VIDYA, v. 32, n. 2, p.97-111, jul./dez., 2012 - Santa Maria, 2012. **ISSN** 0104-270 X

EXPLORANDO MODELOS MATEMÁTICOS TRIGONOMÉTRICOS A PARTIR DE *APPLETS*

EXPLORING TRIGONOMETRIC MATHEMATICAL MODELS FROM APPLETS

MARLIZETE FRANCO DA SILVA*
MARIA CLARA REZENDE FROTA**

RESUMO

Apresentamos os resultados de uma pesquisa que investigou as contribuições de uma sequência de ensino de trigonometria, com ênfase na modelagem matemática e na utilização de recursos tecnológicos. A sequência de ensino foi elaborada tendo como referencial metodológico a engenharia didática e desenvolvida com duas turmas de 2ª série do Ensino Médio de uma escola estadual do interior de Minas Gerais. Neste artigo, focalizamos a análise das atividades em que os alunos utilizaram aplicativos dinâmicos (a*pplets*), para explorar alguns modelos matemáticos da trigonometria. A análise dos registros escritos evidenciou o envolvimento dos estudantes na execução das atividades. O uso dos *applets* na exploração do círculo trigonométrico e no estudo das representações gráficas das funções trigonométricas viabilizou a exploração visual e a integração da álgebra e da geometria para favorecer a aprendizagem de alguns conteúdos de trigonometria.

Palavras-chave: *Applets* no Estudo de Trigonometria. Investigações Matemáticas. Modelagem Matemática. Modelos da Trigonometria.

ABSTRACT

The article presents the results of an investigation on the contributions of a sequence of trigonometry teaching with emphasis on mathematical modeling and the use of technological resources. The teaching sequence was drawn up using didactic engineering. It was developed with two classes of the second year of a state high school in Minas Gerais. It analyzes some activities in which the students used some dynamic app(applets) to explore some mathematical models of trigonometry. It was noticed the involvement of the students in the implementation of the activities. The use of applets in the exploration of the trigonometric circle and the study of graphic representations of trigonometric functions enabled the visual exploration and the integration of algebra and geometry to favor the learning of some content on trigonometry.

Keywords: *Applets. Trigonometry. Mathematical Investigations. Mathematical Modeling. Trigonometry Models.*

* Escola Estadual “Frei Marcelino de Milão”. E-mail: marlizetefranco@hotmail.com
** PUC-Minas. E-mail: mclarafrota@gmail.com

INTRODUÇÃO

O ensino da Trigonometria apresenta desafios decorrentes do alto nível de abstração exigido na aprendizagem das funções trigonométricas e suas representações no círculo e no plano cartesiano e da defasagem de conhecimentos geométricos, geralmente apresentada pelos estudantes (OLIVEIRA, 2006).

Na sala de aula, muitas vezes os conceitos matemáticos são vistos de forma fragmentada, ainda que aprofundada, o que não garante que os alunos atribuam um significado aos conceitos estudados. Entre os conceitos trabalhados de forma fragmentada, podemos destacar aqueles relacionados à Trigonometria, principalmente ao se abordar a transição do triângulo retângulo para o círculo trigonométrico e deste, para o plano cartesiano. Além disso, a extensão do conteúdo e uma abordagem com foco nos procedimentos e cálculos algébricos impedem que se atendam às recomendações dos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (BRASIL, 1999) de que o ensino da trigonometria deve enfatizar as aplicações desse conteúdo, objetivando a resolução de problemas que envolvam medições, cálculo de distâncias inacessíveis e a construção de modelos relativos a fenômenos periódicos.

Desenvolvemos uma pesquisa que investigou as contribuições de uma proposta para o ensino e aprendizagem de trigonometria que possibilitasse aos alunos: 1) vivenciar experiências de modelagem; 2) utilizar recursos computacionais para explorar alguns modelos matemáticos da trigonometria.

Neste artigo, focalizamos as atividades desenvolvidas que objetivaram o estudo de modelos matemáticos da trigonometria, utilizando aplicativos dinâmicos (*applets*), uma das metas pretendidas com a sequência de ensino desenvolvida (SILVA, 2011).

Modelos matemáticos

Um modelo matemático pode ser entendido como uma representação simplificada de uma realidade, fruto da abstração dessa realidade. Para Franchi, "um modelo matemático pode ser explicado como uma representação abstrata de uma parte do mundo real, através de estruturas e conceitos matemáticos" (FRANCHI, 2007, p.181).

A característica de abstração, própria de um modelo matemático, pode dificultar sua compreensão. Atribuir significado, por exemplo, ao modelo que denominamos **círculo trigonométrico,** significa compreender que esse modelo consiste na circunferência orientada, de raio unitário, tendo o sentido anti-horário como sentido positivo, com centro no ponto O=(0,0), origem do sistema cartesiano. O ponto A=(1, 0), ponto de interseção entre a circunferência e o eixo x é a origem de todos os arcos, do qual se parte, podendo percorrer o círculo no sentido positivo ou negativo. A representação gráfica da figura 1 pode contribuir para a compreensão desse modelo, permitindo que se observe que os eixos x e y dividem o círculo trigonométrico em quatro partes iguais, que são os quadrantes.

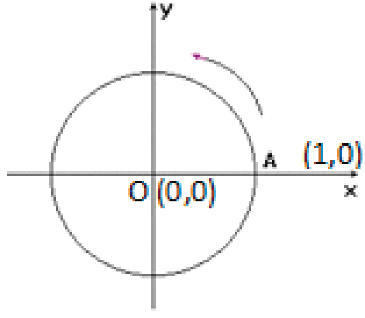

Figura 1 - Círculo trigonométrico orientado.
Fonte: SILVA, 2011.

