias turmas.

O instrumento é composto de cinco questões dissertativas que abrangem tópicos relacionados à aritmética de números inteiros, sequências numéricas e identificação de padrões geométrico e numérico, além de geometria plana. A primeira trata de uma propriedade aritmética de números naturais; a segunda trabalha com sequência numérica e geométrica, e a busca e generalização de um padrão (numérico e/ou geométrico); a terceira e quarta exploram propriedades e resultados (teoremas e proposições) da geometria plana; e a quinta aborda uma situação-problema em geometria, buscando a generalização a partir de padrões numéricos e de relações entre quantidades (de pontos e triângulos).

Como metodologia, utilizamos uma análise qualitativa dos dados coletados, categorizando-os segundo os esquemas e tipos de prova encontrados nos trabalhos de Sowder e Harel (1998) e Balacheff (1988). Nesta análise, investigamos o nível de maturidade matemática de suas respostas, para, posteriormente, na segunda fase de nossa investigação, serem avaliadas por professores. A fim de que sejam preservadas as identidades dos alunos, utilizamos siglas no lugar de seus nomes.

Numa primeira análise, observando somente se as questões foram ou não respondidas, pudemos perceber que as questões 2 e 5 não apresentaram um número considerável de respostas. A questão 2 é composta de cinco itens e a questão 5 de três itens. Os últimos itens dessas questões investigavam a formação de padrões e pediam que o aluno exibisse expressões algébricas que generalizassem estes padrões. Talvez essa tenha sido a principal causa das dificuldades.

2) Observe a sequência de figuras abaixo:



a) Como será a figura seguinte? Faça um desenho.

b) Escreva **o número de quadradinhos da figura** que você desenhou como a soma dos brancos com os escuros.

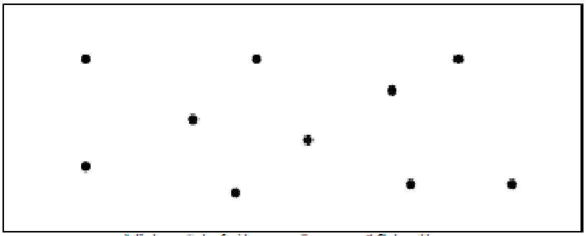
c) Qual a forma de cada figura da sequência? Represente cada uma em função do número de quadradinhos de cada um de seus lados.

d) Quanto vale a soma dos 10 primeiros números ímpares?

e) Escreva uma expressão para a soma dos n primeiros números ímpares.

Figura 3 - enunciado da questão 2 (NASSER; TINOCO, 2003).

5) Para construir uma janela ornamental, um operário precisa de pedaços triangulares de vidro. Ele pretende aproveitar um vidro retangular defeituosa, com 10 bolhas de ar, sendo que não há 3 bolhas alinhadas entre si, nem duas delas com algum vértice do retângulo, ou uma delas com 2 vértices do retângulo.



Vidro "defeituoso" com 10 bolhas

Para evitar bolhas de ar no seu projeto final, ele decidiu cortar os pedaços triangulares com os vértices coincidindo ou com uma bolha de ar ou com um dos cantos do vidro original.

Com base nestas informações, resolva as questões seguintes, **justificando todas as respostas**:

a) Quantos pedaços triangulares de vidro são possíveis de se obter com este vidro defeituoso?
b) Se o vidro apresentasse 12 bolhas? E 20? Quantos pedaços triangulares serão obtidos em cada caso?
c) É possível estabelecer uma relação entre **o número de triângulos obtidos com o número de bolhas existentes**?

Figura 4 - enunciado da questão 5 (adaptada de NASSER, 1989).

Houve algumas tímidas tentativas no sentido de mostrar uma expressão matemática em atendimento aos itens, mas também houve algumas tentativas de redação por extenso das conclusões obtidas a partir de observações, como se pode ver nas figuras 4 e 5. De algum modo, essas respostas apoiaram-se intuitivamente em algum esquema, seja empírico ou externo (SOWDER; HAREL, 1998, p. 671) ou no tipo de prova identificado por Balacheff (1988, p. 218) como empirismo natural.

