VIDYA, v. 32, n. 2, p.113-132, jul./dez., 2012 - Santa Maria, 2012. **ISSN** 0104-270 X

UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE GEOMETRIA FRACTAL EM SALA DE AULA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

A DIDACTIC PROPOSAL FOR THE TEACHING OF FRACTAL GEOMETRY IN HIGH SCHOOL

MARISTEL DO NASCIMENTO*
SANI DE CARVALHO RUTZ DA SILVA**
NILCÉIA APARECIDA MACIEL***

RESUMO

Neste artigo, descrevem-se os resultados de uma pesquisa de mestrado cujo objetivo foi analisar se diferentes atividades de ensino permitem aos alunos compreenderem a existência da Geometria Fractal. Do ponto de vista metodológico, o estudo inseriu-se em uma pesquisa qualitativa, de natureza aplicada e interpretativa, envolvendo alunos da 1ª série do Ensino Médio de um colégio estadual da cidade de Ponta Grossa (PR). A pesquisa orientou-se pela questão: Como introduzir os conceitos básicos de Geometria Fractal, por meio de diferentes atividades? A base teórica apoiou-se em documentos que orientam o ensino de Geometria e autores que indicam a inclusão do ensino de Geometria Fractal, para alunos da Educação Básica. Os dados foram coletados a partir da aplicação de uma oficina, na qual envolveu esta geometria. A pesquisa revelou a defasagem dos alunos, em relação à compreensão dos conceitos geométricos básicos, e também, que é possível ao professor abordar outras geometrias integradas no ensino, utilizando-se de atividades diferenciadas que possibilitem aos alunos uma participação ativa no processo de ensino e aprendizagem.

Palavras-chave: Diretrizes Curriculares. Geometria Fractal. Ensino Aprendizagem.

ABSTRACT

This article describes the results of a master degree research that aimed to examine whether different teaching activities allow students to understand the existence of Fractal Geometry. Methodologically, the study has a qualitative, interpretive and applied nature, involving students in the first year of state high school in the city of Ponta Grossa (PR). The research is guided by the question: How to introduce basic concepts of fractal geometry through different activities? The theoretical basis relied on documents that guide the teaching of Geometry and authors who indicate the inclusion of the teaching of Fractal Geometry to high school students. The data were collected at a workshop in which this geometry was taught. The research revealed a gap the students have on the basic understanding of geometric concepts, and also that it is possible for the teacher to approach other geometry contents integrated in the curriculum using different activities that may allow students to actively participate in the teaching/learning process.

Keywords: *Curriculum Guidelines. Fractal Geometry. Teaching/Learning.*

* Mestre em Ensino de Ciência e Tecnologia - PPGECT. Professora da Secretaria de Educação do Estado do Paraná. E-mail: mnasci202@hotmail.com
** Doutora em Ciência dos Materiais - UFRGS - PPGCIMAT. Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR - Campus Ponta Grossa - Departamento Acadêmico de Matemática. Professora do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciência e Tecnologia - UTFPR – PPGECT. E-mail: sani@utfpr.edu.br
*** Doutora em Educação Científica e Tecnológica - UFSC - PPGECT. Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR - Campus Ponta Grossa - Departamento Acadêmico de Matemática. Professora do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciência e Tecnologia - UTFPR – PPGECT. E-mail: nilceia@utfpr.edu.br

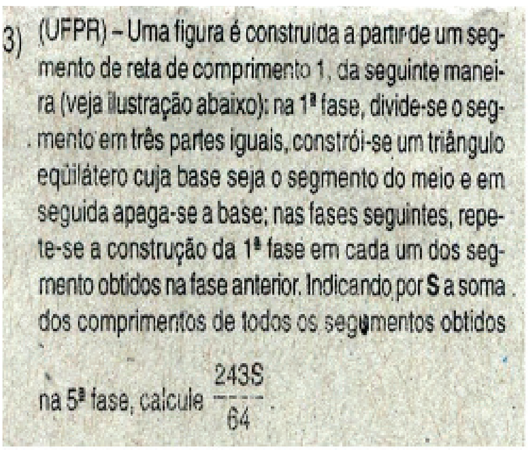
INTRODUÇÃO

Neste texto visam-se apresentar reflexões sobre as possibilidades da inclusão do ensino de Geometria Fractal na Educação Básica. Temos a clareza que é um tema recente para a maioria dos professores de Matemática, pois em muitos cursos de licenciatura em Matemática não consta na grade curricular e nem nos livros didáticos, quando aparecem, são apenas de forma ilustrativa, sem a devida orientação de como desenvolver o trabalho. Neste sentido, não proporciona segurança aos professores de incluir o tema em suas aulas.

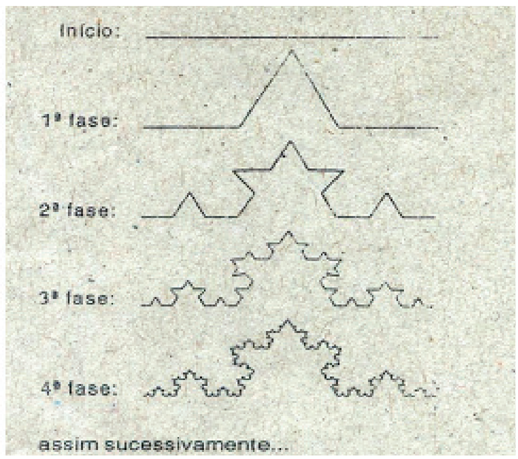
No entanto, recentemente, a abordagem da Geometria Fractal tem sido indicada nos documentos que orientam o ensino de Matemática. No Paraná, as Diretrizes Curriculares Estaduais de Matemática (DCE, 2008) incluem sua abordagem tanto para o Ensino Fundamental quanto para o Ensino Médio,

> na Geometria dos fractais, pode-se explorar: o floco de neve e a curva de Koch; triângulo e tapete de Sierpinski, conduzindo o aluno a refletir e observar o senso estético presente nessas entidades geométricas, estendendo para as suas propriedades (PARANÁ, 2008, p. 56-57).

Além desse fato, figuras, textos e situações problemas envolvendo esta geometria começam aparecer em avaliações institucionais, ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) e vestibulares. Por exemplo, um problema com esta abordagem foi incluído na prova de Matemática do vestibular da Universidade Federal do Paraná em 2008 (Vestibular. UFPR, 2008).



3) (UFPR) – Uma figura é construída a partir de um segmento de reta de comprimento 1, da seguinte maneira (veja ilustração abaixo): na 1ª fase, divide-se o segmento em três partes iguais, constrói-se um triângulo eqüilátero cuja base seja o segmento do meio e em seguida apaga-se a base; nas fases seguintes, repete-se a construção da 1ª fase em cada um dos segmento obtidos na fase anterior. Indicando por **S** a soma dos comprimentos de todos os segmentos obtidos na 5ª fase, calcule $\frac{243S}{64}$.



Quadro 1 - Questão 3 Prova de Matemática do Vestibular UFPR, 2008.
Fonte: prova vestibular UFPR, 2008.

Cabe salientar que, com o texto apresentado na questão da UFPR, quadro 1, o candidato provavelmente conseguiria resolver o problema, mas o que acreditamos é que, para muitos, o tema nunca foi mencionado nas aulas de Matemática.