Apesar de o papel inicial da Trigonometria estar associado à resolução de problemas relacionados a triângulos, se observarmos a relação fundamental $\cos^2\alpha+\mathrm{sen}^2\alpha=1$, percebemos que ela sugere que, para todo ângulo α, os números $\cos\alpha$ e $\mathrm{sen}\alpha$ são coordenadas de um ponto de uma circunferência de raio 1 e centro na origem de R^2 (LIMA et al., 2006).

Para definirmos as funções seno e cosseno, sen: $R\rightarrow R$ e cos: $R\rightarrow R$, devemos associar a cada número real t um ângulo e considerar o seno e o cosseno do referido ângulo, de modo que o número t corresponde à medida do ângulo (LIMA et al., 2006).

Uma das metas do ensino de Trigonometria é que o aluno saiba transitar desde o Teorema de Pitágoras, das razões trigonométricas no triângulo retângulo, até interpretações no círculo trigonométrico. Os vários modelos matemáticos podem então ser compreendidos de forma integrada; noções estudadas no Ensino Fundamental são retomadas e ampliadas no Ensino Médio. Entretanto, a integração de noções e modelos matemáticos não ocorre facilmente; precisa ser construída e antes de tudo pretendida.

Consideramos que explorar e atribuir significado a um modelo matemático pode ser entendido na perspectiva educacional de modelagem matemática (didática e conceitual), destacada por Kaiser e Sriraman (2006). Nessa perspectiva, a atividade de modelagem matemática estrutura e promove os processos de aprendizagem e possibilita a introdução e desenvolvimento de conceitos matemáticos. Nessa perspectiva, esperamos que os alunos se apropriem dos modelos matemáticos, utilizando-os para construir e estruturar conceitos matemáticos, de forma a desenvolverem uma compreensão integrada de diferentes modelos matemáticos.

De modo geral, na sala de aula, os alunos são pouco incentivados a explorar um modelo matemático. Não é comum que se proponha aos alunos que descrevam um modelo matemático. Se, por exemplo, consideramos o modelo $y=2x+4$, uma série de tarefas poderia ser proposta no sentido de que os alunos se apropriem do modelo, solicitando a eles: expressar com palavras o que diz o modelo; representá-lo graficamente; dar exemplos de problemas que podem ser modelados pela equação dada; explicar o que ocorreria se no modelo alterássemos o valor do coeficiente angular ou do coeficiente linear.

O exemplo citado pretende destacar algumas iniciativas que podem ser relevantes no processo de aprender a modelar, a partir da ação de apropriação de um modelo matemático. Nessa mesma direção, as atividades que compuseram a proposta de ensino (SILVA, 2011) pretenderam que os alunos explorassem modelos como, por exemplo, $cos^2\alpha+sen^2\alpha=1$, para se apropriarem do mesmo e ainda, que as explorações feitas pudessem levá-los a construir outros modelos, como $sen(\alpha+2\varpi) =sen\alpha$, quando, por exemplo, investigassem a periodicidade da função seno.

Entendemos que no processo de atribuir significado e apropriar-se de um modelo matemático, o aluno desenvolve um conjunto de ações na linha apontada por Almeida e Ferruzzi (2009), entre elas: buscar informações para identificar quais as variáveis presentes no modelo, levantar hipóteses sobre sua validade e aplicação, atribuir significado a uma representação matemática, no caso o próprio modelo. Não se trata em um primeiro momento de criar um modelo, mas de compreendê-lo, identificando situações que possam ser por ele representadas e resolvidas, transformando o modelo e analisando possibilidades de utilização do mesmo. Através da atividade de explorar os modelos, o aluno pode ser incentivado a sistematizar propriedades observadas, estabelecendo novos modelos.

Almeida e Ferruzi (2009), ao discutirem uma aproximação socioepistemológica para a modelagem matemática, consideram que ela é uma prática social investigativa. De fato, a proposta de explorar para atribuir significado a um modelo matemático pode ser considerada como uma atividade de investigação matemática, na perspectiva de Ponte, Brocardo e Oliveira (2006), sendo esse o foco do trabalho aqui relatado, desenvolvido a partir do uso de aplicativos dinâmicos (*applets*). Pretendemos que as investigações sobre os modelos da Trigonometria decorressem de um processo de interações dos alunos com os *applets,* dos alunos entre si e com o professor, buscando apropriar-se do objeto matemático em estudo.

Possibilidades do uso de recursos tecnológicos na aprendizagem de trigonometria

Não é uma tarefa fácil, em um ambiente tradicional de ensino, tendo apenas como recursos o quadro e o giz, relacionar as múltiplas representações matemáticas de um conceito. Talvez resida nesse ponto uma das dificuldades para o ensino e a aprendizagem da Trigonometria e seus modelos: interpretar e relacionar as representações das funções trigonométricas, no triângulo retângulo, no círculo trigonométrico e no plano cartesiano, integrando a álgebra e a geometria.

A utilização de recursos tecnológicos, que possibilita a visualização e a movimentação de representações gráficas de objetos matemáticos, mostra-se como uma das abordagens possíveis do que Gravina e Santarosa (1998) denominam de "concretização mental", que, segundo as autoras, daria suporte à construção de conceitos matemáticos complexos e abstratos.

O uso de recursos computacionais pode apresentar também um componente motivacional e, além disso, disponibilizar rapidamente os resultados para as tarefas propostas, possibilitando que um tempo maior seja dedicado a investigar, testar novas hipóteses ou validar respostas (PIETROBON; COSTA; SOUZA, 2010; COSTA, 1997), perspectiva adotada na pesquisa que desenvolvemos.