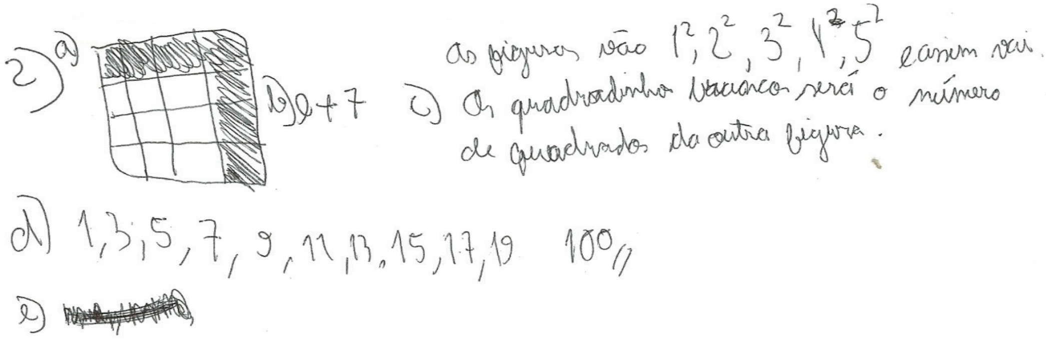


Figura 5 - resposta do aluno LD, da instituição EF1 para o item c): "As figuras vão 12, 22, 32, 42, 52 e assim vai. Os quadradinhos brancos serão o número de quadrados da outra figura".

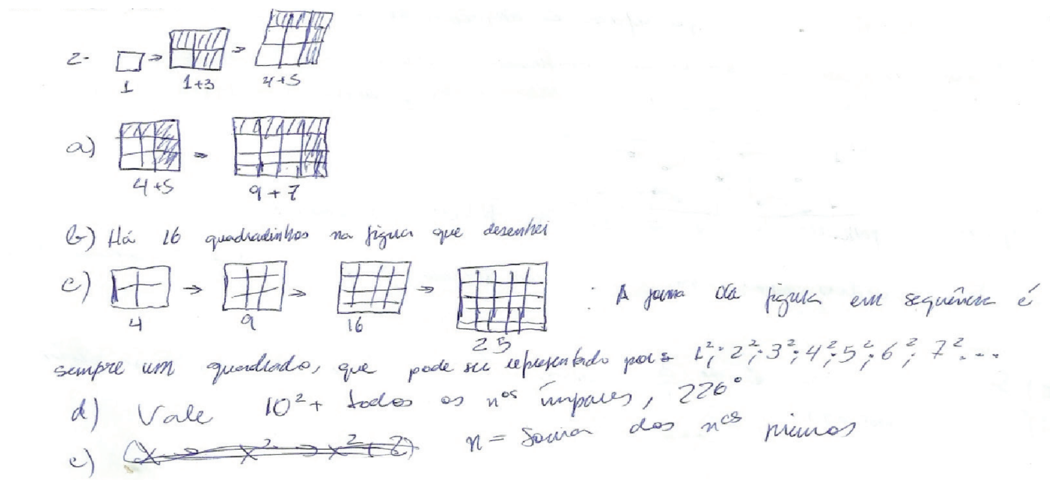


Figura 6 - resposta do aluno G, da instituição EF1 para o item c): “A forma da figura em sequência é sempre um quadrado, que pode ser representado por: 12, 22, 32, 42, 52, 62, 72 ... ”.

Nas duas respostas apresentadas, identificamos o uso do esquema empírico-perceptual e o empírico baseado em exemplos. Na figura 4, percebemos que o aluno LD não apresentou outros casos ou exemplos para concluir que as figuras seriam quadrados relacionados com o total de quadradinhos dado por 12, 22, 32, 42. Este aluno conclui seu raciocínio afirmando “assim vai”, constituindo o que Sowder e Harel (1998) chamam de esquema empírico-perceptual, ou seja, quando o aluno percebe visualmente a validade da afirmação. Já o aluno G, também da EF1, estabeleceu sua argumentação a partir do esquema empírico, baseado em exemplos particulares (figura 5), remetendo ao “empirismo natural” de Balacheff (1988).