Este problema envolvendo cálculos com fractais pode ser utilizado como ponto de partida para o professor abordar este tema em sala de aula.

Em 2008, a divulgação das DCE de Matemática, para o professor paranaense, caracterizou-se como um desafio: incluir o tema Geometria Fractal em suas atividades de ensino.

Neste cenário, surgiu a necessidade de buscar diferentes atividades de ensino, construções geométricas, origami ou dobraduras, construções com recortes, exploração e manipulações de figuras por meio de *softwares,* como o utilizado na pesquisa, *Fractal Forge* e exposições de trabalhos, que permitam aos alunos compreenderem a existência e a aplicação da Geometria Fractal.

A pesquisa aplicada em sala de aula ocorreu por meio do desenvolvimento de uma oficina junto a alunos do Ensino Médio denominada: "Conhecendo a Geometria Fractal", a qual contou com a aplicação de diferentes atividades, as quais envolveram os conceitos de Geometria Fractal visando analisar a possibilidade da abordagem deste tema em sala de aula.

A Geometria Fractal

A Geometria Fractal está ligada a ciência chamada Caos, tendo em vista que na natureza coexistem a ordem (o determinismo) e o Caos (a imprevisibilidade), "assim a estrutura fragmentada do fractal fornece certa ordem ao Caos e busca padrões dentro de um sistema por vezes aparentemente aleatório" (BARBOSA, 2005, p.10).

O estudo dos fractais possibilita a percepção de infinito. James Gleick, citado por Nunes (2006) afirma: "para os olhos da mente, um fractal é a maneira de entrever o infinito".

Segundo Capra (1996), o matemático Francês Benoît Mandelbrot, a partir da década de 50, iniciou seus estudos da geometria de fenômenos naturais irregulares e compreendeu que estas formas geométricas apresentavam características comuns bastante notáveis.

Matemáticos como George Cantor, Giuseppe Peano, Helge von Koch e Waclaw Sierpinski já haviam criado figuras que não atendiam às definições da Geometria Euclidiana, consideravam estranhas e indefinidas, essas figuras receberam o nome de "monstros matemáticos". Para Janos (2008), esta designação se deu pelo fato que, diferente do que estamos acostumados, estas figuras nunca são realmente retas ou curvas, são objetos sem forma definida.

Giuseppe Peano, precursor dos trabalhos de Mandelbrot em relação à Geometria Fractal, em 1890, ao tratar do aprofundamento das noções de continuidade e dimensão, publica sua famosa curva, também considerada "monstro matemático". A Curva de Peano é um exemplo de fractal que preenche todo o plano e é construída por um processo iterativo, como se observa na figura 1.

Outro matemático cujos trabalhos também tiveram uma grande influência no desenvolvimento da Geometria Fractal, segundo Barbosa (2005) foi o polonês Waclaw Sierpinski (1882-1969), que em 1916, apresentou um dos famosos "monstros" o qual ficou conhecido por Triângulo de Sierpinski. Na figura 2, a seguir, destaca-se o Triângulo de Sierpinski nas seis primeiras iterações.

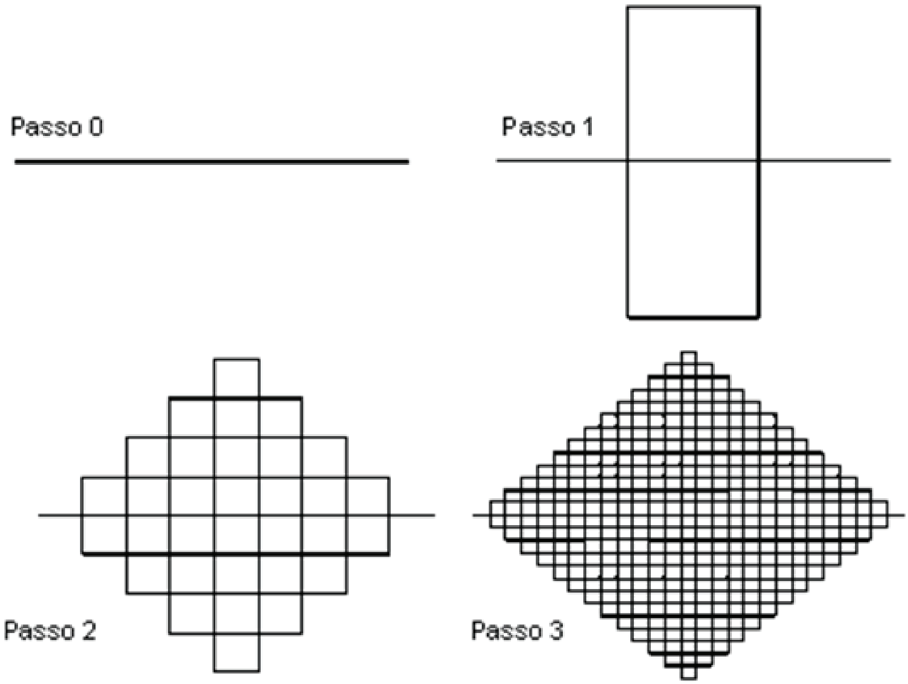


Figura 1 - Curva de Peano.
Fonte: Natcomp (2012).

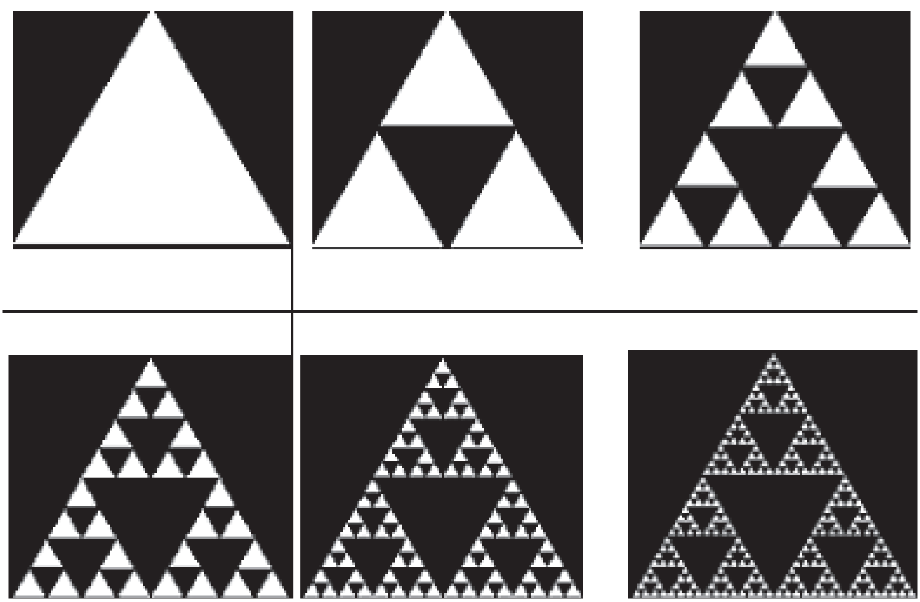


Figura 2 - Triângulo de Sierpinski.
Fonte: Fractovia (2012).

