

A REPRESENTAÇÃO DO ESPAÇO NA CRIANÇA, SEGUNDO PIAGET: OS PROCESSOS MENTAIS QUE A CONDUZEM À FORMAÇÃO DA NOÇÃO DO ESPAÇO EUCLIDIANO

*THE REPRESENTATION OF SPACE TO CHILDREN ACCORDING TO PIAGET: MENTAL PROCESSES THAT
LEAD THEM TO THE FORMATION OF THE CONCEPT OF EUCLIDEAN SPACE*

Rafael Montoito*
José Carlos Pinto Leivas**

RESUMO

O texto que se segue, de abordagem piagetiana, tem por objetivo discutir como se dá a representação do espaço na criança e as principais características das relações que compõem este processo: as relações topológicas, projetivas e euclidianas. Consiste de uma pesquisa bibliográfica ao se concentrar em textos relacionados aos estudos de Piaget, seus colaboradores e seguidores. Visando melhorar o ensino de geometria (principalmente na pré-escola e nas séries iniciais), propomos-nos a recapitular e ilustrar alguns conceitos da teoria de Piaget, os quais servirão para elucidar ainda mais cada uma das citadas relações, e discutir algumas atividades que podem ajudar na construção do pensamento matemático, no que tange à geometria.

Palavras-chave: Piaget. Representação do Espaço na Criança. Relações Topológicas. Relações Projetivas. Relações Euclidianas.

ABSTRACT

The study has a Piagetian approach and aims to discuss how the representation of space to children takes place, as well as the main characteristics of the relationships that comprise this process: the topological, projective and Euclidean relations. It consists of a literature review by focusing on some texts related to Piaget's studies, his collaborators and followers. With the objective to improve the teaching of geometry (especially in preschool and early grades), it revises and illustrate some concepts of Piaget's theory, which may serve to further elucidate each of those relationships, and to discuss some activities that can help in the construction of mathematical thinking, with respect to geometry.

Keywords: Piaget. Space representation to children. Topological relations. Projective Relations. Euclidean Relations.

* Professor do Instituto Federal Sul-Rio-Grandense (IFSUL - Campus Pelotas) e aluno de doutorado do Programa de Pós-graduação em Educação para Ciência na Universidade Estadual Paulista (UNESP - Campus de Bauru). E-mail: xmontoitto@ig.com.br

** Professor Doutor - Mestrado Profissional em Ensino de Física e de Matemática - UNIFRA - e-mail: leivasjc@unifra.br

Um Pouco da Teoria de Piaget

Devido à grande quantidade de obras escritas por Piaget e seus colaboradores, e também às inúmeras apropriações feitas e publicadas sobre seus estudos ao longo dos anos, vemo-nos, no início deste trabalho, com necessidade de recapitular algumas ideias da sua teoria, a fim de deixar claro ao nosso leitor quais abordagens estaremos fazendo, ao longo do texto, pois, é importante ressaltar, nem tudo que se lê sobre e se atribui a Piaget é condizente com aquilo que ele e sua equipe pesquisaram e defenderam.

Por meio da teoria hoje conhecida como “Epistemologia Genética”, o biólogo Piaget tentou explicar o desenvolvimento humano e sua condição mental, ou seja, tentou desvendar como se dá a evolução da inteligência humana e, para guiar suas pesquisas, baseou-se em pressupostos da biologia, da lógica e da epistemologia. Enquanto Bertrand Russell tem como questões básicas de toda a teoria do conhecimento as perguntas “O que conhecemos?” e “Como conhecemos?”, Piaget vai formular uma só pergunta, ainda mais básica, a partir da qual vai poder propor uma resposta às anteriores. “Esta tal pergunta é ‘Como um sujeito passa de um estado de menor conhecimento para um de maior conhecimento?’ ” (FERREIRO; GARCIA, 1975, p. 11, tradução nossa).

Piaget não realizou seus estudos considerando a educação propriamente dita, mas sim o desenvolvimento mental, bem como as estruturas lógicas da formação da inteligência e do conhecimento. Tendo como ponto de partida os primeiros dias de nascimento, suas observações concluíram

que se forma, na criança, - e, com o passar do tempo, no adolescente e no adulto, de modo que este processo é infindo - estruturas operatórias que se relacionam e formam novas estruturas, sendo que estas, muitas vezes, abarcam as anteriores, modificando-as significativamente.

A inteligência humana, para Piaget, é um processo de construção e

é, sobretudo, a soma de constructos mentais em formas de equilíbrio, ou seja, o caráter da reversibilidade que nada mais é que a possibilidade de saber proceder num retorno ao ponto de início. É entender o deslocar no equilíbrio de ir e vir mentalmente, um desconstruir e reconstruir. O sujeito inteligente é o sujeito tocado, afetado pelo mundo na conformidade interna biopsíquica em que se processa o conhecer mediado pela lógica da ação ajustada nas linguagens. O caráter da inteligência é como o do rizoma, que por todos os lados se entra, se liga, se estrutura e se estende, se conjuga. A inteligência é múltipla, diversa, é tecida pela rede de conhecimentos, de compreensões do possível imaginável, da possibilidade de ser de modos diversos apresentado-reapresentado (PACHECO; DE VASCONCELOS, 2010, p. 5).

Vê-se, então, que o processo de “aquisição” da inteligência não é simples, bem como não o é a sua verificação nas distintas etapas que o ser humano vivencia. Na procura por padrões que o ajudariam a desvendar as nuances deste processo, Piaget e seus colaboradores criaram, para cada tema investigado, uma sequência de testes.