Um ambiente computacional pode favorecer abordagens que relacionem as diversas representações matemáticas, possibilitando um conhecimento abrangente acerca de seu significado, à medida que permite a visualização e a vinculação de diversas representações de um mesmo conceito matemático (BORBA; PENTEADO, 2001; COSTA, 1997).

Os *softwares* de Geometria Dinâmica apresentam grandes possibilidades para o ensino, particularmente, da Matemática. Como afirmam Richit e Maltempi (2010), as características dinâmicas dessas ferramentas favorecem experimentações em Matemática. Essas ferramentas oferecem ao aluno possibilidades de, por exemplo, manipular as formas geométricas para observar e estabelecer relações entre os objetos matemáticos em estudo (SANTOS, 2008).

Ao manipular a imagem de um objeto matemático, o aluno pode visualizar as mudanças que ocorrem, relacionando aspectos numéricos, geométricos e algébricos do objeto em estudo, o que amplia sua compreensão. A atenção do aluno pode ser focalizada em observar as relações presentes no objeto matemático. Nesse sentido, os recursos computacionais são importantes para o desenvolvimento de uma proposta de ensino e de aprendizagem de Matemática com um foco na atividade matemática central de investigar.

Em nosso trabalho, optamos pelo uso do

software GeoGebra, considerando-se que é um aplicativo gratuito, que não demanda do professor, ou do aluno, conhecimentos de programação para utilizá-lo. É prático e de fácil utilização, permitindo a manipulação dos objetos geométricos para melhor entendimento dos conceitos (FERREIRA; CARVALHO; BECKER, 2010). Na pesquisa, seu uso objetivou possibilitar a articulação entre os aspectos algébrico, geométrico e gráfico, no estudo dos conceitos trigonométricos. A possibilidade de construir com facilidade aplicativos dinâmicos (*applet*s), que podem ser acessados em computadores que não tenham o Geogebra instalado, mas que disponham de um navegador de Internet com Java instalado, característica ressaltada por Ferreira, Carvalho e Becker (2010), foi determinante para a escolha do *software.*

Os *applets* permitem investigar, levantar hipóteses, testar conjecturas e auxiliar na construção de conhecimentos (BARCELOS, 2009; SANTOS, 2008). No ensino de trigonometria, os *applets* podem ser instrumentos valiosos, como mostram os resultados de um estudo inicial conduzido por Silva e Frota (2010) e que fundamentou o desenvolvimento da sequência de atividades aqui apresentadas e discutidas.

METODOLOGIA

A pesquisa desenvolvida foi inspirada na Engenharia Didática, proposta por Artigue (1988), compreendendo as etapas de: análises prévias; concepção e análise a priori de experiência didático-pedagógica; implementação da experiência; análise a posteriori e validação da experiência.

Na pesquisa realizada, na fase de análises prévias, conduzimos estudos para investigar como o tema trigonometria é abordado nos livros didáticos e em pesquisas desenvolvidas sobre o ensino desse conteúdo, analisamos as variáveis relativas à realidade da escola e dos alunos, o número de alunos em sala e o número de aulas disponíveis para o ensino desse conteúdo.

Na fase de concepções e análise *a priori,* elaboramos a sequência didática, que compreende, entre outras, atividades envolvendo recursos computacionais, aqui relatadas, estabelecendo os objetivos pretendidos e alguns resultados esperados.

Os *applets* utilizados foram elaborados pela primeira autora do artigo a partir do GeoGebra e foram disponibilizados em um site, para que os alunos pudessem acessá-los por meio da internet. Como a sala de informática da escola dispunha de apenas 12 computadores conectados à internet, foi necessário dividir as turmas em dois grupos, sendo que o primeiro deles, a princípio, trabalharia no horário de aula e o segundo em horários extraclasse. Problemas na rede elétrica da escola, que não suportou os computadores ligados no período de aula (noturno), inviabilizaram a participação do primeiro grupo, que trabalhou posteriormente em casa, sem a supervisão da professora e pesquisadora.

Para fins de análise, as atividades foram agrupadas e os dados analisados dizem respeito a registros dos alunos do segundo grupo, que desenvolveu as atividades no laboratório de informática, em outro turno, fora do horário normal de aulas. Participaram das atividades alunos de duas turmas de 2ª série do Ensino Médio de uma escola estadual do interior de Minas Gerais, aqui denominadas de 2º A e 2º B. Foram formadas 20 duplas para o desenvolvimento de experimentações e investigações no círculo trigonométrico, com o objetivo de compreender o modelo e posteriormente associar esse modelo à representação gráfica de funções trigonométricas.

Os instrumentos de coleta de dados consistiram principalmente: nos registros escritos feitos pelas duplas de alunos das atividades realizadas, entregues à professora ao final de cada aula; das respostas a um questionário de avaliação das atividades; das anotações e observações feitas pela própria professora no momento de socialização e discussão em sala dos resultados obtidos pelos alunos. Todo esse conjunto de dados foi analisado (análise *a posteriori*) de forma a identificar o processo vivenciado pelos alunos ao desenvolverem investigações sobre o modelo do círculo trigonométrico e os modelos de representação gráfica das funções seno, cosseno e tangente. A meta era que os alunos explorassem os modelos, atribuindo significado a eles, de modo que se apropriassem dos mesmos e integrassem diferentes modelos. Esse foi foco da análise dos resultados aqui apresentada.

Principais descobertas dos alunos

Dentre as atividades que integram a sequência didática desenvolvida, selecionamos para discussão, neste artigo, duas atividades (Atividades 5 e 6), dentre as três que utilizaram recursos computacionais no estudo de trigonometria. Além das atividades conduzidas no laboratório de informática, os alunos desenvolviam em casa atividades complementares, sem o uso de recursos computacionais, com o objetivo de fixar conceitos estudados, ou mesmo ir além do trabalho desenvolvido com *os applets.* Essas atividades complementares não serão aqui analisadas.