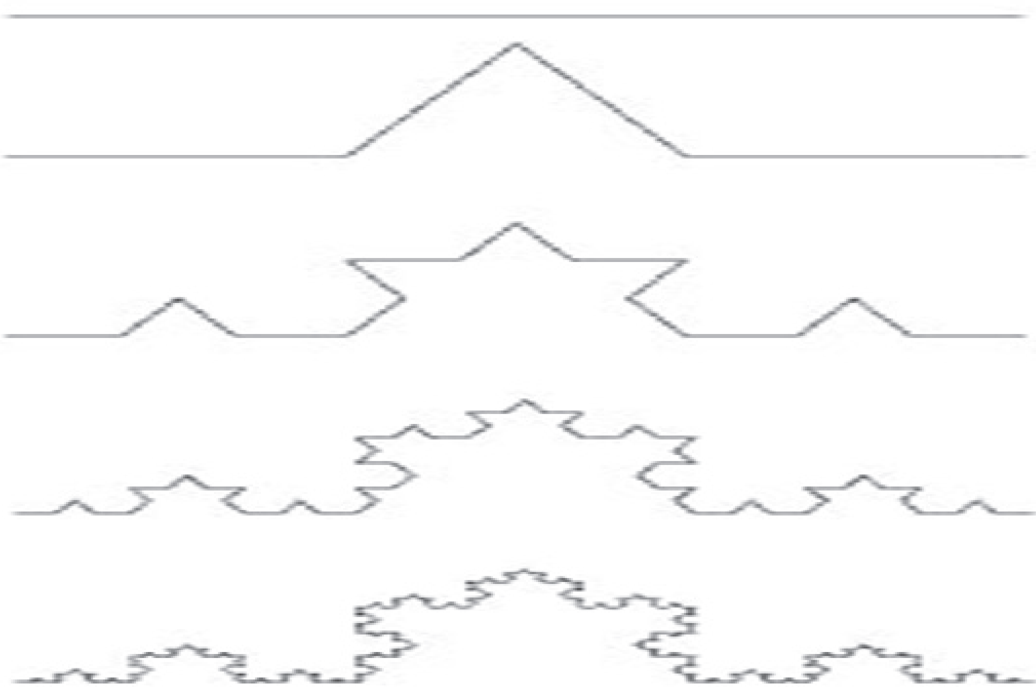


Figura 3 - Curva de Koch.
Fonte: Com Ciência (2008).

Capra (1996, p. 119) apresenta uma das formas fractais mais simples geradas pela iteração, isto é, a repetição incessante de certa operação geométrica, a qual é chamada de “Curva de Koch” ou “Curva do Floco de Neve”. Helge Von Koch, matemático polonês, em 1904 e 1906, introduziu esta curva que recebe seu nome. Na figura 3, observam-se o fractal Curva de Koch e o aspecto da curva após diversas iterações.

Influenciado pelos trabalhos desses matemáticos, em 1970, Benoit Mandelbrot publicou o livro “The Fractal Geometry of Nature” no qual introduz o termo “fractal”, que, segundo Barbosa (2005), tem sua origem no latim, do adjetivo *fractus*, cujo verbo correspondente *fragere*, significa quebrar: criar fragmentos irregulares, fragmentar, e assim utilizou o termo Fractal para denominar as figuras que representam aspectos da natureza.

Para representar formas semelhantes às existentes na natureza, Mandelbrot criou a Geometria Fractal. O termo fractal foi criado para designar um objeto geométrico que nunca perde a sua estrutura, qualquer que seja a distância de visão.

Vale observar que nem tudo na natureza é fractal, como salienta Alves (2007, p. 141), "uma gota de água ou uma porção de água parada não são fractais, mas a ondas do oceano e as correntes e percurso dos rios são, muitas vezes fractais".

Benoit Mandelbrot, segundo Barbosa (2005), é considerado o "Pai da Geometria Fractal" e hoje se entende por Geometria Fractal um ramo da Matemática que estuda os Fractais, considerada uma Geometria não Euclidiana, pois nenhum dos cinco postulados de Euclides é satisfeito.

Publicado na revista Scientific American, em 1985, o Fractal de Mandelbrot tornou-se famoso e sua imagem é encontrada em *posters*, camisetas, cartões postais, capa de CDs, etc. Sua construção utiliza um sistema de duas equações. O Fractal de Mandelbrot foi reconhecido como o mais complexo objeto da Matemática, "em seu interior, infinitas regiões podem ser observadas" (JANOS, 2008, p. 87). Na figura 4 destaca-se esse fractal em diferentes escalas.

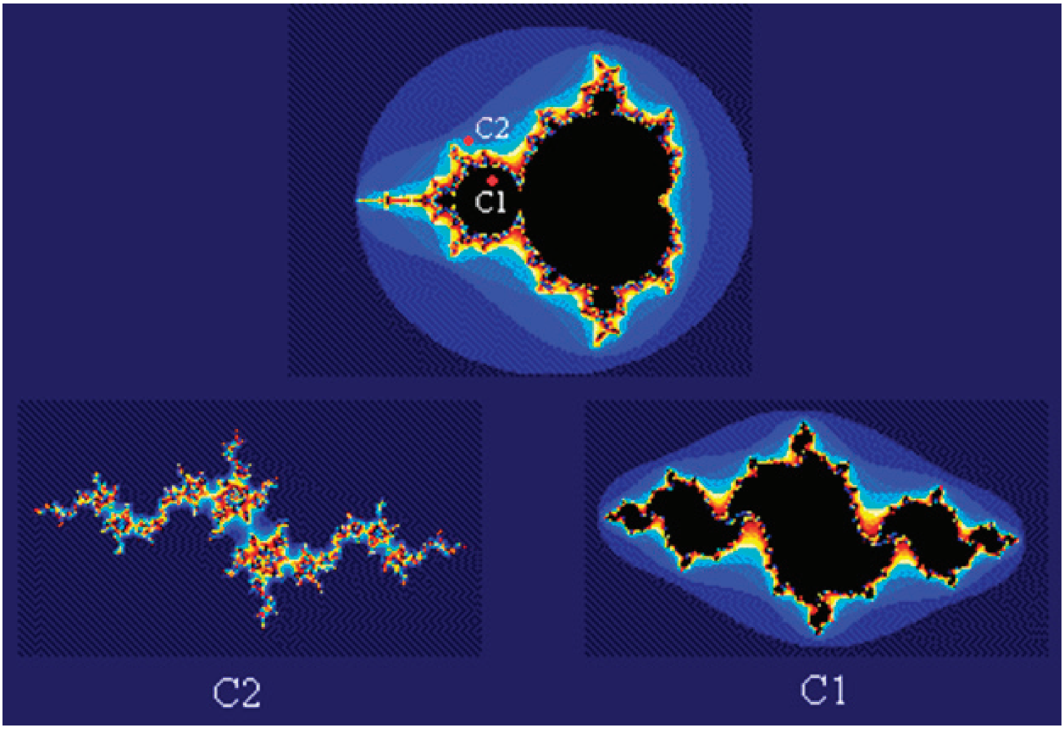


Figura 4 - Fractais de Mandelbrot.
Fonte: Ultra Fractal (2012).

Segundo Capra (1996), o conjunto de Mandelbrot é único, embora as regras (fórmulas) para a sua construção sejam simples, a variedade e a complexidade que ela revela são inacreditáveis. Para Janos (2008, p.88), "o Fractal de Mandelbrot é, sem dúvida, um dos objetos mais intricados que conhecemos".