Entretanto, para explicar a busca de estruturas intelectuais em diferentes níveis, não há como padronizar testes,

logo o método clínico da observação e experimentação é o mais viável, já que o comportamento não é o mesmo para todos. Assim, são criadas oportunidades de vivenciar novas experiências, priorizando qualidade, rejeitando a mensuração, pois as diferenças individuais não seriam percebidas por meio de testes padronizados para a compreensão do desenvolvimento intelectual (DE SOUZA, 2010, p. 3).

Para Piaget, a criança constrói seu conhecimento por meio de uma experimentação ativa, ou seja, experienciando os objetos sem formar conceitos sobre estes, pois isto só ocorrerá mais tarde. Por meio da experiência física, a criança conhece os objetos conforme os vai manipulando, o que a leva a descobrir propriedades materiais que podem ser notadas através da observação e do tato. Para que ocorra, de fato, o aprendizado, é necessário que a criança já possua um certo nível de abstração, o qual é a base para uma estrutura organizada da inteligência. A fim de verificar tudo isso,

a epistemologia genética pretende ser ciência e proceder, conseqüentemente, como as demais ciências, formulando perguntas verificáveis. Os procedimentos de verificação serão em função da pergunta, e a verificação empírica se imporá reiteradamente para conhecer a gênese real de certas noções, processos de inferência, formas elementares de raciocínio etc. (FERREIRO; GARCIA, 1975, p. 13, tradução nossa).

Para explicar o desenvolvimento humano, Piaget (DE SOUZA, 2010) divide sua teoria em cinco processos mentais: *assimilação* e *acomodação*;

estes, quando elaborados simultaneamente, conduzem à *adaptação*, à *organização* e à *equilibração*. Em linhas gerais, podemos explicá-los como se segue:

A assimilação é um fator que consiste ao sujeito, pois é o processo de compreensão de algo. Utiliza o conhecimento prévio que tem sobre o assunto. A acomodação é a superação, por esforço cognitivo próprio. Adaptar é assimilar e acomodar um determinado conhecimento simultâneo. A totalidade desse processo é a organização da estrutura mental. A equilibração cognitiva é o autor-regular do pensamento, ao utilizar, sobretudo, o pensamento reversível (DE SOUZA, 2010, p. 4).

Há que se considerar, ainda, no processo de desenvolvimento da inteligência humana, um outro fator importante: a reversibilidade. Por meio desta, o pensamento torna-se móvel e dinâmico, unindo-se a outros conhecimentos e desdobrando-se em partes, de modo que as transformações sobre os objetos passam a ser entendidas como atos mutáveis, que podem ser corrigidos e (ou) transformados, indo do ponto de partida até o final, fazendo o caminho inverso ou compreendendo-se como se dá a ação em pontos isolados do processo total da transformação. O conhecimento de algo não é mais um ponto de chegada isolado, mas é reconhecido como parte de uma associação mental que pode ser percorrida no caminho inverso.

A teoria de Piaget possui três aspectos de fundamental importância: o conteúdo, a estrutura e a função: o primeiro diz respeito a dados comportamentais no que concerne à forma de pensar, no que se pensa e como cada indivíduo age; a função está intimamente ligada

à inteligência, pois refere-se à adaptação mental no que diz respeito aos processos de assimilação e acomodação, uma vez que “ela assimila e acomoda do novo ao velho e vice-versa, definindo o comportamento inteligente” (DE SOUZA, 2010, p. 3); a estrutura, por sua vez, é colocada entre o conteúdo e a função, uma vez que organiza as situações entre eles, e explora, biologicamente, o desenvolvimento da inteligência através de fatores biológicos e hereditários. Nas palavras de Flavell, as estruturas

são as propriedades organizacionais da inteligência, organizações criadas através do funcionamento e inferíveis a partir de conteúdos comportamentais cuja natureza determinam (FLAVELL apud DE SOUZA, 2010, p. 4).

Além disso, a teoria aponta também a divisão de três *períodos* (também chamados *estádios*) de desenvolvimento do pensamento: o da inteligência sensorio-motora (de 0 a 2 anos), o da preparação e da organização das operações concretas (de 2 a 11 anos) e o das operações formais (de 11 a 15 anos). No segundo período, encontramos duas subdivisões bastante importantes: o estágio pré-operacional (de 2 a 7 anos) e o estágio das operações concretas (de 7 a 11 anos). É importante ressaltar que, embora esta regularidade tenha sido observada em muitas crianças que participaram dos testes aplicados (e também em crianças de outras nacionalidades, quando a teoria de Piaget foi aplicada e verificada por outros pesquisadores, em diferentes países do mundo), pode haver algumas discrepâncias nas idades observadas, com relação aos estádios, pois cada ser humano é único (unitário e complexo) e, com isto, apresenta diferentes maneiras de perceber(-se) e interagir

com o mundo. O que Piaget garante é que, mesmo com pequenas variações de idade, todo indivíduo terá sua inteligência desenvolvida

a partir de um estágio³ de equilíbrio, sendo necessário que ocorra o ‘desequilíbrio’ entre sujeito e objeto para que, no processo de equilibração, seja produzido o conhecimento da situação, explicando, assim, a construção das estruturas mentais, por meio do progressivo equilíbrio entre o assimilar e o acomodar (DE SOUZA, 2010, p. 4).

É preciso deixar claro que

desde os níveis mais elementares do desenvolvimento, o conhecimento jamais é uma cópia passiva da realidade externa, pálido reflexo da transformação social, mas sim criação contínua, assimilação transformadora (FERREIRO; GARCIA, 1975, p. 15, tradução nossa).