A Atividade 5 explorou o seno, cosseno e tangente no círculo trigonométrico. Três *applets* foram disponibilizados para os alunos: um sobre a função seno, um sobre a função cosseno e um sobre a função tangente. Os alunos movimentavam com o *mouse* os pontos no círculo trigonométrico, observavam as alterações ocorridas, registrando por escrito suas observações.

A primeira tarefa da Atividade 5 propunha explorações sobre o seno no círculo trigonométrico. Ao abrir o *applet* a tela apresentada na figura 2 era exibida.

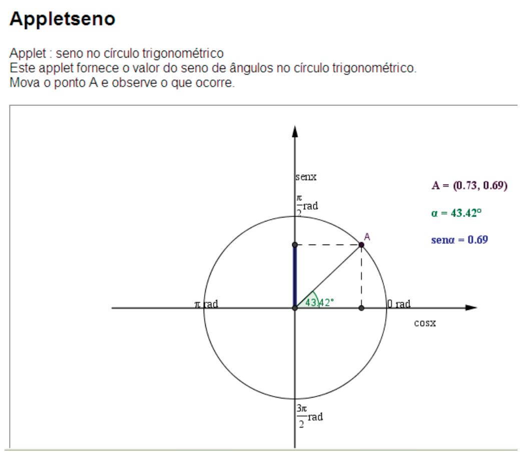

Figura 2 - *Applet* da função seno.
Fonte: SILVA, 2011.

A tarefa solicitava aos alunos que, acessando e movimentando o ponto A, escrevessem o que observavam e como variava a função seno em cada quadrante. As 20 duplas que participaram mencionaram que ao movimentar o ponto A os valores do ângulo α e do seno variavam.

As figuras 3 e 4 apresentam os registros de duas duplas. Os alunos se expressaram de formas distintas ao descrever o que observavam, apresentando frases curtas, sem se preocuparem em detalhar as observações feitas.

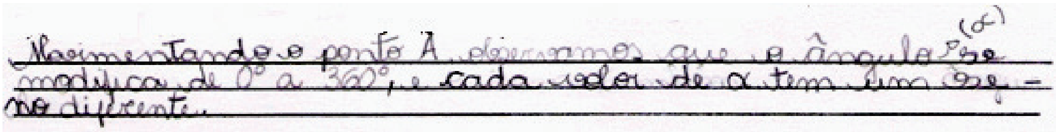
Movimentando o ponto A, dizemos que o ângulo (α) se modifica de 0° a 360°, e cada valor de α tem um seno diferente.

Figura 3 - Resposta da dupla 1, 2º A, Atividade 5, tarefa 1, letra a.
Fonte: SILVA, 2011.


A medida que você move o ponto A o ângulo muda de tamanho e consequentemente o seno também.

Figura 4 - Resposta da dupla 10, 2º B, Atividade 5, tarefa 1, letra a.
Fonte: SILVA, 2011.

As figuras 5, 6 e 7 ilustram descrições da tarefa 1, letra b, quando solicitamos que os alunos descrevessem o que ocorria com o valor do seno em cada quadrante.


No 1° e 4° quadrante aumenta e no 2° e 3° diminui

Figura 5 - Resposta da dupla 2, 2º A, Atividade 5, tarefa 1, letra b.
Fonte: SILVA, 2011.

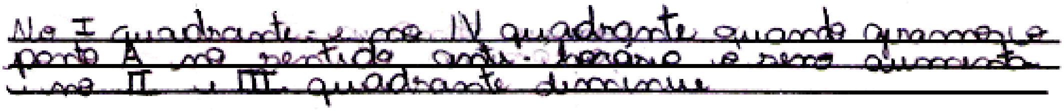
No I quadrante e no IV quadrante quando giramos o ponto A no sentido anti-horário o seno aumenta e no II e III quadrante diminui

Figura 6 - Resposta da dupla 3, 2º B, Atividade 5, tarefa 1, letra b.
Fonte: SILVA, 2011.

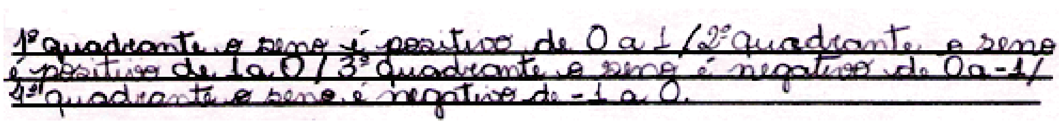
1° quadrante o seno é positivo de 0 a 1 / 2° quadrante o seno é positivo de 1 a 0 / 3° quadrante o seno é negativo de 0 a -1 / 4° quadrante o seno é negativo de -1 a 0.

Figura 7 - Resposta da dupla 1, 2º A, Atividade 5, tarefa 1, letra b.
Fonte: SILVA, 2011.

Constatamos que os alunos destacaram de várias formas o comportamento da função seno ao longo dos quadrantes; desde simplesmente informar em que quadrantes a função diminui ou aumenta (Figuras 5 e 6), até mencionar os sinais e os respectivos intervalos de variação (Figura 7). O *applet* possibilitava que efetuassem mais de uma vez a mesma operação, o que contribuía para que sistematizassem suas descobertas.