Este modelo é basicamente a tônica dos esquemas e tipos de prova que encontramos nas respostas de nossos alunos. A questão 1 pede que o aluno verifique se é falsa ou verdadeira, justificando, a seguinte afirmação: “A soma de três números consecutivos é um múltiplo de 3”.

Tabela 1 - distribuição das respostas obtidas na questão 1.

Série / Esquema de Prova (QUESTÃO 1)	Esquema empírico (baseado em exemplos)/ empirismo natural	Esquema empírico (perceptual)	Esquema analítico (transformacional)/ exemplo genérico	Esquema analítico (transformacional)/ experimento mental
8º ano do Ensino Fundamental	**29**	**-**	**-**	**1**
9º ano do Ensino Fundamental	**89**	**3**	**2**	**-**

Percebemos a influência que os exemplos exercem sobre exercícios de argumentação e prova dos alunos. Os exemplos sugerem certa autoridade e poder que possuem para comprovar a afirmação, a ideia jurídica de prova: elemento que comprova a veracidade do fato. Por exemplo, a aluna CS responde que a questão 1 é verdadeira, justificando que a verdade é obtida "por causa de vários exemplos".

Em Matemática, para se justificar formalmente resultados, teoremas e propriedades, sejam geométricos, algébricos ou aritméticos, são utilizadas letras para indicar um modelo geral válido para qualquer caso, com as mesmas propriedades e características. Porém, o aluno que executa um trabalho com álgebra limitado à resolução de equações e de expressões algébricas carrega consigo o pensamento de que, havendo uma expressão com letra, deve-se resolver uma equação "para achar o valor dessa letra". Este exemplo de situação se enquadra no esquema externo-ritual, que indica o uso de letras, seguindo um ritual de manipulação de expressões algébricas, conforme se depreende de Sowder e Harel (1998). A resposta a seguir ilustra esta ideia.

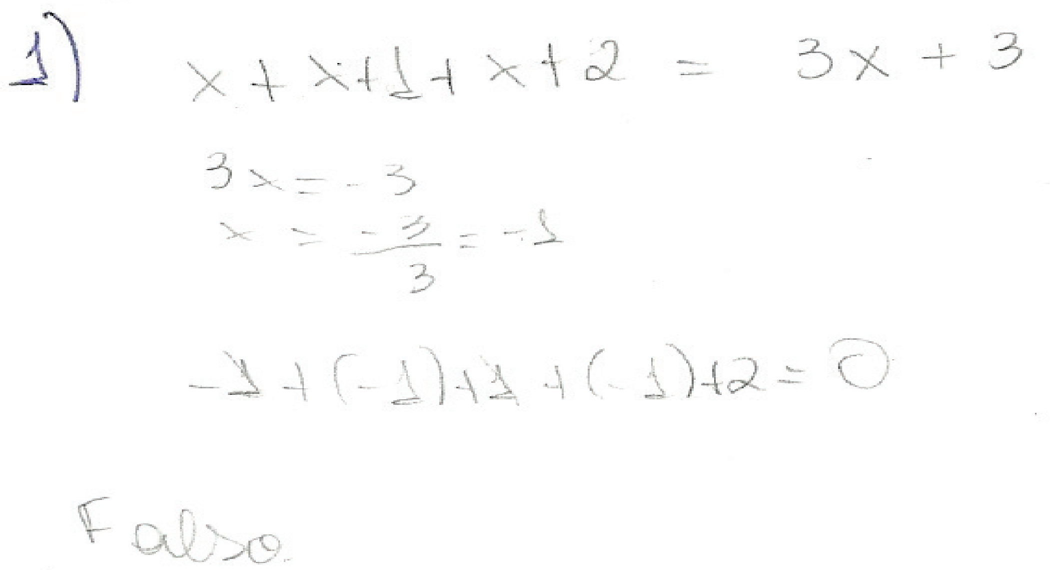
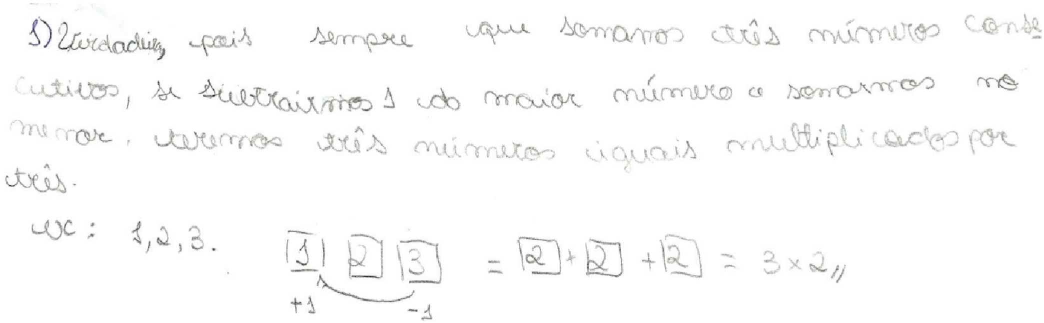