Além disso, a divisão por estádios justifica-se porque

o homem normal não é social da mesma maneira aos seis meses ou aos vinte anos de idade, e, por conseguinte, sua individualidade não pode ser da mesma qualidade nesses dois diferentes níveis (PIAGET apud DE LA TAILLE, 1992, p. 12)

e é por causa desta diferenciação que se faz necessário saber especificamente o que procurar/observar em cada estágio vivenciado pelo ser humano.

No processo de ensino e aprendizagem, o professor deve encorajar a independência das crianças, sua curiosidade e suas iniciativas, ajudando-as a ter confiança na sua habilidade

³ O termo “estágio” corresponde ao termo “estádio” em diferentes literaturas sobre o tema.

de construir sua própria ideia das coisas; deve, também, permitir que as crianças se expressem com convicção e lutem construtivamente com seus medos e ansiedades, de modo a não se desencorajarem facilmente.

Este princípio claramente sobrepõe-se a implicações cognitivas da teoria Piagetiana, ilustrando uma vez mais quão inseparáveis são estes aspectos do desenvolvimento. A autonomia é então emocional, social, moral e intelectual ao mesmo tempo. De qualquer forma, o uso da inteligência no indivíduo depende, em grande escala, de como efetivamente ele se sente imaginando coisas, o quanto ele se satisfaz buscando curiosidades intelectuais, e como ele se sente sobre seus erros. Estas considerações socioemocionais são extremamente importantes em si mesmas e no desenvolvimento cognitivo, visto que a inteligência, quanto mais usada, mais é desenvolvida (KAMII, DEVRIES, 1992, p. 39).

A pergunta que nos fazemos agora é como esta teoria (e todas suas nuances) pode ajudar o professor a refletir sobre como se dá a formação dos conceitos geométricos na criança e sobre como ela lida/observa/se relaciona com os entes matemáticos nas aulas de geometria. Algumas considerações sobre isso serão feitas a seguir.

A Representação do Espaço na Criança

O ensino de Geometria tem sido, ao longo dos anos, negligenciado nas salas de aula. Vários estudos (SADDO; PAVANELLO apud SCORTEGAGNA; BRANDT, 2008) comprovam que este conteúdo é frequentemente relegado em várias séries e, quando ensinados, são ministrados superficial e simploriamente, sem estabelecer

conexões com outros conteúdos da matemática e com outras disciplinas. Isto ocorre porque muitos professores têm deficiência em sua formação inicial, com relação à geometria, mas, também, porque muitos livros didáticos deixam-na para os últimos capítulos, o que a faz ficar “prensada” nos últimos dias do atribulado ano letivo brasileiro que possui todas as dificuldades que já conhecemos.

Na maioria das vezes, o que se percebe nos tratamentos que se dá na escola à geometria é o uso da representação dos entes matemáticos anteriormente à sua construção, contrariamente ao preconizado pelos estudos de Piaget e seus seguidores. Para Piaget e Inhelder (1993) as relações topológicas vêm em primeiro lugar, seguidas das relações projetivas e euclidianas e esta sequência admite ordenações entre ações cada vez em grau maior de complexidade como, por exemplo, nas ações que determinam reta, ângulo, paralelas, coordenadas e isso, em geral, não é visto na construção geométrica na escola básica. Para os autores,

pode-se compreender, então, que a representação espacial é uma ação interiorizada e não simplesmente a imaginação de um dado exterior qualquer, resultado de uma ação (p. 474).

Nas séries iniciais, por não se sentirem à vontade para trabalhar com o conteúdo, os professores limitam sua abordagem

ao reconhecimento das figuras planas mais comuns e à introdução de fórmulas para o cálculo de áreas, o que não leva à construção de conceitos, ao relacionamento dos conteúdos entre si e destes com os das demais disciplinas ou com a realidade do aluno (PAVANELLO apud SCORTEGAGNA e BRANDT, 2008, p. 1).

No entanto,

todo instinto animal já supõe uma geometria (observem as figuras regulares das células de uma colmeia ou de uma teia de aranha), e toda a morfogênese (a qual em parte prolonga o instinto) é uma criação contínua de 'formas' elaboradas em conexão com o meio (PIAGET, 1975, p. 140).

Deste modo, se a geometria é tão "natural", por que há tão grande dificuldade em aprendê-la e em ensiná-la?

Obviamente, as noções geométricas, como qualquer outro conhecimento, desenvolvem-se aos poucos, respeitando as demais redes cognitivas que o ser humano vai tecendo na sua compreensão do mundo e, assim como foi referido anteriormente, auxilia na modificação destas à medida que se forma.

Para Piaget,

a causa dos fracassos da educação formal da Matemática decorre do fato de se iniciar pela linguagem, ao invés de fazê-lo pela ação real e material, desenvolvida de forma sistemática e ininterrupta, durante todo ensino fundamental. É neste sentido que a Matemática, incluindo a Geometria, não deve ser ensinada como se tratasse de verdades acessíveis somente por meio da linguagem. A chegada à abstração é imprescindível, pois finalizam uma série ininterrupta de ações concretas anteriores (SCORTEGAGNA; BRANDT, 2007, p. 6).

Não queremos dizer com isso que, para ensinar bem, os professores devem menosprezar a força das palavras.