Na letra c da tarefa 1, foi solicitado aos alunos que usassem o *applet* para determinar valores de x que satisfizessem as equações: *senx=0,77*, *senx= -0,34*, *senx=0,50* e *sen x=-0,80*. Os alunos tiveram dúvidas se poderiam resolver apenas pelo método que chamaram de "tentativa e erro", consistindo em movimentar os pontos no *applet*. Quando solucionada a dúvida, afirmaram ser mais fácil resolver as atividades pelo computador do que no caderno e que seria melhor se pudessem utilizar o *applet* em casa para tirar dúvidas. Durante a resolução dessa tarefa, alguns alunos utilizaram valores com aproximações diferentes, recurso disponibilizado pelo *applet* e por isso encontraram respostas diferentes.

Das 20 duplas que realizaram a atividade, 11 apresentaram uma só resposta correta para cada equação. Apenas quatro duplas informaram duas respostas corretas para cada equação. Mesmo utilizando o *applet*, algumas duplas tiveram dificuldades em resolver as equações que envolviam valores negativos para o seno; não estava claro para eles que para um valor negativo do seno, o valor do ângulo pudesse depender do sentido de movimentação, podendo ser positivo. Para as equações que envolviam valores negativos do seno algumas respostas foram equivocadas; os alunos desconsideraram o sinal do seno, colocando como resposta ângulos do 1º e do 2º quadrantes, quando estes deveriam estar no 3º e 4º quadrantes.

Quando perguntados se seria possível encontrar mais de uma resposta correta para as equações, todas as duplas escreveram que seria possível. As justificativas variaram, evidenciando dificuldades na forma de os alunos expressarem suas ideias.


Sim. Senos I e II quadrante positivo e III e IV quadrante negativo.

Figura 8 - Resposta da dupla 3, 2º A, Atividade 5, tarefa 1, letra c_2.
Fonte: SILVA, 2011.

A dupla 3 do 2º A (Figura 10) justificou a existência de mais de uma resposta, a partir do fato que em dois quadrantes os valores do seno são positivos e em dois dos outros quadrantes os valores do seno são negativos.

Como era a primeira vez que estes alunos exploravam o círculo trigonométrico, a dupla só percebeu a possibilidade de efetuar uma volta no círculo trigonométrico. De qualquer forma, o *applet* utilizado contribuiu para que os alunos abandonassem a concepção que os problemas matemáticos, de modo geral, apresentam uma única solução.

A figura 9 ilustra a resposta da dupla 4, do 2º A. Ao movimentar o ponto A, ao longo da circunferência unitária, a dupla percebeu que era possível encontrar mais de uma resposta correta, uma vez que podíamos dar mais voltas no círculo.


Sim caso der mais de uma volta e no quadrante I e II encontramos valores iguais pois os quadrantes são positivos

Figura 9 - Resposta da dupla 4, 2º A, Atividade 5, tarefa 1, letra c_2.
Fonte: SILVA, 2011.

Mesmo cometendo alguns equívocos, não resolvendo corretamente todas as equações, fazendo algumas confusões com os valores negativos, a dupla apresentou uma conjectura interessante para seu nível de ensino e que seria mais difícil de ser constatada sem o uso do recurso computacional. O uso do recurso computacional otimiza o tempo gasto na resolução das atividades.

O aluno não se ocupa com cálculos numéricos, dispondo de mais tempo para a compreensão de propriedades e conceitos (FRANCHI, 2007; PIETROBON; COSTA; SOUZA; 2010).

A tarefa 2 referia-se à função cosseno e utilizava um *applet*, semelhante ao utilizado no estudo da função seno e, assim, optamos por não apresentar os resultados da tarefa.

A tarefa 3 envolvia a função tangente. Inicialmente os alunos deveriam identificar o eixo das tangentes, trabalhando e em seguida registrando as observações feitas ao mover um ponto ao longo da circunferência unitária.

Os alunos caracterizaram o eixo das tangentes de maneiras distintas, conforme ilustrado nas figuras 10, 11 e 12.

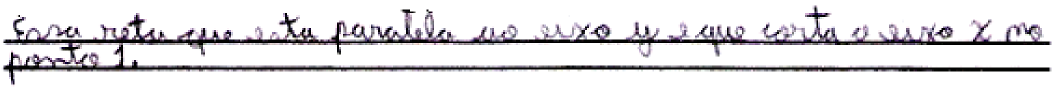

Figura 10 - Resposta da dupla 11, 2º B, Atividade 5, tarefa 3, letra a.
Fonte: SILVA, 2011.

Figura 11 - Resposta da dupla 3, 2º B, Atividade 5, tarefa 3, letra a.
Fonte: SILVA, 2011.

Figura 12 - Resposta da dupla 1, 2º A, Atividade 5, tarefa 3, letra a.
Fonte: SILVA, 2011.

Mesmo sendo a primeira vez que trabalhavam com a função tangente no círculo trigonométrico, a atividade favoreceu a investigação e a comunicação das ideias matemáticas possibilitando que os alunos conseguissem utilizar conhecimentos geométricos para caracterizar a reta tangente como uma reta paralela ao eixo dos senos, ou como uma reta paralela ou ao eixo y, passando pelo ponto (1,0). A descrição da dupla 3 do 2º B evidenciou uma iniciativa dos alunos em representar algebricamente a reta, indicando sua equação x=1, mas em buscar outras descrições, identificando a reta do ponto de vista geométrico, como sendo paralela ao eixo dos senos, embora tenha dito eixo *sen x*, demonstrando dificuldades na forma de se expressar matematicamente.

Os alunos identificaram, ao mover um ponto no círculo trigonométrico, os quadrantes em que a tangente é positiva ou negativa, analisando a variação da função em cada quadrante.

A Atividade 6 pretendeu que os alunos buscassem relacionar o movimento dos pontos no círculo trigonométrico e o traçado dos gráficos das funções seno, cosseno e tangente, à medida que se completava uma volta na circunferência trigonométrica. Investigações sobre a periodicidade das funções foram também exploradas. Para isso os alunos tiveram acesso a *applets* elaborados de forma a viabilizar essa passagem do círculo trigonométrico para a representação cartesiana das funções trigonométricas.