Figura 7 - resposta à questão 1 do aluno CM.

Foram também apresentadas respostas interessantes do ponto de vista da prova e argumentação matemática, uma vez que os alunos tentaram justificar transcrevendo suas ideias por meio das palavras. Não obtivemos argumentos gráficos, como aqueles encontrados por Hoyles (1997), em que os alunos se utilizaram de símbolos gráficos (bolinhas, quadradinhos, etc.) para representar concreta e visualmente as quantidades e operar com estes símbolos. Ainda em relação à questão 1, dois alunos do colégio EF1 apresentam um raciocínio lógico bastante elaborado, considerando sua faixa etária (15 anos de idade). Apesar de sua argumentação partir de um exemplo particular, remetendo ao esquema empírico, os alunos utilizaram este exemplo particular para estruturar comentários gerais, tentando exibir, desta forma, um padrão a partir dele.


1) Verdadeira, pois sempre que somamos três números consecutivos, se subtrairmos 1 do maior número e somarmos no menor, teremos três números iguais multiplicados por três.

ex: 1, 2, 3. $\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3} = \boxed{2}+\boxed{2}+\boxed{2} = 3\times 2$

+1 −1

Figura 8 - resposta da aluna ALM, do EF1, à questão 1: “verdadeira, pois sempre que somamos três números consecutivos, se subtrairmos 1 do maior número e somarmos no menor, teremos três números iguais multiplicados por três”.

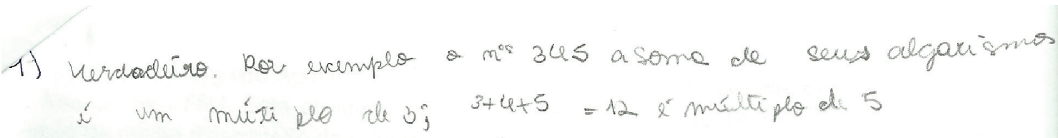
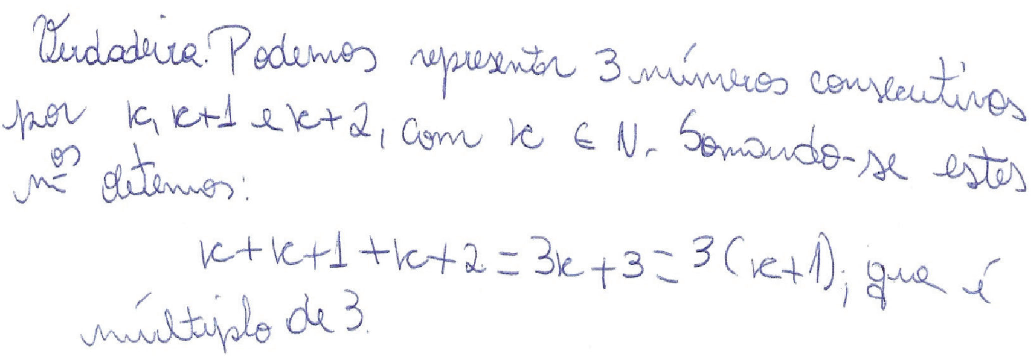

1) Verdadeira. Por exemplo o nº 345 a soma de seus algarismos é um múltiplo de 3; 3+4+5 = 12 é múltiplo de 5

Figura 9 - resposta da aluna GSM, do EF1, à questão 1: “verdadeira, por exemplo o nº 345 a soma de seus algarismos é um múltiplo de três; 3+4+5 = 12 é múltiplo de 3.”