Não temos nada contra o desenvolvimento da linguagem. De fato, estamos a favor. O que estamos dizendo é que quando

ensinamos palavras às crianças, temos que dar-nos conta que tudo que estamos fazendo é ensinando palavras. Nós também precisamos ter cuidado em não ensinar palavras de maneira que paralise o pensamento. Palavras contribuem para o desenvolvimento cognitivo, mas não de maneira exagerada como o positivismo lógico leva-nos a acreditar. Como Furth (1996) evidenciou em sua pesquisa sobre crianças surdas, linguagem não é mesmo necessária para o desenvolvimento das operações concretas (KAMII; DEVRIES, 1992, p. 42).

Para os professores encaminharem um bom trabalho em sala de aula, no sentido de não só desenvolverem atividades com situações concretas, mas com aquelas que envolvem processos de abstração, eles precisam conhecer os processos mentais que cada aluno vivencia em cada estágio e, tendo isto por base, tentar desenvolver atividades que reconstruam os conhecimentos que devem ser ensinados, adaptados às estruturas e idades adequadas.

O primeiro espaço que a criança vivencia é "postural e orgânico" (PACHECO; DE VASCONCELOS, 2010, p. 4), ou seja, o corpo é o seu movimento. Somente depois é que ela vai diferenciar outros corpos, diferentes do seu, e estabelecer relação de longe/perto, maior/menor, na frente/atrás, igual/diferente etc. Por fim, há a conquista de um espaço perspectivo

que demanda os transversamentos de estruturas e esquemas que pervertem a materialidade concreta para adentrar em estratégias do signo nas suas nuances lógico-matemáticas e assim ascender a um espaço euclidiano (PACHECO; DE VASCONCELOS, 2010, p. 4) – esta é a conquista sógnico-lógica.

Piaget e Inhelder (1993) explicam como se dá

esta mudança gradativa na percepção do espaço em seu livro *A Representação do Espaço na Criança*, no qual descrevem como a criança sai das relações topológicas, passa pelas relações projetivas e chega às relações euclidianas. É este processo que comentaremos, resumidamente, nos parágrafos que se seguem.

Para eles, as estruturas perceptivas ou sensório-motoras constituem o ponto de partida, uma vez que se constituem a partir do contato direto com os objetos e posteriormente é que ocorre a construção representativa do espaço, pois que evoca a imagem do objeto em sua ausência. Ela somente ocorre muito depois do aparecimento da linguagem e da representação, as quais ocorrem mais ou menos simultaneamente à percepção e motricidade.

1) *Relações topológicas*: são as primeiras construídas pela criança e dizem respeito às características dos objetos em si mesmos, revelando suas relações de vizinhança (perto ou longe do observador, objetos perto ou longe uns dos outros), separação (distinguir elementos uns dos outros e partes do todo), envolvimento (perceber, numa sequência linear ou cíclica, um elemento entre outros, e saber reproduzir esta sequência, bem como perceber as relações de “dentro” e “fora” para figuras planas e formas tridimensionais), continuidade (perceber que uma linha ou superfície é ou não interrompida) e ordem, a qual se divide em duas partes: a ordem perceptiva e a ordem representativa.

A ordem perceptiva consiste em perceber vizinhanças, separação de elementos vizinhos e um sentido de percurso ao traduzir elementos em ordem linear, cíclica ou inversa, e a representativa consiste em realizar separações que deslocam as vizinhanças perceptivas permitindo reconstituí-las

e resultam da coordenação das ações de deslocar (transportar mentalmente) e recolocar aos poucos, na qual o sentido do percurso deve se manter constante durante os transportes e deve dirigi-los de modo a conservar ou restabelecer as vizinhanças que foram deslocadas (SCORTEGAGNA; BRANDT, 2008, p. 3).

Nos testes planejados para esta fase, Piaget pedia para as crianças reconhecerem, através do tato, sem ver o objeto, a forma cuja réplica estava ao seu lado, ou seja, *tocar* num objeto e *ver* o seu idêntico, atribuindo a eles a relação de paridade. Dentre os objetos, havia aqueles comuns ao dia a dia da criança (chave, lápis, bala, tesoura etc.) e outros que representavam formas geométricas regulares ou não (triângulo, quadrado, círculo, oval, meio círculo com diâmetro dentado etc.). O resultado observado foi que

o sujeito compreende a questão colocada, pois mostra-se apto a reconhecer a maior parte dos objetos usuais apresentados. Mas, quando se trata de formas geométricas, não consegue reconstituir a figura do conjunto e, segundo tenha tocado uma figura com limite curvo ou reto ou uma ponta, assimila a forma apalpada a uma forma visual que apresenta o mesmo caráter parcial, sem preocupar-se com as outras partes da figura, nem procurar reconstruir a estrutura total (PIAGET; INHELDER, 1993, p. 38-39).

Devido a isso, por exemplo, ao tocar o círculo dentado, algumas crianças relacionavam-no com o triângulo, uma vez que o tato as “enganava”, fazendo-as priorizar apenas a ponta bicuda que sentiam. Leivas (2009b, p. 62) afirma:

Faz sentido, atualmente, iniciar a construção do espaço infantil pelas intuições topológicas, sendo esse

o objetivo principal deste artigo, acreditando que muito ganhamos na construção do espaço geométrico da criança.

Sugere ainda atividades ilustrando algumas propriedades topológicas que podem ser desenvolvidas nesse nível de ensino.

A faixa de Möebius é uma superfície rica para ilustrar, por exemplo, a propriedade de continuidade, a qual, geralmente, é feita ao final do ensino fundamental, médio e até mesmo no superior. Leivas (2008, 2009a) apresenta resultados de uma investigação com alunos de uma Licenciatura em Matemática com tal propósito. Conclui, com a pesquisa, que os resultados das provas aplicadas comprovam que propriedades topológicas são importantes para formação do professor de Matemática, as quais não são estudadas, em geral, em tal formação.