Características dos Fractais

Um fractal é definido por três características básicas, a autossimilaridade, a complexidade infinita (iteração) e a dimensão fracionária.

Autossimilaridade

Segundo Carvalho (2005) autossimilaridade ou autossemelhança é a mais elementar e marcante das características dos fractais, significa que cada parte em escala menor é exatamente igual ou semelhante à parte inicial, isto é, cada parte ampliada da imagem será igual a da inicial.

> Autossimilaridade é que seus padrões característicos são repetidamente encontrados em escala descendente, de modo que suas partes, em escalas menores, em qualquer escala, são, na forma, semelhantes ao todo (CAPRA, 1996, p. 118).

Existem dois tipos de autossemelhança: exata e a aproximada ou estatística.

Ainda segundo (CAPRA, 1996), a autossemelhança exata significa que, mesmo ampliado várias vezes, cada parte é idêntica à original, não importando quantas ampliações forem efetuadas.

A autossemelhança aproximada ou estatística significa que o objeto ampliado várias vezes não será igual ao inicial, será apenas semelhante. O fractal possui medidas numéricas ou estatísticas que são preservadas em diferentes escalas. Para Janos (2008, p. 35):

> O que existe nas figuras da natureza é uma autossemelhança aproximada em diferentes escalas. Essa autossemelhança aproximada é chamada de autossemelhança estatística, porque, em diferentes escalas, essa autossemelhança existe em média. Nos fractais matemáticos, as partes são cópias exatas do todo, mas nos fractais naturais as partes são apenas reminiscências do todo.

Os fractais que apresentam a característica da autossemelhança exata são aqueles construídos a partir de figuras geométricas, os chamados Fractais Geométricos, como: Curva de Koch, Triângulo de Sierpinski... Enquanto que, os fractais encontrados na natureza, os Fractais Naturais - couve-flor, gengibre, nuvens, entre outros - apresentam uma autossemelhança estatística, pois as partes são semelhantes em média ao todo, isto é, as partes em escalas menores são apenas parecidas com o todo.

Complexidade Infinita ou Iteração

Esta característica se relaciona à existência de um processo recursivo, o que significa que uma determinada operação repete-se infinitamente, de acordo com esta propriedade, cada fractal em sua construção dispõe de um número infinito de procedimentos, resultando em uma estrutura complexa. “A técnica principal para se construir um fractal é a iteração - isto é, a repetição incessante de certa operação geométrica” (CAPRA, 1996, p. 119).

Com a ajuda de computadores, as iterações geométricas simples podem ser aplicadas milhares de vezes em diferentes escalas, para produzir os assim chamados forjamentos (*forgeries*) fractais-modelos, gerados por computador, de plantas, árvores, montanhas, linhas litorâneas e tudo aquilo que manifeste uma semelhança espantosa com formas reais encontradas na natureza (CAPRA, 1996, p. 120).

A Dimensão Fractal

A dimensão da Geometria Fractal, é um número fracionário, para Barbosa (2005, p. 66), "É um novo tipo de dimensão denominada dimensão fractal, associada à aspereza, espessura, densidade, textura etc.".

Na Geometria Euclidiana, segundo Tratch (2008, p. 18), "a dimensão de um objeto está relacionado ao espaço, no qual o objeto está inserido e indica como o objeto é medido", sabemos que, um ponto tem dimensão zero, não tem nem largura nem comprimento; uma reta tem dimensão um, uma figura plana tem dimensão dois e o espaço que vivemos tem dimensão três.

A dimensão fractal, segundo a mesma autora, "é expressa geralmente por um valor não inteiro e está relacionada com sua estrutura, seu comportamento e seu grau de irregularidade" (TRATCH, 2008, p. 18). Mas como medir o litoral da Inglaterra? Como caracterizar o "denteamento" do litoral?

Barbosa (2005) define Dimensão Fractal, demonstrando a equação para o seu cálculo a partir da comparação com objetos de 1, 2 e 3 dimensões, repartindo-os em objetos autossimilares, determinando assim a fórmula para o cálculo da Dimensão Fractal:

$$D = \frac{\log m}{\log n}$$

Nesta fórmula, "m" corresponde ao número de segmentos semelhantes e "n" representa o fator de escala, isto é, a razão de semelhança.

Este conceito de dimensão fractal, segundo Capra (1996), inicialmente foi uma ideia matemática abstrata, no entanto, tornou-se uma poderosa ferramenta para as análises da complexidade das formas fractais. Quanto mais denteados forem os objetos naturais, contornos de um relâmpago ou nuvens, por exemplo, mais altas serão suas dimensões fractais, fracionárias em um intervalo de zero a três. Isso significa, por exemplo, que a Curva de Koch, dimensão 1.262, está situada entre o espaço unidimensional (maior que uma linha reta) e o bidimensional (menor que uma figura plana) (JANOS, 2008).

Também em Janos (2008, p. 74) encontra-se um exemplo de objeto entre os espaços bidimensional e tridimensional:

> pegue uma folha de papel 5x10cm e amasse-a até formar uma bola de papel. Esta bola de papel tem dimensão entre 2 e 3. A tentativa de construir objetos de 3 dimensões a partir de objetos de 2 dimensões produz estruturas fractais quebradiças com espaços vazios irregulares como a bola de papel.

Em uma curva quanto mais "denteada" mais próximo de dois será a sua dimensão, e quanto menos amassada for a "bola de papel" mais próxima de dois será a sua dimensão.

Classificação dos Fractais

Os fractais, segundo Menezes e Cunha (2003), apresentam duas categorias: os geométricos (determinísticos) e os não lineares (Aleatórios e da Natureza).

Os Fractais da Natureza são elementos da natureza que possuem a característica da autossimilaridade, observada por Mandelbrot, isto é, cada parte, em escala menor, é semelhante ao todo. São considerados fractais da natureza: nuvens, algumas rochas, couve-flor, árvores e o brócolis, como se pode observar na figura 5.

Os Fractais Geométricos caracterizam-se pelos modelos fractais construídos a partir de figuras geométricas, repetem-se padrões continuamente. Como exemplo de Fractais Geométricos tem-se: a Curva de Koch, o Triângulo e o Tapete de Sierpinski, a Esponja de Menger. Em destaque, um modelo de Fractal Geométrico na figura 6, o Tapete de Sierpinski.

Figura 5 - Fractal da natureza – brócolis.
Fonte: Com Ciência (2008).

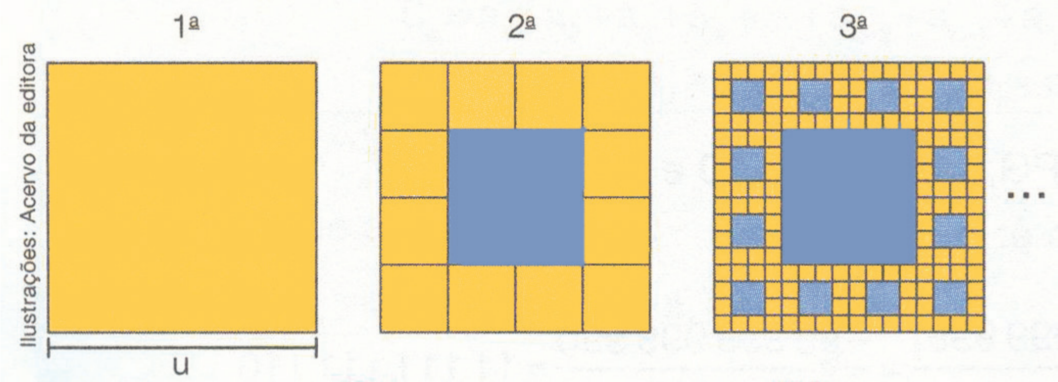


Figura 6 - Tapete de Sierpinski.
Fonte: Souza (2010).