Verdadeira. Podemos representar 3 números consecutivos por k, k+1 e k+2, com $k \in N$. Somando-se estes nºs obtemos:

$k+k+1+k+2 = 3k+3 = 3(k+1)$; que é múltiplo de 3.

Figura 10 - resposta da aluna CMV, do EM2, à questão 1: “Verdadeira. Podemos representar 3 números consecutivos por x, x+1 e x+2, com x Î IN. Somando-se estes nós obtemos: x + x+1 + x+2 = 3x+3 = 3(x+1), que é múltiplo de 3.”

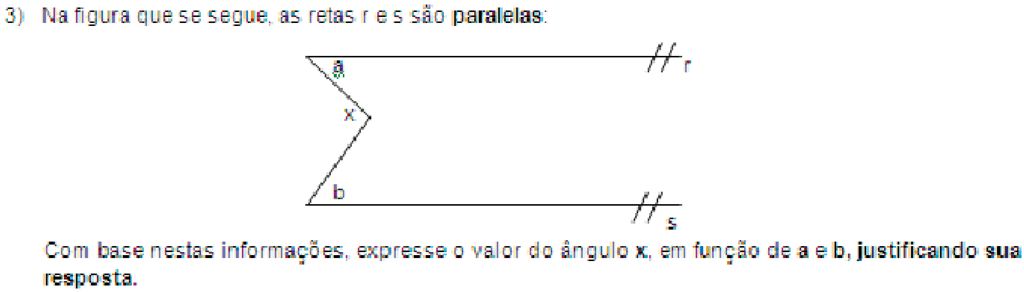
Nos dois primeiros exemplos, observa-se o esforço das alunas em de fato provar um resultado matemático, isto é, buscar argumentos convincentes de validade, de modo a garantir a veracidade da propriedade em questão, em qualquer caso. As respostas encontradas partem de um exemplo especial, que promove a generalização para os demais casos similares: para Balacheff (1988), este tipo de prova apresentado se enquadraria no *exemplo genérico*, uma vez que a escolha do exemplo atende de maneira geral ao enunciado do problema.

Na resposta da aluna ALM, verifica-se que ela observou um padrão na soma de três números inteiros consecutivos: se subtrairmos uma unidade do maior número e somar ao menor, obtêm-se três números iguais, cuja soma será igual ao produto do termo do meio por três. Apesar de ela não ter usado nenhum artifício algébrico, seus argumentos robustecem a veracidade; e o uso do exemplo aplica-se para mostrar a validade dos argumentos lançados. Ressalta-se também que, ao lançar os argumentos, a aluna propôs uma conjectura ou lema: "sempre que somamos três números consecutivos, se subtrairmos 1 do maior número e somarmos ao menor, teremos três números iguais". Este exercício, de propor a construção, avaliação e refutação de conjecturas, é bastante interessante ao desenvolvimento do raciocínio lógico-detutivo, além de formar no aluno uma postura investigativa, atitudes estas amplamente recomendadas pelos PCN (BRASIL, 1997).

Quanto à resposta da aluna GSM, causa-nos satisfação a utilização de resultados previamente "conhecidos" (provados) para demonstrar os demais. Sua resposta sugere a utilização da propriedade referente aos múltiplos de 3 (critério de divisibilidade do número 3), que consiste em verificar se a soma dos algarismos que compõem o número é ou não divisível por 3 (se a soma dos algarismos resultar um múltiplo de 3, então o número em questão é divisível por 3). Na sua argumentação, pareceu-nos que a aluna exibiu como exemplo o número 345, formado por algarismos consecutivos e concluiu, com base na propriedade citada, que a soma de três números consecutivos é um múltiplo de três.

A aluna CMV apresentou resposta mais próxima do modelo formal, ou como diria Balacheff (1988), prova conceitual, para mostrar a validade do enunciado. Para tanto, construiu sua argumentação recorrendo ao uso de letras, para indicar a generalidade de seu raciocínio, além de indicar o domínio da variável utilizada (x Î IN). De fato, olhando para a sua resposta, verificamos que a aluna alcançou o estágio da prova conceitual de Balacheff (1988), podendo classificar sua resposta como um experimento mental, ou ainda um esquema analítico transformacional (SOWDER; HAREL, 1998).