Na fase das relações topológicas não há, pois, o reconhecimento das formas euclidianas.

2) *Relações projetivas*: são aquelas que coordenam os objetos em relação uns aos outros e que levam em conta todos os pontos de vista sem conservar, inicialmente, as distâncias e as dimensões como um sistema de coordenadas, pois o ponto de vista, a princípio, é considerado como único.

Nos testes desta fase, as crianças utilizam, muitas vezes, termos que conhecem para se referir às figuras geométricas, de modo que “telhado da casa” equivale a “triângulo”, “roda” remete a “círculo” etc. A exploração tátil difere um pouco da do nível anterior, porque a criança já não sente mais a necessidade de seguir com os dedos todo o contorno das figuras, mas descobre, ao acaso, alguns elementos que as caracterizam e atribuem significado a eles (como

os dentes do círculo dentado, por exemplo, que o faz diferir-se de todas as outras formas analisadas no mesmo teste).

O resultado de tais progressos na atividade perceptiva é que não somente as relações topológicas que intervêm durante essas experiências são inteiramente dominadas, mas ainda há o início de diferenciação entre as formas curvilíneas e retilíneas, sendo estas reconhecidas por seus ângulos [...]. Em resumo, há sempre oposição entre as duas grandes classes das figuras sem ângulos ou curvilíneas e das figuras com ângulos ou retilíneas, mas o conteúdo de cada uma dessas duas classes permanece muito pouco analisável (PIAGET; INHELDER, 1993, p. 45).

Este nível - intermediário entre os que se caracterizam pelas relações topológicas e euclidianas - é fortemente caracterizado por um começo de abstração, habilidade esta que será mais aprofundada e desenvolvida no nível seguinte. No entanto, durante os testes para esta fase, os quais compreendiam desenhos feitos pelas crianças depois que estas manipulavam os objetos, é possível perceber que esta habilidade, totalmente inexistente no nível anterior, começa a manifestar-se.

O trecho abaixo, que explica melhor algumas características das relações projetivas, comenta as reações de Leo e Lam, crianças que participaram dos testes feitos por Piaget.

O caráter diferencial que marca a passagem das relações topológicas, nesse início de distinção das relações euclidianas, é certamente constituído pela análise do ângulo: não é a reta como tal, que é oposta pela criança às formas curvilíneas, mas o complexo de retas que constitui o ângulo. Ora, a descoberta do ângulo não é tipicamente

uma abstração a partir do objeto? Como mostrou Volkelt, os desenhos ou modelagens desse nível apresentam com frequência, e independentemente de toda estereognosia⁴, um caráter ‘polissensorial’, simultaneamente tátil, cinestésico e visual: a palavra de Leo ‘é alguma coisa que finca’ é uma definição do ângulo que ilustra ao mesmo tempo a tese de Volkelt e o papel da acomodação ao objeto na constituição dessas primeiras formas representativas euclidianas. Mas nem tudo é dito assim: para compreender o ângulo à maneira das duas retas que se cortam (desenho de Lam), e sobretudo para incorporá-lo no conjunto de uma figura fechada, é questão que a criança o reconstitua, e essa reconstituição supõe precisamente uma abstração a partir da ação e não mais unicamente do objeto. O ângulo é, a esse respeito, o resultado de dois movimentos (do olhar ou da mão) que se juntam, ou do afastamento entre um movimento de ida e o movimento de volta, e é necessário evocar essas noções que englobam a de reta para ultrapassar a simples impressão de ‘alguma coisa que finca’. O objeto com suas propriedades de espaço físico desempenha, pois, com certeza, um papel na diferenciação das formas euclidianas, mas essas propriedades são assimiladas ao mesmo tempo, graças à construção prévia das relações topológicas, a um sistema de movimentos coordenados, do qual o desenho constitui uma das manifestações (PIAGET; INHELDER, 1993, p. 46)⁵.

Ainda analisando-se os desenhos, nota-se alguma confusão entre o ponto de vista da criança

e o do observador, revelando representações diferentes das que seriam corretas no que concerne às perspectivas. Isso ocorre porque, para representar corretamente, é necessário que a criança tome consciência do seu próprio ponto de vista e, para isso, é preciso se dar conta que ele se situa entre os outros, ou seja, diferencia-se dos outros, coordenando-os com eles. “É à medida que a criança leva em consideração o ponto de vista alheio que compreende o seu” (SCORTEGAGNA; BRANDT, 2008, p. 3), o que ainda não ocorre totalmente neste nível.

Segundo Battro (1976), da mesma forma que as noções elementares de vizinhança e separação nas relações topológicas conduzem a uma geometria do objeto, a criança precisa coordená-las de modo a estabelecer uma geometria do espaço e afirma que “a coordenação mais simples e primitiva consiste em referir tudo ao ponto de vista próprio [...]”. Indo mais além, indica que “todo processo que conduza a uma descentralização levará, então, a uma coordenação dos diversos pontos de vista”. (p. 208, 209). O autor exemplifica como elaborar a reta projetiva em uma atividade que pode ser levada a efeito com crianças por volta de sete anos, a qual consiste em tomar dois pontos A e Z, balizas fixas, e alinhar um conjunto de objetos que podem ser representações de postes de telefone, por exemplo, tudo disposto em uma mesa. Os resultados são indicados na figura 3, adaptada, pelos autores no GeoGebra, de Battro (1976, p. 209).

⁴ Estereognosia é a percepção que utiliza apenas o tato como meio de reconhecimento de objetos.