Os Fractais Aleatórios são os fractais construídos a partir da geometria dinâmica, na qual as iterações podem ser repetidas uma infinidade de vezes, resultando em belíssimas figuras.

> São construídos por meio de funções iterativas complexas, geralmente com o auxílio de programas computacionais específicos. São simétricos na escala, mas a transformação não é previsível (TRATCH, 2008, p. 19).

Na figura 7, apresenta-se um modelo de um Fractal Aleatório.

Figura 7 - Fractal Aleatório.
Fonte: Ultra Fractal (2012).

O Ensino de Geometria

No Brasil, nos últimos anos, com as reformas nas leis que organizam o ensino, verificou-se uma crescente onda de resgate do ensino de Geometria, conteúdo este esquecido devido à grande valorização dos conceitos algébricos, resultado do Movimento da Matemática Moderna. Autores como Pavanello (1993) e Lorenzato (1995) apontam para o esvaziamento dos conteúdos de geometria no ensino de Matemática, identificando como possíveis causas a formação do professor, o currículo e até mesmo o livro didático.

Lorenzato (1995, p. 06) reforça essa ideia, afirmando que:

> São inúmeras as causas, porém, duas delas estão atuando forte e diretamente em sala de aula: a primeira é que muitos professores não detêm os conhecimentos geométricos necessários para a realização de suas práticas pedagógicas. A segunda causa da omissão geométrica deve-se à exagerada importância que entre nós desempenha o livro didático (LORENZATO, 1995, p. 06).

Assim, a partir da década de 90, influenciados pelas novas concepções a respeito da construção do conhecimento e da difusão dos trabalhos de Piaget, Vygotsky e Vergnaud surgem discussões acerca da importância do conhecimento geométrico e busca-se o seu resgate.

> Sem estudar Geometria as pessoas não desenvolvem o pensar geométrico ou o raciocínio visual e, sem essa habilidade, elas dificilmente conseguirão resolver situações de vida que forem geometrizadas [...] (LORENZATO, 1995, p. 5).

Fainquelernt também enfatiza a importância do estudo de geometria, quando afirma:

> O estudo da Geometria é de fundamental importância para desenvolver o pensamento espacial e o raciocínio ativado pela visualização, necessitando recorrer à intuição, à percepção e à representação, que são habilidades essenciais para a leitura do mundo e para que a visão da Matemática não fique distorcida. Essas razões são suficientes para que o ensino de Geometria no 1º grau não seja desenvolvido através de automatismo, memorização e técnicas operatórias nem baseado em um processo de formalização com crescente nível de rigor, abstração e generalização (FAINGUELERNT, 1999. p. 53).

Tendo em vista a importância que estudo de geometria exerce na vida das pessoas, na elaboração de um documento curricular, precisa-se priorizar o seu ensino e também investir fortemente em cursos de formação continuada para os professores, que foram fragilizados com a ausência desses conteúdos em seus cursos.

Assim, os documentos que orientam o ensino de Matemática: Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN), Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e Diretrizes Curriculares Estaduais (DCE) comprovam essa tentativa de resgate do ensino de geometria, abordando a importância do seu ensino.

Os PCN, no seu bloco Espaço e *Forma,* enfatizam:

> Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de matemática no ensino fundamental, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. (BRASIL, 2001, p. 56)

As Diretrizes Curriculares Estaduais (DCE) do Paraná, cujas discussões se iniciaram em 2003, trazem a importância do estudo de Geometria.

> Para que o aluno se aproprie do conhecimento de forma que compreenda os conceitos e princípios matemáticos claramente e comunique ideias, reconheça suas aplicações e aborde problemas matemáticos com segurança (PARANÁ, 2008, p. 27).

Abordar o conteúdo de geometria de forma que tenha significado para o aluno, também é evidenciado no Guia do Livro Didático, documento de orientação aos professores na escolha do livro didático no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) lançado pelo MEC, na edição de 2007, em seu texto afirma, em relação as 16 obras aprovadas no PNLD/2008:

> A capacidade de visualizar é fundamental na geometria, tanto no sentido de captar e interpretar as informações visuais, como no de expressar as imagens mentais por meio de representações, gráficas ou não. O trabalho com diversas formas de representação gráfica é feito em parte das obras, na maioria das obras ainda persiste uma atenção exagerada

> às classificações e à nomenclatura (BRASIL, 2007, p. 44-45).

Portanto, priorizar no ensino de matemática na educação básica os conceitos de Geometria é contribuir com o aluno para que ele amplie o seu horizonte de conhecimento, pois o meio em que vivemos está mais próximo dos conceitos das geometrias não euclidianas. Cruz (2008) confirma esta necessidade:

> É necessário discutir com os alunos que a perfeição dos espaços geográficos é consequência da atividade humana, sendo que, em muitos espaços onde vivemos nos deparamos com situações que fogem das alterações proferidas pelas pessoas e, portanto, foge aos conceitos de geometria plana, uma geometria Euclidiana. É coerente, do ponto de vista da aprendizagem matemática, explorar os conceitos de Geometria Não Euclidiana (CRUZ, 2008, p. 4).

Questões como estas que mostram a importância do ensino de Geometria, tendo em vista a ampliação do universo de conhecimento do aluno, permearam as discussões entre os professores, no momento da elaboração das Diretrizes Curriculares Estaduais de Matemática do estado do Paraná, optando assim por incluir seus conceitos no documento.

A Experiência realizada com a Geometria Fractal

Na busca de responder a questão que norteou a pesquisa, "Como introduzir os conceitos básicos de Geometria Fractal no Ensino Médio, por meio de diferentes atividades", descreve-se a pesquisa. Assim, quanto à abordagem do problema, essa pesquisa se caracterizou como qualitativa, visto que "o qualitativo engloba a ideia do subjetivo, passível de expor sensações e opiniões" (BICUDO, 2006, p.106). Do ponto de vista da sua natureza, o trabalho foi classificado como uma pesquisa aplicada, pois objetivou gerar conhecimentos para aplicação prática dirigida à solução de problemas específicos. Como afirmam Moreira e Caleffe (2008), "Pesquisa aplicada é a realizada com propósito de resolver um problema".

Foram analisados os dados referentes à aprendizagem dos alunos, de uma única turma da 1ª série do ensino médio, período noturno de um colégio da cidade de Ponta Grossa, que possuía um total de dois mil alunos matriculados no Ensino Médio regular e Educação Profissional. O processo de desenvolvimento da atividade em sala de aula e seu significado, a aprendizagem dos alunos, foram os principais fatores da abordagem.

O critério para a escolha da referida turma foi por meio da liberação da direção do colégio para assumir a turma, tendo em vista que no momento da realização da pesquisa o professor-pesquisador atuava na coordenação pedagógica, junto ao Núcleo Regional de Educação, estando afastado de sala de aula.