A questão número 3 também gerou resultados importantes para a pesquisa. Trata-se de um problema de geometria plana que consiste em exprimir a medida do ângulo x em função dos ângulos a e b. É importante ressaltar que não foi indicado que a resposta do problema era x = a + b. Cabia ao aluno chegar a este resultado, justificando seu raciocínio.



3) Na figura que se segue, as retas r e s são **paralelas**:

Com base nestas informações, expresse o valor do ângulo **x**, em função de **a** e **b**, **justificando sua resposta.**

Figura 11 - enunciado da questão 3.

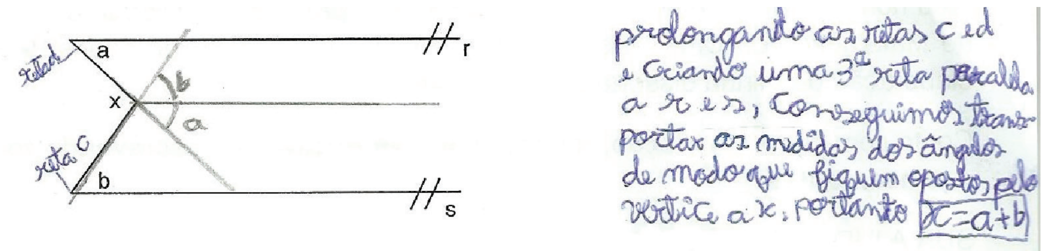


Figura 12 - resposta dada pelo aluno LT, da EM1: “prolongando as retas c e d e criando uma 3ª reta paralela a r e s, conseguimos transpor as medidas dos ângulos, de modo que fiquem opostos pelo vértice a x, portanto x = a+b.”

Em seus argumentos, o aluno LT descreve as construções auxiliares para ter condições de utilizar o fato matemático de que os ângulos opostos pelo vértice são iguais. Implicitamente o aluno utiliza o postulado das paralelas para traçar a terceira reta paralela e utiliza também o Teorema das Paralelas para realizar a “transposição” mencionada na argumentação. Além de se apresentar de forma correta, esta argumentação mostra que o aluno empreende bem seu raciocínio, moldando-se numa estrutura lógico-dedutiva, residindo este tipo de prova também no modelo de *experimento mental* (BALACHEFF, 1988).

Em outras respostas, alguns alunos, como PSR, da EM1, concluíram corretamente que x = a + b, mas sem apresentar maiores detalhes escritos quanto à justificação e à argumentação do fato questionado.

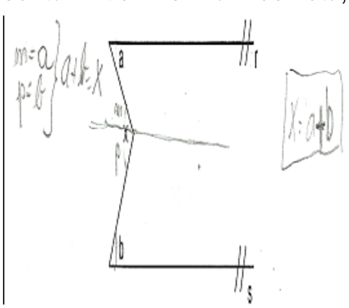


Figura 13 - resposta dada pela aluna PSR

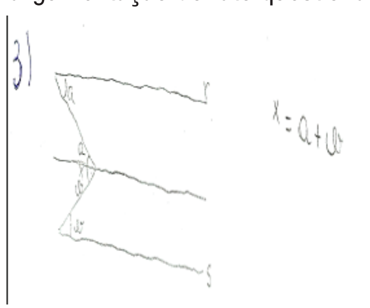


Figura 14 - resposta dada pela aluna AL.

Nestas resoluções, ambas as alunas responderam, corretamente, que x = a + b, mas não deram uma justificativa mais elaborada que corrobore com a validade de que x seja de fato a + b. Notemos que nas figuras 11 e 12 as alunas construíram o que seria uma reta paralela às retas r e s, para então aplicar o teorema das paralelas. Estas duas soluções refletem o trabalho em sala de aula que valoriza apenas o resultado final, sem explorar a coleta de premissas para construir argumentos e chegar às conclusões. Neste caso, entendemos que as duas alunas não "provaram" o resultado, pois apenas exibiram uma resposta, que por acaso é a correta para o problema. De acordo com Nasser e Tinoco (2003, p. 84), estas alunas apresentaram uma resposta que, para alguns, pode até ser encarada como um argumento - tendo em vista o traçado da reta paralela auxiliar - mas não podemos considerá-la como uma prova, do ponto de vista da Matemática.