Ao abrir o *applet* contendo o gráfico do seno, a tela apresentada na figura 13 era exibida. Dois questionamentos foram feitos objetivando que: 1) os alunos relacionassem o movimento do ponto no círculo trigonométrico e a correspondente oscilação do ponto P, descrevendo a senoide; 2) investigassem se a função seno era periódica e qual seria esse período.

No início da atividade, os alunos sentiram dificuldades, não conseguindo descrever o que viam na tela do computador, esperando uma resposta da professora.

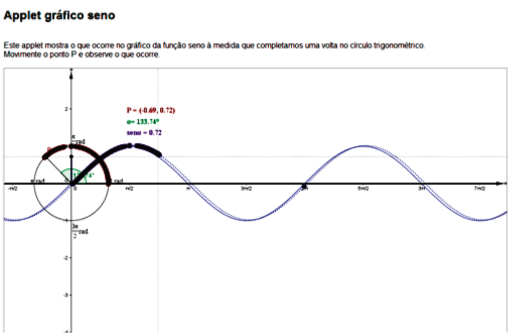

Figura 13 - *Applet* do gráfico da função seno.
Fonte: SILVA, 2011.

Passados alguns minutos de observações e questionamentos, algumas ideias começaram a surgir. As figuras 14 a 16 apresentam algumas descrições feitas pelas duplas que resolveram a atividade.

Percebemos que os alunos se empenharam, no sentido de atribuir significado ao modelo da função seno. Temos descrições buscando associar o modelo a situações com referência na realidade (Figura 14). Os alunos demonstraram a necessidade de associar o modelo do gráfico disponibilizado na tela ao de uma onda, de certa maneira abandonando o modelo abstrato com o qual lidavam. Na figura 15, percebemos que a dupla preocupou-se em relacionar os dois movimentos, do ponto no círculo trigonométrico e do ponto se deslocando para formar o gráfico da função. Outras duplas apresentaram respostas mais detalhadas, do ponto de vista matemático, mencionando mudanças de sinal, período e até mesmo o nome da curva esboçada, como na figura 16. A dupla 3, da 2ª série B, mostrou com seu registro já possuir algum tipo de informação sobre estas funções, já que foi capaz de classificar a curva como sendo uma senoide.

Figura 14 - Resposta dupla 5, 2º A, Atividade 6, tarefa 1, letra a.
Fonte: SILVA, 2011.

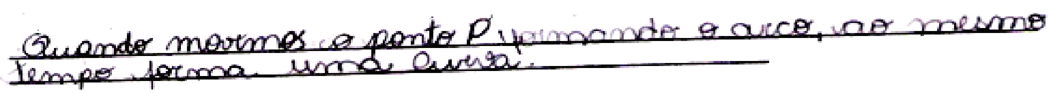

Figura 15 - Resposta dupla 1, 2º A, Atividade 6, tarefa 1, letra a.
Fonte: SILVA, 2011.

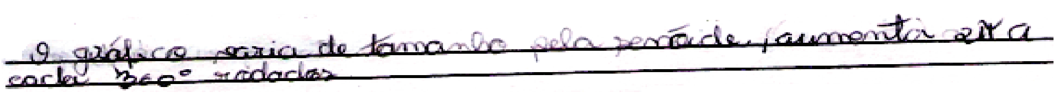

Figura 16 - Resposta dupla 3, 2º B, Atividade 6, tarefa 1, letra a.
Fonte: SILVA, 2011.

Quanto à periodicidade da função seno, todas as duplas que participaram da atividade concordaram que a função era periódica, informando quase sempre o valor que consideravam ser o período.

Na figura 17 tem-se a resposta de uma dupla que apresentou apenas uma justificativa para considerar a função como periódica, não informando o período. A resposta evidenciou a dificuldade da dupla de se expressar matematicamente, ao dizer que "os intervalos da curva se repetem".

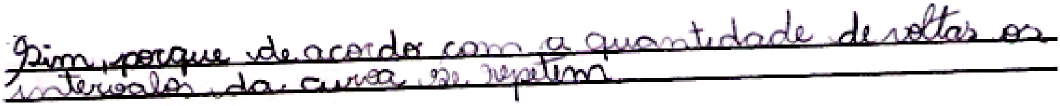
Sim, porque de acordo com a quantidade de voltas os intervalos da curva se repetem

Figura 17 - Resposta da dupla 1, 2º A, Atividade 6, tarefa 1, letra b.
Fonte: SILVA, 2011.

Esperávamos que os alunos identificassem 2ϖ como o período fundamental da função seno, mas, considerando o nível de ensino e as dificuldades apresentadas em representar matematicamente suas ideias, não esperávamos que fossem capazes, por exemplo, de descrever o que ocorria usando o modelo $sen(\alpha+2\varpi) = sen\alpha$. Isso exigiria por parte deles uma maior abstração e apropriação da linguagem matemática, por vezes, não encontrada mesmo entre alunos do Ensino Superior.

A tarefa 2 da Atividade 6 referia-se à função cosseno, os registros evidenciaram dificuldades e acertos semelhantes aos das tarefas que envolviam a função seno.

A tarefa 3 da Atividade 6 foi a que os alunos demonstraram maiores dificuldades para resolver. O fato de a função tangente possuir descontinuidades e assíntotas confundiu os alunos. Para eles o gráfico da função não poderia ter interrupções, deveria ser contínuo.