As atividades desenvolvidas com os alunos em sala de aula foram divididas em três momentos: o primeiro, com o objetivo de analisar os conhecimentos prévios dos alunos, em relação aos conhecimentos básicos de Geometria Euclidiana, foi aplicado aos alunos um questionário denominado pré-teste, tendo em vista que este conteúdo é abordado ao longo de todas as séries do Ensino Fundamental. O questionário foi dividido em três partes: uma parte especificamente teórica, a qual buscava verificar o domínio dos conceitos básicos de Geometria, a segunda com interpretação de problemas por meio da visualização de figuras e a terceira parte envolvia questões de raciocínio lógico.

No segundo momento, para a efetivação do processo ensino e aprendizagem dos conceitos de Geometria Fractal, optou-se por trabalhar em forma de oficina, dividida em duas etapas: a primeira, em sala de aula, a partir da construção de fractais geométricos utilizando-se as construções geométricas, dobraduras e recortes.

Para a realização das atividades, os alunos foram distribuídos em grupos. Na primeira etapa da oficina, além dos objetivos de reconhecer os fractais e discutir suas propriedades, buscou-se aliar as construções geométricas, resgatando o ensino de Desenho Geométrico, ausente no ensino. Na elaboração das atividades, para a construção de fractais utilizou-se como materiais: folhas de papel A4, compasso, conjunto de lápis de cor, papel cartão, tesoura, régua, jogos de esquadros.

A segunda etapa, realizada no laboratório de informática da escola, teve como objetivos reconhecer e manipular Fractais Aleatórios, utilizou-se para isso o *software Fractal Forge.*

No terceiro momento, para avaliação da aprendizagem foi realizada uma exposição e apresentação dos fractais construídos pelos alunos.

RESULTADOS

Neste artigo, os resultados apresentados contemplam as análises e discussões mais relevantes da pesquisa de mestrado. Por questões éticas atentou-se para o cuidado com a preservação da identidade dos alunos, sujeitos da pesquisa, identificando-os com A1, A2, A3, e assim sucessivamente.

Primeiro Momento – pré-teste

Na introdução do pré-teste foram elaboradas questões visando construir um perfil da turma e também investigar sobre a vida escolar dos alunos e sua relação com a Matemática.

> Conhecer o aluno, saber suas aspirações, seus anseios e medos ajudam o professor a compreender as suas dificuldades durante o processo de ensino e aprendizagem (RIBAS, 2001, p. 29).

Nesse sentido, as questões propostas relacionadas a aspectos pessoais e envolvendo a disciplina de Matemática foram: Qual a sua idade? Você se considera um bom aluno em Matemática? Você já reprovou alguma série em Matemática? Você acha importante saber Matemática? Justifique sua resposta. Você trabalha durante o dia?

Verificou-se a partir das análises das respostas, que a maioria dos alunos que responderam ao questionário vêm para o colégio após um dia de trabalho, que já reprovaram em alguma série, e por isso estão fora da faixa etária para a 1ª série do Ensino Médio. Nesse sentido,

> é necessário que o professor seja um mediador do conhecimento, que atenda à diversidade dos alunos, que busque novas metodologias e estratégias de ensino, visando integrar o aluno (RIBAS, 2001, p. 23).

Com relação ao domínio dos conhecimentos geométricos na análise das respostas dos alunos às questões do pré-teste, observou-se que nas questões em que a imagem facilitava a compreensão, as respostas foram mais positivas. Isso confirma a importância da visualização, da representação concreta para a aprendizagem dos conceitos geométricos. Nesse sentido, é necessário que o professor em sua prática pedagógica elabore atividades que envolvam diferentes representações do mesmo conteúdo, utilizando-se da representação da linguagem, a representação por meio de imagem e a representação algébrica. A compreensão do conceito é facilitada quando o aluno observa o mesmo conteúdo em diferentes representações.

Na análise, percebeu-se, nas questões em que houve uma representação visual da figura, que o número de acertos às questões foi bem maior. Nesse sentido, fica evidente a importância do trabalho com o conteúdo de Geometria estar relacionado com a representação visual e utilização de material concreto integrado a parte teórica.

Em relatos orais, durante a realização do questionário, foi possível verificar os erros conceituais geométricos dos alunos, como é relatado pelos alunos A6 e A7.

> *"Pirâmide é um triângulo"* (Aluno, A6); *"quadrangular é um triângulo de quatro lados"* (Aluno, A7).

A partir da análise do pré-teste, também foi possível verificar que mesmo os alunos tendo passado por oito ou nove anos de escolaridade em que o ensino de geometria está presente, apresentaram dificuldades nos conceitos geométricos básicos. A partir das respostas no pré-teste, constatou-se que eles apenas "reconhecem ou reproduzem figuras através das formas e não pelas propriedades" (LORENZATO, 1995).

Segundo Momento – Geometria dos Fractais

Para o desenvolvimento da oficina "Conhecendo a Geometria Fractal", aplicamos aos alunos oito atividades que buscavam aliar conceitos de Geometria Euclidiana, a partir das construções geométricas e a compreensão dos conceitos de Geometria Fractal.

Com o auxílio do multimídia, recurso tecnológico que alia som e imagem, fator que facilita a abordagem da Geometria Fractal, tendo em vista a variedade de figuras, iniciou-se a oficina com a apresentação das atividades que seriam realizadas pelos alunos.

Para a primeira atividade, foi feita a construção de um quebra-cabeça de uma figura fractal, cujo objetivo foi de despertar interesse motivando o aluno para o assunto. Foi distribuído para cada equipe um envelope contendo um quebra-cabeça com uma figura fractal. Por ser uma atividade comum para os alunos, o quebra-cabeça foi montado sem dificuldade, após a construção, oralmente, os alunos responderam a duas questões: Quem conhece essas figuras? Qual a relação destas figuras com a Matemática? Na primeira pergunta, apenas uma aluna relatou que já havia participado de uma oficina sobre fractais no ano anterior. Mas, a relação dessas figuras com a Matemática, nenhum dos alunos tinha conhecimento.

A segunda atividade consistia na apresentação de figuras do nosso cotidiano a fim de que os alunos utilizassem formas geométricas para representá-las.

O objetivo desta atividade foi fazer com que o aluno percebesse diversas formas geométricas existentes nos objetos do nosso dia a dia. As figuras apresentadas foram: tronco de uma árvore, o sol, uma casa, montanhas, nuvens, raios, couve-flor, e uma concha de molusco (*nautilus*). Em cada figura apresentada, os alunos relatavam oralmente qual figura geométrica poderia ser utilizada para representá-la. Nas três primeiras figuras apresentadas, os alunos responderam sem dificuldades, no entanto, as demais geraram uma discussão, pois alguns diziam que uma montanha poderia ser uma pirâmide, outros um cone, a couve-flor poderia ser uma esfera. Neste momento, foi introduzido o conceito de fractal, colocando que essa geometria surgiu da dificuldade que os matemáticos tinham, desde a antiguidade, de representar alguns objetos irregulares da natureza.

No sentido de sistematizar os conceitos de Geometria Fractal, elaboramos uma apresentação em *Power Point*, destacando: a história da origem dos fractais; a biografia de Benoit Mandelbrot; as principais características da Geometria Fractal. Com a apresentação desta atividade, foi possível perceber o interesse dos alunos pelo tema, principalmente pelo aspecto visual dos fractais.