⁵ A leitura do §5º do item 1 da Primeira Parte de *A Representação do Espaço na Criança* deixará claro, para quem quiser aprofundar-se no assunto, os testes aplicados às crianças e os pensamentos e as reações destas durante os testes.

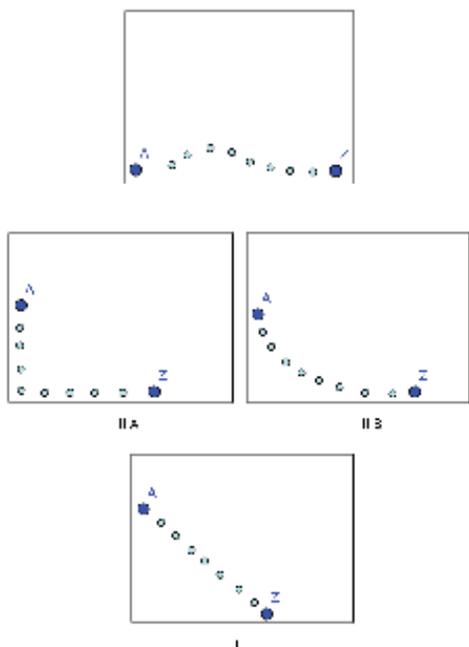


Figura 1 - Resultados da elaboração da reta projetiva.

3) *Relações euclidianas*: apesar de não se importar com medidas até os nove anos de idade, a criança, já antes, vive envolvida com elas, pois sabe comparar sua altura com a dos colegas, tem consciência de que não alcança um objeto que está num nível bem mais alto que ela etc. Esta construção informal do conceito de medida gera a compreensão da ideia de distância, da qual surge, por sua vez, as relações euclidianas (DE SOUZA, 2010).

É neste período que

a criança transfere os conhecimentos topológicos para os euclidianos, passa do espaço para o plano [...]. Nesta fase, adquirem-se os conceitos através da noção dos objetos no espaço, projeta-se o espaço no plano, visualiza-se a ideia do objeto (DE SOUZA, 2010, p. 11).

Desse modo, a geometria plana euclidiana é

utilizada para a representação plana de objetos com visualização espacial.

Outra característica importante desta fase é a coordenação operatória.

Uma operação é uma ação suscetível de voltar ao seu ponto de partida e de fazer composição com outras, segundo esse duplo modo direto e inverso. É interessante observar que, mesmo nesse domínio das ações elementares que são os movimentos de exploração tátil-cinestésica, a atividade perceptiva é suscetível de se complicar, graças ao auxílio das representações cada vez melhor diferenciadas que repercutem sobre elas após tê-las engendrado, até dar lugar, ao redor de 7-8 anos (isto é, na idade normal das primeiras operações concretas) a uma tal coordenação reversível, a qual se apresenta sob uma forma muito simples, mas a observação mostra precisamente que ela permanecia inacessível até este nível: a do retorno sistemático ao ponto de partida, de modo a agrupar todos os elementos de uma figura em torno de um ou mais pontos estáveis de referência (PIAGET; INHELDER, 1993, p. 51).

Ao final da análise, Piaget concluiu que o espaço topológico, percebido quando as crianças têm em torno de 2 anos, serve de base para a construção das relações projetivas e euclidianas, sendo que estas são interdependentes, e que as relações euclidianas formam-se no indivíduo até a idade de 7-8 anos, em média.

Utilizar mapas, como o do Brasil na figura abaixo, para colorir apenas com quatro cores, é uma atividade que pode ser útil para o desenvolvimento da percepção de vizinhança, talvez a mais elementar e que independe de medidas e é mais adequada ao indicado nas pesquisas de Piaget e Inhelder.



Figura 2 - Mapa do Brasil.

Fonte: <http://www.wallsystem.com.br/novo/img/mapa_brasil2.jpg>

Uma segunda ilustração de atividade que independe de medidas e, portanto, antecede às noções euclidianas na concepção piagetiana, consiste do conjunto de anéis da figura 3, a qual pode auxiliar na compreensão da segunda relação topológica mais elementar, a de separação. Nela são apresentados três anéis sobrepostos para a criança investigar o que ocorre se for removido um dos anéis. Conforme a maturidade da criança, a investigação pode ser também a seguinte: Há algum par de anéis ligados entre si? Além desta: E os três anéis, estão ligados entre si?

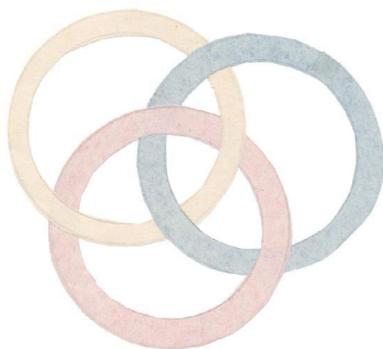


Figura 3 - Conjunto de anéis.
Foto dos autores.

CONSIDERAÇÕES FINAIS: PENSANDO NO ENSINO DE GEOMETRIA

Conforme podemos perceber, o caminho que o pensamento percorre das relações topológicas às relações euclidianas se dá, em grande parte, antes de a criança entrar no primeiro ano do ensino fundamental. No entanto, hoje em dia, muitas crianças frequentam a pré-escola, e até mesmo foi inserido no currículo nacional um ano a mais, anterior ao primeiro ano.