A resposta apresentada na figura 15 ilustra a ideia de que um trabalho com álgebra limitado à resolução de equações leva o aluno à crença de que sempre deve "achar o valor da letra". Esta situação se enquadra no esquema externo-ritual, de Sowder e Harel (1998).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Após a análise das respostas a este teste, podemos estabelecer algumas considerações importantes para a sequência da pesquisa. Numa primeira impressão, verificamos que o nível de argumentação deste grupo pesquisado é ainda bastante ingênuo, uma vez que a grande maioria das respostas encontradas apresentou caráter empírico, no qual a constatação da verdade se deu por meio de exemplos. O desenvolvimento da habilidade de argumentar e provar em Matemática requer um trabalho voltado para tal, ou seja, o professor deve estar consciente da importância desta competência/ habilidade e procurar abordar os assuntos do currículo também sob o olhar da prova e da argumentação. Pelos resultados que obtivemos, em relação aos alunos investigados nesta fase da pesquisa, há indícios de que esta habilidade não está sendo desenvolvida em sala de aula.

Apesar de os PCN recomendarem atividades, que possibilitem a construção da habilidade de argumentação como forma de garantir a conquista da autonomia e da formação do cidadão crítico, e ainda do desenvolvimento e amadurecimento do raciocínio lógico, não há - como havia em currículos estrangeiros, a exemplo do Reino Unido (HOYLES, 1998; JONES, 1997) - nestes mesmos PCN, diretrizes e competências que indiquem caminhos para a construção de currículos escolares que englobem o trabalho pedagógico voltado à argumentação e à prova matemática.

O resultado também nos permite tecer algumas indagações a respeito da prática docente: será que o professor, ao apresentar um teorema ou uma proposição, faz sua "demonstração" propondo uma série de exercícios que atendem à verdade matemática colocada ou se baseia apenas em exemplos para concluir uma afirmativa? Ou será que o professor propõe um exercício de argumentação que se inicia na experimentação, na verificação de exemplos e parte para a estruturação de justificativas que, muitas vezes, são percebidas destes experimentos e exemplos? Ou ainda, será que o professor prova os teoremas utilizando-se do rigor matemático, redigindo a demonstração como se estivesse num curso acadêmico? Imenes (1987) indica que existe uma renúncia tácita ao trabalho de sala de aula com a prova matemática. Contudo, as sugestões de atividades encontradas em seu trabalho apontam para a construção da habilidade de argumentar em Matemática.

Constata-se, dessa forma, que a argumentação e a prova matemática não fazem parte da prática pedagógica da maioria dos professores da Escola Básica. De fato, a argumentação lógico-dedutiva é uma habilidade que não pode ser ensinada em algumas aulas. É uma habilidade que deve ser desenvolvida desde os primeiros anos, ao longo de toda escolaridade, numa constante gradação dos níveis de argumentação, de maneira a conduzir o aluno a construir justificativas que possam ser aceitas como prova de resultados matemáticos, como também foi constatado por Nasser e Tinoco (2003).

Dada a aparente falta de atenção à argumentação e à prova matemática e à ausência de reflexão sobre a habilidade dos alunos em argumentação, é possível o surgimento de variadas concepções dos professores sobre prova. Essa ausência de preocupação com o ensino de prova também exerce influência sobre a maneira de se avaliar uma argumentação discente. Devido a fatores como formação acadêmica e continuada, experiência docente, concepções sobre avaliação, num aspecto específico da prova matemática, podemos imaginar grandes variações de avaliação dos docentes sobre uma mesma questão.

Dessa forma, indaga-se: como o professor avaliaria as respostas dadas, por exemplo, nas figuras 12, 13 e 14? À qual ele atribuiria a maior nota? Ou ainda, se colocássemos as figuras 8, 9 e 10 e lhe perguntássemos "Qual nota atribuiria a cada uma destas questões?" "E em que conceitos e ideias os professores se baseariam para sustentar estas avaliações?" Estes são alguns questionamentos que deverão ser respondidos no decorrer da pesquisa de mestrado.