As atividades seguintes constaram da construção de fractais geométricos, Curva de Koch, Triângulo de Sierpinski, Tapete de Sierpinski e um Cartão Fractal em dobradura. As etapas para construção de cada fractal foram apresentadas no multimídia e após a construção de cada fractal, os alunos relatavam por escrito, questões postadas para discussão, as quais serviram para análise.

Durante as construções, o fator mais relevante observado foi a dificuldade dos alunos nas construções geométricas, principalmente no manuseio dos materiais, transferidor, compasso e até mesmo a régua, pois nesta etapa as construções foram realizadas manualmente.

As questões elaboradas para discussão tinham o objetivo de reforçar e verificar a compreensão do aluno em relação às características dos fractais construídos. Após a construção do Fractal Curva de Koch, as questões para discussão foram: Neste fractal, qual operação que consideramos a iteração? O que significa autossimilaridade? Em relação ao Fractal Triângulo de Sierpinski, os alunos responderam as questões: Quantos triângulos existem em cada nível? Utilize a notação de potência para representar esta quantidade. (lembre-se que o triângulo central não é considerado). Qual a relação entre a quantidade de triângulos de cada nível?

Na análise dos registros escritos destas questões, percebeu-se que os alunos entenderam as características básicas dos fractais, sendo que a maioria relatou que a Curva de Koch é um fractal, pois repete sucessivamente a operação de dividir em três partes iguais e construir um triângulo equilátero na parte central. Como relata a aluna: *"fazemos sempre a mesma coisa, dividimos em três e construímos um triângulo no centro"* (Aluno, A9). No entanto, nas questões, encontrar a medida do comprimento da Curva de Koch nos diferentes níveis e observar a regularidade nesse comprimento, foi necessária a intervenção do professor na construção da tabela, e mesmo com a tabela construída, os alunos apenas conseguiram completá-la, fazendo contagem no fractal construído. Para a generalização dos dados solicitados na tabela, foi necessário o professor intervir,

Tabela 1 - A relação das iterações no Triângulo de Sierpinski e o cálculo de potência

Nível	Quantidade de triângulo	Potência equivalente
0	1	3^0
1ª	3	3^1
2ª	9	3^2
3ª	27	3^3
4ª	81	3^4
nª	3^n	3^n

Fonte: autoria própria.

auxiliando na observação da regularidade.

Em discussão oral, professor-aluno construíram a tabela, chegando à generalização e algebrização. Porém, no momento da sua elaboração foi necessário retomar com os alunos conteúdos como: operações, números e álgebra.

No segundo dia de oficina, iniciamos com uma retomada da atividade do encontro anterior, a construção do Floco de Neve de Koch, pois no referido encontro não houve tempo para as discussões. Assim, foram postadas no multimídia questões com o objetivo de retomar o conteúdo e também verificar se os alunos haviam assimilado as principais características dos fractais. As questões apresentadas foram: O que são fractais? Quais as suas principais características?

Os alunos responderam oralmente, e a análise foi realizada a partir da gravação feita pelo professor.

Ao questionar os alunos sobre o que são fractais e quais as suas características, obtiveram-se diferentes respostas relacionadas, a seguir:

- "Fractais são figuras geométricas infinitas" (Aluno, A1). - "Fractais são figuras que se repetem indefinidamente" (Aluno, A5). - "Fractais são figuras que o pedaço se parece com o inteiro" (Aluno, A4). – "A característica dos fractais é que cada pedaço é igual ao inteiro" (Aluno, A2).

Nota-se nas falas dos alunos que o conceito de fractal ainda se encontrava no senso comum, apesar do professor-pesquisador, na aula anterior, ter apresentado a definição e até construído alguns deles.

> O conceito é construído nas diversas situações de aprendizagem mediadas pelos instrumentos, através da manipulação do objeto geométrico nas suas diferentes representações (NEVES, 2008, p. 60).

Nesse sentido, as próximas atividades visaram reforçar a definição de fractais e compreensão das suas principais características: construção do Triângulo e do Tapete de Sierpinski e construção do Cartão Fractal.

Com estas três construções de fractais

encerrou-se o terceiro encontro. Na realização dessas atividades, além de reforçar as características dos fractais, também foi possível retomar as construções geométricas com a utilização do material apropriado; como construir um quadrado; a utilização do transferidor, do jogo de esquadros e até do próprio compasso.

Neste aspecto, ficou evidente a dificuldade dos alunos em construções geométricas, principalmente no manejo dos materiais. Nos relatos orais, durante a realização da atividade, percebeu-se que a maioria nunca teve contato com estes materiais, como pode-se observar na fala do aluno, *"profª. fica muito fácil fazer um quadrado assim"* (Aluno, A13). Aluno referindo a construção do quadrado utilizando o jogo de esquadros. *"Pra falar a verdade, eu nunca usei um transferidor"* (Aluno, A14).

A dificuldade maior que os alunos apresentaram foi na parte de cálculos e generalizações, pois nas construções das tabelas isso ficou evidente.

Essas atividades oportunizaram a verificação de que muitas vezes o professor não explora todos os aspectos do conteúdo. Os alunos sabiam calcular o valor da potência, multiplicando a base tantas vezes o algarismo do expoente, aplicar a definição de potenciação, no entanto, realizar a operação inversa, quando dado o valor da potência, não conseguiam encontrar o valor em forma de potência.

Desta forma, com as atividades realizadas, além de oportunizar ao aluno realizar tarefas num contexto de geometria fractal, foi possível relacionar os conteúdos: números, álgebra e geometria, seguindo a orientação do documento das DCE do Paraná, as quais indicam a realização de um trabalho integrado entre os conteúdos.

Terceiro Momento - Explorações de Fractais Aleatórios

A segunda etapa da oficina, que consistiu na manipulação de fractais, construídos a partir de equações matemáticas, foi desenvolvida no laboratório de informática da escola. Nesta etapa, utilizou-se o *software Fractal Forge.*

Fractal Forge é um *software* de código aberto, distribuído por GNU (*General Public License*), portanto é um *software* livre, ou seja, que pode ser obtido gratuitamente. Na figura 8 apresenta-se a página inicial deste *software*:

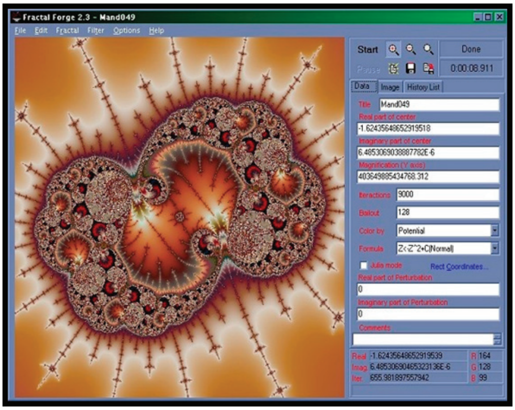


Figura 8 - Página inicial do *Fractal Forge.*
Fonte: Fractovia (1996**).**

Para esta atividade, foi necessária a instalação nos computadores do laboratório do *software Fractal Forge* e também a elaboração de um tutorial com a sequência de atividades que seriam desenvolvidas.