O medo ao qual nos referíamos (dos professores com relação ao ensino de geometria), presente em quase todos os anos de escolarização, também pode ser evidenciado nos professores da pré-escola. Não é, nem de longe, nosso objetivo criticá-los ou desmerecê-los, mas o fato é que, na tradição escolar, estes anos são dedicados ao conhecimento das primeiras letras, à contagem das primeiras unidades e a trabalhos que desenvolvam a motricidade. Mas se a criança, nesta idade, segundo as pesquisas de Piaget, já está formando suas relações espaciais, é preciso que os professores estejam atentos para incentivá-las neste processo e trabalhar atividades que auxiliem a construção destas noções.

Piaget ressalta bastante o trabalho cooperativo. A figura do adulto, para a criança, pode, algumas vezes, passar-lhe uma ideia de coação, o que não ocorre quando as crianças fazem atividades umas com as outras. Este tipo de atividade conjunta

representa uma etapa obrigatória e necessária da socialização da criança. Todavia, se somente houvesse coação, não se compreenderia o desenvolvimento das operações mentais. A cooperação necessária a esse desenvolvimento tem seu início, segundo Piaget, nas relações entre as crianças, daí a simpatia que ele sempre teve pelos trabalhos em grupo como

alternativa pedagógica. Mas por que as relações entre crianças representam o ponto de partida da cooperação? Ora, simplesmente pelo fato de que não há hierarquias pré-estabelecidas entre as crianças, que se concebem iguais umas às outras (DE LA TAILLE, 1992, p. 20).

Trabalhar cooperativamente não significa somente deixar as crianças, em grupos, manipularem blocos lógicos ou brinquedos de formas geométricas que se encaixam.

Os professores da pré-escola, muitas vezes, enfatizam que a criança aprende manipulando objetos. A distinção empirista-Piagetiana sugere que devemos olhar esta afirmação e perguntar 'o que' e 'como' a criança aprende através da manipulação de objetos. Isto faz uma grande diferença em nossos métodos de ensino se admitirmos, do ponto de vista empirista, que a criança simplesmente absorve informação sensorial através de suas manipulações, ou, na concepção Piagetiana, que as manipulações implicam, em si mesmas, processos de raciocínio (KAMII, DEVRIES, 1992, p. 12-13).

Vimos que as crianças manipulam objetos e dão nomes a eles (telhado, roda etc.). Estas formas geométricas, assim reconhecidas, podem ser trabalhadas por meio de desenhos, de narrativa de histórias, de brincadeiras em grupo, colagens etc. Não cremos que seja preciso mudar o que os professores da pré-escola e das séries iniciais fazem com seus alunos, mas sim focar estas atividades com outras intenções.

Jogando bolinha de gude, por exemplo, as crianças observam o que acontece quando batem umas nas outras. Este conhecimento físico não pode ser construído só com símbolos,

mesmo se a criança tivesse um nível de representação de estudante de 2º grau. Jogando com bolinhas de gude, as crianças também estruturam seus conhecimentos lógico-matemáticos. Por exemplo, elas notam que juntando as bolinhas podem atingi-las melhor do que quando dispersas. Elas também estruturam melhor seu espaço antecipando e verificando a direção na qual as bolinhas rolam. Assim, acreditamos na manipulação de objetos por razões que não têm nada a ver com a inabilidade das crianças mais novas em usar palavras e imagens. Mesmo se a criança estiver perfeitamente apta para trabalhar com palavras e imagens, nós ainda insistiremos em usar objetos reais. Uma vez que o conhecimento é construído atuando na realidade e transformando-a, crianças devem trabalhar com a própria realidade, e palavras e imagens não podem substituir (KAMII; DEVRIES, 1992, p. 44).

Outros bons exemplos de como trabalhar as relações topológicas, projetivas e euclidianas, sem se preocupar com o uso exato de definições e termos matemáticos, o que seria inadequado para esta idade, é o trabalho de Scortegagna e Brandt (2008), no qual as pesquisadoras desenvolvem atividades tendo como acionador cognitivo a narrativa do conto "Chapeuzinho Vermelho". As autoras adaptam a atividade e solicitam que as crianças desenhem a casa do personagem, com figuras geométricas, e que busquem as relações topológicas envolvidas.

No primeiro capítulo do livro *Organização dos Tempos e dos Espaços na Infância*, Leivas (2009) elabora um material a ser utilizado para um curso de Pedagogia a Distância, no qual introduz propriedades topológicas elementares com atividades simples para serem utilizadas pelos professores da Educação Infantil, bem como outras propriedades topológicas não apenas elementares,

o que contribuiu de forma significativa na formação dos pedagogos que o utilizaram, segundo avaliações em diversas edições da disciplina à qual o material se destinou. O livro *Las Matemáticas de los Cuentos y las Canciones*, de María Dolores Saá Rojo, mostra que as histórias infantis e algumas canções têm um grande potencial para trabalhar, ainda na tenra idade, conteúdos e noções matemáticas com os alunos. A autora mostra que até mesmo as relações topológicas, as primeiras que as crianças desenvolvem, segundo Piaget, estão presentes em histórias que nossas crianças conhecem. Por exemplo: em “O patinho feio”, o patinho se refugia *debaixo* de uma árvore; em “Bambi”, o animalzinho faz vigia *no alto* de uma colina; em “Dumbo”, o elefante pisa primeiro a orelha *direita* e depois a *esquerda* etc. O trabalho de Rojo abre portas diferenciadas para um trabalho sobre relações binárias, ordenação de uma coleção, conjuntos, quantificadores *todos/alguns*, estimação e comparação de quantidades, relações espaciais, formas e tamanhos, formas geométricas e não geométricas etc.