A dificuldade em lidar com a tangente se fez notar ao procedermos à análise dos registros escritos. Não sabendo como descrever o que observava, a dupla 5, do 2º A, por exemplo, descreveu o gráfico como representando uma cerâmica ilustrada, numa tentativa de associar o gráfico exibido na tela a algum modelo com referência na realidade.

A resposta da dupla 7 do 2º A, apresentada na figura 18 reflete o que mencionamos antes; a descontinuidade do desenho confundiu os alunos, tanto que afirmaram estar diante de três curvas, três gráficos ou três partes do gráfico. A forma diferente do desenho, com a qual não estavam acostumados, os fez pensar no gráfico de maneira fragmentada, como se ele não pudesse existir daquela forma e ao mesmo tempo ser correto.


Formamos 3 curvas na vertical e não são emendáveis

Figura 18 - Resposta da dupla 7, 2º A, Atividade 6, tarefa 3, letra a.
Fonte: SILVA, 2011.

Entretanto, a observação, por exemplo, da dupla 1, do 2º A ao dizer que "a cada 180º forma o contorno do gráfico todo", apesar da imprecisão matemática de linguagem, evidenciou que os alunos tiveram um ideia sobre a periodicidade da função tangente, antecipando a resposta a uma questão proposta a seguir. Nem todas as duplas observaram a periodicidade da tangente.

A resposta da dupla 7 do 2º B possibilitou perceber que a dupla apropriou-se do conceito de periodicidade de uma função, expressando o período da tangente e destacando que este era diferente dos demais, querendo mencionar a função seno e cosseno abordadas nas tarefas anteriores.

Figura 19 - Resposta da dupla 7, 2º B, Atividade 6, tarefa 3, letra b.
Fonte: SILVA, 2011.

A tarefa 4 da Atividade 6 pedia que os alunos mencionassem algumas limitações apresentadas pelos *applets* utilizados. Esta questão foi proposta considerando que o professor também deve estar atento às limitações dos recursos tecnológicos, cuidando para que estas limitações e as discussões sobre elas não se configurem em obstáculos, mas sirvam como instrumento de ensino e aprendizagem. As duplas foram unânimes em pontuar o fato de que o *applet* não permitia o preenchimento da linha do gráfico além de uma volta de 2ϖ radianos, uma limitação que pode ter decorrido da construção do *applet*. Mesmo assim, os alunos conseguiram abstrair, entendendo que a função se estendia por todo o conjunto dos números reais, apesar de o *applet* sugerir que as funções fossem definidas em um intervalo finito.

A avaliação do trabalho na perspectiva dos alunos

Apesar de consideradas em alguns momentos difíceis e complicadas, as atividades com o recurso computacional foram avaliadas de forma positiva pelos alunos. O caráter dinâmico dos *applets* motivou os alunos e os estimulou a realizarem as atividades da sequência, apesar de algumas dificuldades.

Destacamos os comentários de alguns alunos acerca das atividades na sala de informática, ao responder o questionário ao final da aplicação da sequência.

> *Achei muito bom e prático! Nos adiantou [sic] muito, pois fazendo desenhos na sala e tal a gente demoraria bem mais, além de nos ajudar a entender melhor (ALUNO A, 2º B).*
> *Seria muito difícil realizar uma atividade daquelas no quadro. Então, além de facilitar pra gente [sic], foi um modo diferente e mais divertido de aprender que chama mais atenção e dá mais vontade de estudar a matéria (ALUNA G, 2º B).*

Dentre os pontos positivos destacados, chamamos a atenção para a colocação: "as imagens com movimentos torna [sic] mais fácil o entendimento do exercício" (ALUNA B, 2ºB). O caráter dinâmico aqui destacado aponta que a opção pelo uso dos *applets* foi adequada, confirmando resultados de outras pesquisas que abordam o uso de recursos computacionais no ensino e aprendizagem da matemática (BORBA; PENTEADO, 2001; FRANCHI, 2007; COSTA, 1997; SANTOS, 2008).

Um ponto negativo destacado pelos alunos foi o fato observado que nem todos puderam participar das atividades sendo acompanhados pela professora e pesquisadora. O aluno considerou as atividades interessantes, mas destacou como ponto negativo "ter algumas dúvidas sobre a matéria e não ter um professor ao lado" (ALUNO F, 2ª A). Isso mostra que o recurso computacional não substitui o papel do professor como orientador e mediador do processo; ele é quem pode, ao conduzir seu trabalho, extrair o melhor dos alunos a partir do aproveitamento das potencialidades da ferramenta tecnológica (RICHIT; MALTEMPI, 2010; VALENTE, 1999).

Como sugestões para melhorar as aulas com o recurso computacional, os alunos citaram a necessidade de aumento de carga horária do curso, com um tempo maior para explorar e utilizar o *software*. Apontaram ainda necessidade de melhorias na infraestrutura da escola, pois tais problemas impossibilitaram que vários alunos participassem das atividades. As escolas ainda não estão preparadas para um trabalho de utilização de laboratórios, faltando suporte para manutenção de equipamentos ou instalação de novos recursos.

Ao estudar um conteúdo matemático, o uso de determinada ferramenta computacional não invalida a utilização de outros recursos (BORBA; PENTEADO, 2001). Por isso, ao longo da sequência didática proposta, procuramos investir na utilização de tecnologias variadas, retornando, por vezes, ao lápis e papel, não perdendo de vista nossa inspiração na modelagem e na apropriação de modelos da trigonometria.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

As atividades desenvolvidas permitiram que os alunos, manipulando os *applets,* visualizassem as modificações das funções seno, cosseno e tangente decorrentes das alterações dos valores dos ângulos e que identificassem algumas propriedades, que eles não haviam estudado anteriormente. Essa nova forma de estudar a Matemática motivou os alunos, permitindo que explorassem os modelos, levantassem conjecturas e discutissem entre si sobre o assunto, argumentando e defendendo seus pontos de vista.