Tendo em vista que este aplicativo permite a visualização de fractais, ampliação e redução das figuras, alteração das iterações e alteração das cores, inicialmente foi realizado um reconhecimento do *software*, explorando cada função. Na sequência, cada dupla de alunos escolheu um fractal e realizou todas as funções permitidas no *software*.

Esta atividade possibilitou aos alunos perceber a importância e a função do computador na aprendizagem de conteúdos, o que, na maioria das vezes, para muitos é utilizado apenas para diversão. Quando questionados sobre a importância da utilização do *software* para a visualização e manipulação dos Fractais, os alunos relataram que com o *software* ficou mais fácil compreender o que significava fractais. Eles relataram que nos desenhos realizados em sala de aula *"não era possível realizar mil iterações"* (Aluno, A5). *"Agora eu entendo como essas figuras se formam"* (Aluno, A9).

Como conclusão das atividades, foi realizada, em sala de aula, uma exposição dos fractais construídos pelos alunos. Para a exposição, foi solicitado a cada aluno que construísse um fractal utilizando qualquer tipo de material e apresentasse aos demais colegas, destacando suas principais características e por que era considerado um fractal. A exposição foi realizada na própria sala de aula, contou com a participação da Equipe Pedagógica do colégio e algumas turmas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta pesquisa, objetivou-se analisar se diferentes atividades de ensino permitem aos alunos compreenderem a existência e a aplicação da Geometria Fractal.

Neste trabalho, buscou-se desenvolver um ensino integrado, envolvendo os conceitos de Geometria Euclidiana e Geometria Fractal, tendo em vista a orientação dos documentos que indicam a inserção de outras geometrias, além da Euclidiana, no ensino da Educação Básica.

A participação do professor como mediador para a efetivação da construção dos conceitos foi fundamental, pois a passagem do concreto para a formação do pensamento matemático se efetiva com a mediação do professor.

Apesar das dificuldades apresentadas pelos alunos, nos conceitos básicos de geometria, principalmente no que se refere às características das figuras geométricas, diferenças entre quadrados e retângulos, classificação de triângulos, em relação à assimilação dos conceitos de Geometria Fractal tratados foram positivos; houve efetivamente a apropriação dos conceitos, como foi verificado nas discussões dos momentos da aplicação das atividades.

As aulas no Laboratório de Informática, a utilização do computador como ferramenta de aprendizagem possibilitaram aos alunos a verificação do uso pedagógico desta ferramenta. Alguns alunos relataram que em casa tinham visitado o site utilizado na aula para rever os fractais. Com relação à exploração e manipulação de Fractais utilizando-se o *software Fractal Forge,* percebeu-se que o mesmo facilitou o entendimento das características dos fractais, além de servir como elemento motivador para os alunos.

Dessa maneira, conclui-se que o uso de atividades diversificadas, no ensino de Geometria quando aliado a uma metodologia adequada, possibilita a participação ativa dos alunos à aprendizagem, como verificado nos relatos dos alunos. Percebeu-se também uma melhora acentuada na frequência dos alunos nos encontros durante o desenvolvimento do trabalho, o que normalmente não acontece em cursos no período noturno.

Ainda na análise dos resultados, constatou-se que na abordagem de conceitos geométricos, a visualização e a abstração são facilitadas quando os alunos manuseiam e constroem as figuras geométricas, o concreto facilitando a compreensão.

A sugestão de aplicar a Geometria Fractal aliada aos conceitos de Geometria Euclidiana se faz pertinente pelas inúmeras possibilidades de contextualização, pois as formas fractais estão presentes na natureza e permitem ao professor promover momentos de investigação matemática.

REFERÊNCIAS

ALVES, C. M. F. S. J. **Fractais:** conceitos básicos, representações gráficas e aplicações ao ensino universitário. Dissertação (Mestrado em Matemática para o Ensino) - Universidade de Lisboa, Lisboa, 2007.

BARBOSA, R. M. **Descobrindo a Geometria Fractal para sala de aula.** Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

BICUDO, M. A. V. BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Orgs.). Pesquisa Qualitativa e Pesquisa Quantitativa segundo a abordagem fenomenológica. In: **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática.** 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Matemática. Brasília: MEC/SEF, 2001.

______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Guia de livros didáticos - PNLD - 2008** - 5ª a 8ª séries. Brasília, MEC/SEF, vol. 3, 2007.

CAPRA, F. **A teia da vida:** uma nova compreensão científica dos sistemas vivos. São Paulo: Pensamento-Cultrix, 1996.

CARVALHO, H. C. **Geometria Fractal:** perspectivas e possibilidades no ensino de matemática. 2005. 101 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Curso de Pós-Graduação em Ensino em Ciência e Matemática, Universidade Federal do Pará, Belém, 2005.

COM CIÊNCIA. Fractais uma nova Visão da Natureza. Disponível em: <http://www.ceticismoaberto.com/ciencia/2139/fractais-uma-nova-viso-da-natureza>. 2008. Acesso em: 10 nov. 2011.

CRUZ, Donizete Gonçalves. **Conceitos de Geometria não - Euclidianas - Hiperbólica e Elíptica a serem abordados nas séries do ensino Médio**. Disponível em: <www.diaadiaeducacao.pr.gov.br>. Acesso em: 20 out. 2008.

FAINGUELERNT, Estela Kaufman. **Educação Matemática**: Representação e Construção em Geometria. Porto Alegre: Artmed, 1999.

JANOS, M. **Geometria Fractal.** Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2008.

LORENZATO, S. **Por que não ensinar Geometria**? Educação Matemática em Revista, v. 3, 1º semestre, 1995.

MENEZES, M. S.; CUNHA JR, H. A. **Formas geométricas e estruturas fractais na cultura africana e afrodescendentes** In: DE PRETO A AFRODESCENDENTE: trajetos de pesquisa sobre o negro, cultura negra e relações étnico-raciais no Brasil. Ed. São Carlos: EduFSCar Editora da Universidade Federal de São Carlos, 2003.

MOREIRA, H.; CALEFFE, L. G. **Metodologia da pesquisa para o professor pesquisador.** 2. ed. Rio de Janeiro: Lamparina, 2008.

NEVES, R. S. P. Aprender e ensinar Geometria: um desafio permanente. In: Programa de Gestão da Aprendizagem Escolar - Gestar II. **Matemática:** Caderno de Teoria e Prática 3 - matemática nas formas geométricas e na ecologia. Brasília: MEC/SEB, 2008.

PARANÁ. **Diretrizes Curriculares Estaduais de Matemática**, SEED, Curitiba, 2008.

PAVANELLO, R. M. **O abandono do ensino de geometria no Brasil:** causas e consequências. Zetetiké, Campinas, n.1, p. 19-49, 1993.

RIBAS, M. H **Construindo a competência:** processo de formação de professores. São Paulo: Olho D'Água, 2001.

SOUZA, J. R. **Novo olhar matemática**: ensino médio. São Paulo: FTD, 2010. (Coleção novo olhar, v. 1).

TRATCH, C. **Investigando matematicamente alguns fractais por meio do software Geogebra**. União da Vitória. 2008. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portal/pde/>. Acesso em: 4 jan. 2010.

RECEBIDO EM: 30/05/2012.
APROVADO EM: 20/10/2012.