Pretendemos com esta pesquisa, além de verificar como o professor avalia os níveis de argumentação dos alunos do Ensino Fundamental, convidar o docente a uma reflexão sobre uma abordagem menos formal para a prova matemática, que nesse nível de ensino se apresenta na sua forma mais incipiente e ingênua. Este convite se baseia na convicção de que, dependendo do desenvolvimento cognitivo do aluno, da sua idade, do seu nível de conhecimento matemático e de sua série escolar, formas alternativas de raciocínio dedutivo devem ser consideradas e valorizadas, como destacado por Imenes (1987).

REFERÊNCIAS

AGUILAR JÚNIOR, C. A.; NASSER, L. Postura de docentes em relação à justificação e argumentação nas aulas de Matemática. In: SIMPOSIO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 12, p. 695- 713, 2012, Chivelcoy, Argentina. **Anais...** Chivelcoy, 2012. 1 CD-ROM.

ALMEIDA, J. C. P. **Argumentação e prova na matemática escolar do ensino básico**: a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Pontifícia Universidade Católica - SP, São Paulo, Brasil, 2007.

BALACHEFF, N. Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In: PIMM, D. (Ed.). **Mathematics, teachers and children**. pp. 216-235, Hodder & Stoughton, Londres, Inglaterra, 1988.

BOAVIDA, A. M. R. A argumentação na aula de Matemática: Olhares sobre o trabalho do professor. In: AMRB: XVI SIEM, Lisboa, Portugal, 2005.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: matemática. Brasília, 1997.

GRAVINA, M. A. **Os ambientes de Geometria Dinâmica e o Pensamento Hipotético Dedutivo**. Tese (Doutorado em Informática na Educação) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil, 2001.

HANNA, G. Some Pedagogical Aspects of Proof. Interchange. **The Ontario Institute for Studies in Education**, vol. 21, n. 1, p. 6-13, Ontario, Canadá: 1990.

HOYLES, C. The Curricular Shaping of Students' Approaches to Proof. **For the Learning of Mathematics** 17, 1, p. 7 – 15, FLM Publishing Association, Vancouver, British Columbia, Canadá, 1997.

IMENES, L. M. A Geometria no primeiro grau: experimental ou dedutiva? **Revista de Ensino de Ciências** (USP), n. 19, p. 55-61, São Paulo, Brasil, 1987.

JAHN, A. P., HEALY, L., PITTA COELHO, S. Concepções de Professores de Matemática sobre prova e seu ensino: mudanças e contribuições associadas à participação em um projeto de pesquisa. In: ANAIS DA 30ª REUNIÃO ANUAL DA ANPED: 30 ANOS DE PESQUISA E COMPROMISSO SOCIAL. **Anais...** Caxambu, Brasil, 2007.

JONES, K. Student-Teachers' Conceptions of Mathematical Proof. **Mathematics Education Review**, 9, 16-24, Londres, Inglaterra, 1997.

KNUTH, E. J. Teacher's conceptions of Proof in the context of secondary school mathematics. **Journal of Mathematics Teacher Education**, 5, 61-88, Holanda, 2002.

NASSER, L.; AGUILAR JÚNIOR, C. A. Argumentação e provas nas aulas de Matemática: a visão do professor. In: ANAIS DO 3º SIPEMAT. **Anais...** Fortaleza, CE, Brasil, 2012.

NASSER, L.; TINOCO, L. A. A. **Argumentação e Provas no Ensino de Matemática**. 2. ed. - UFRJ/Projeto Fundão: Rio de Janeiro, 2003.

NASSER, L. Um problema: resolução x exploração. **Revista do Professor de Matemática**, v. 15, p. 45-49. Sociedade Brasileira de Matemática, São Paulo, SP, 1989.

SOWDER, L., HAREL, G.. Types of Students' Justifications. **The Mathematics Teacher**, 91, 670–675, Estados Unidos. 1998.

RECEBIDO EM: 10/09/2012.
APROVADO EM: 12/10/2012.