A utilização dos recursos tecnológicos ampliou as possibilidades de aprendizagem, incentivando a investigação e permitindo que os alunos atribuíssem significado aos modelos da trigonometria, considerados muito abstratos.

Contudo, é importante ressaltar que o simples uso dos *applets*, ou dos computadores na escola, não garante a aprendizagem ou a melhoria da qualidade do ensino.

O aparato tecnológico “por si só não cria a melhor situação de aprendizagem” (VALENTE, 1999, p.12) nem substitui a capacidade humana de abstração (FERREIRA; CARVALHO; BECKER, 2010). É mais um recurso que pode ser integrado ao projeto pedagógico das escolas, como auxiliar na mediação do processo educativo.

Mudanças no processo educacional não são obtidas simplesmente usando *softwares* e computadores; os objetivos precisam ser claros, assim como as formas de utilização. Trata-se de um aprendizado conjunto de professores aprendendo a ensinar com tecnologias e alunos aprendendo com tecnologias.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Lourdes Maria Werle; FERRUZZI, Elaine Cristina. Uma aproximação socioepistemológica para a modelagem matemática. **Alexandria**, **Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v. 2, n. 2, p.117-134, jul. 2009.

ARTIGUE, M. Ingénierie Didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v. 9.3, 281-308,1988.

BARCELOS, Gilmara Teixeira, et al. Applets em ambientes de geometria dinâmica: ações para a formação de professores de Matemática. **Novas Tecnologias na Educação**. CINTED-UFRGS, v. 7, n. 3, dezembro, 2009. Disponível em: < http://www.cinted.ufrgs.br/renote/dez2009/artigos/3d_gilmarateixeira.pdf>. Acesso em: 29 out. 2010.

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. **Informática e Educação Matemática**. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2001, 104p.

BRASIL, **Parâmetros Curriculares Nacionais**: ensino médio. Ministério da Educação - Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Brasília: MEC, 1999. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: 01 nov. 2010.

COSTA, Nielce Meneguelo Lobo da. **Funções Seno e Cosseno**: Uma sequência de ensino a partir dos contextos do "mundo experimental" e do computador. 1997. 250f. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1997.

FERREIRA, Inês Farias; CARVALHO, Katiéle de Souza; BECKER, Alex Jenaro. Geogebra e o desenvolvimento de applets para o ensino de geometria. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10, 2010, Salvador. **Anais**... Salvador, 2010.

FRANCHI, Regina H. de Oliveira Lino. Ambientes de aprendizagem fundamentados na modelagem matemática e na informática como possibilidades para a educação matemática. In: BARBOSA, Jonei C.; CALDEIRA, Ademir D.; ARAÚJO, Jussara L. (Orgs.). **Modelagem matemática na educação matemática brasileira**: pesquisas e práticas educacionais. v. 3. Recife: SBEM, 2007. Cap. 1, p. 177-193.

GRAVINA, Maria Alice; SANTAROSA, Lucila Maria. A aprendizagem da matemática em ambientes informatizados. In: CONGRESSO RIBIE, 4, 1998, Brasília. **Anais...** Brasília, 1998. Disponível em: <http://www.miniweb.com.br/ciencias/artigos/aprendizagem_mat.pdf> Acesso em: 18 maio 2011.

KAISER, Gabriele; SRIRAMAN, Bharath. A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. **Zentralblatt für Didaktik der Mathematik,** v. 38, n. 3, 2006. p. 302-310, 2006.

LIMA, Elon Lages et al. **A matemática do ensino médio**, v. 1, 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

OLIVEIRA, Francisco Canindé de. **Dificuldades no processo de ensino e aprendizagem de trigonometria por meio de atividades.** 2006. 74f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-graduação em ensino de Ciências Naturais e Matemática, Natal, 2006.

PIETROBON, Mari L. S.; COSTA, João C. B.; SOUZA; Cleusa Ap. D. N. **Construções para inovações metodológicas no programa curricular da 8ª série do Ensino Fundamental, no conteúdo de trigonometria no triângulo.** Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/933-4.pdf >. Acesso em: 01 jan. 2010.

PONTE, João Pedro.; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações matemáticas na sala de aula***.* Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

RICHIT, Adriana; MALTEMPI, Marcus Vinícius. Desafios e possibilidades do trabalho com projetos e com tecnologias na licenciatura em matemática. **Zetetiké**, FE, Unicamp, v. 18, n. 33, p. 15-41, jan./jun. 2010.

SANTOS, Victor Cesar Paixão. *Mathlets*: possibilidades e potencialidades para uma abordagem dinâmica e questionadora no ensino de Matemática**.** 2008. 102f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

SILVA, Marlizete Franco da; FROTA, Maria Clara Rezende. O uso de applets no ensino de trigonometria. In: SEMINÁRIO DO PROGRAMA DE MESTRADO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA, 1, 2010, Belo Horizonte. **Anais...** Belo Horizonte, 2010.

SILVA, Marlizete Franco da. **Trigonometria, modelagem e tecnologias**: um estudo sobre uma sequência didática. 2011. 236f. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2011.

VALENTE, José Armando. Diferentes usos do computador na educação. In: VALENTE, J.A. (Org.). **Computadores e Conhecimento:** repensando a Educação. 1 ed. Campinas: Gráfica Central da UNICAMP, 1999, v. 1, p.1-28. Disponível em: <http://www.nied.unicamp.br/publicacoes/publicacao_detalhes.php?id=50>. Acesso em: 19 jan. 2011.

RECEBIDO EM: 10/07/2012.
APROVADO EM: 27/09/2012.