Auxiliar as crianças a formarem as noções de representação do espaço é o começo de uma educação que alicerçará a compreensão da geometria nas próximas séries, seja essa plana ou espacial, com a aquisição de outras habilidades ou operações como a de continuidade, por exemplo. Assim, a intuição das formas geométricas, incluindo dimensões, vai se estabelecendo. Não é curto o caminho da formação do pensamento formal, o qual é “hipotético-dedutivo”, ou seja, capaz de deduzir as conclusões de puras hipóteses e não somente através de uma observação real, até porque, se o conhecimento matemático sobre geometria fosse baseado estritamente na observação, não haveria geometria tal como é ensinada.

Em efeito, o que queremos dizer

quando atribuímos à natureza a posição de retas, círculos e outras formas geométricas particulares? Com toda segurança, elas não existem no estado de realização completa, pois tanto as emissões de energias quanto as estruturas da matéria são descontínuas: a horizontal que caracteriza o nível de água tranquila não se assemelha absolutamente com uma reta quando examinada no microscópio etc. As retas ou elipses etc. são, pois, constituídas por linhas de forças ou pelas trajetórias dos corpúsculos desprovidos de uma estrutura geométrica simples? Mais precisamente, quanto mais se avança na análise microfísica do espaço, mais se complica a geometria dos elementos da realidade: dizer, por exemplo, que esta geometria não é arquimediana é dizer que as formas métricas elementares não estão representadas nela. Em resumo, as formas geométricas ‘simples’ que descobrimos na natureza, como o plano, a esfera produzida por uma bolha de sabão, os diversos poliedros constituídos por cristais etc., sempre são relativas, a certa escala de observação, e traduzem a geometria do observador, bem como as propriedades da matéria observada (PIAGET, 1975, p. 163).

Da pré-escola até o ensino médio, o aluno passa, então, gradativamente, da geometria “tátil” e “real” para a formalização desta, tornando-se independente de objetos à mostra e, até mesmo, de desenhos, de modo que se vê capaz de “visualizá-la” apenas mentalmente: esta é a distinção entre o real e o possível - e, se formos pensar no possível, tendo como base as estruturas das relações espaciais expostas por Piaget e a equibração que novas experiências infringem sobre as anteriores, talvez seja possível chegarmos até o ensino de geometrias não euclidianas. O estado do Paraná foi o primeiro estado brasileiro a levar

estes conteúdos para a sala de aula. Caldatto (2011) conta que as novas propostas curriculares do estado do Paraná inseriram, há pouco tempo, atividades que despertam nos adolescentes a curiosidade e o interesse, o estudo das geometrias hiperbólica, elíptica, projetiva e dos fractais. Isto parece possível porque,

diante de um problema, o adolescente procura imaginar todas as relações possíveis para resolvê-lo, escolhe procedimentos, analisa logicamente e experimenta. Tudo isso mostra um pensamento elaborado, científico, e não só empírico. As conquistas do desenvolvimento acontecem do geral para o específico, enquanto a criança percebe 'o aqui' e 'o agora', o adolescente visa generalizações para um futuro remoto (DE SOUZA, 2010, p. 10).

Entendemos que podem ser tomados como problemas as seguintes perguntas: “É possível traçarmos um triângulo cuja soma dos ângulos seja sempre maior que 180° ?”, “Dada uma reta e um ponto fora dela, é possível que passemos por este duas retas paralelas à reta dada, diferentes entre si?” ou “Dada uma reta e um ponto fora dela, é possível que não haja nenhuma reta paralela à reta dada, passando por ele?”. Há muitas dissertações, teses e artigos, (Cavichiolo (2011), Brito (1995), Camargo (2012)) que, nos últimos anos, têm falado sobre as geometrias não euclidianas e sobre atividades para abordá-las em sala de aula. Devemos pensar melhor em como ensinar esses assuntos.

Precisaríamos de mais pesquisas sobre a teoria de Piaget e intervenções práticas para podermos afirmar se, depois das relações euclidianas construídas, seria possível pensarmos em ensinar geometrias não euclidianas por meio de uma abordagem piagetiana. Isto fica para um trabalho futuro. O que podemos afirmar até aqui é

que, sem pensarmos em como se dá a construção do espaço na criança e sem dedicarmos atenção a este processo, o ensino de geometria é falho e, sem alicerce, apenas armazenará conhecimentos de uma maneira frágil, sem significados ou interconexões, apenas com o objetivo de cumprir o programa escolar - isto se considerarmos que a geometria chegue mesmo às salas de aula e não apareça apenas como anotações nos cadernos de registros escolares.

REFERÊNCIAS

BATTRO, A. M. **O pensamento de Jean Piaget**. Rio de Janeiro: Editora Forense Universitária Ltda, 1976.

BRITO, A. de J. **Geometrias não-euclidianas: um estudo histórico-pedagógico**. 1995. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas, UNICAMP, Campinas, 1995.

CALDATTO, M. E. **O Processo Coletivo de Elaboração das Diretrizes Curriculares para a Educação Básica do Paraná e a Inserção das Geometrias Não Euclidianas**. 2011. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e o Ensino de Matemática) - Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2011.

CAMARGO, K. C. A. **A Expressão Gráfica e o Ensino das Geometrias Não Euclidianas**. 2012. 144 f. Dissertação (Mestrado em Ciências e em Matemática) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2012.

CAVICHIOLO, C. V. **Geometrias Não Euclidianas na Formação Inicial do Professor de Matemática: o que dizem os formadores**. 2011. 164 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2011.

- DE LA TAILLE, Y. O lugar da interação social na concepção de Jean Piaget. In: DE LA TAILLE, Y.; DE OLIVEIRA, M. K.; DANTAS, H. **Piaget, Vygotsky, Wallon: teorias psicogenéticas em discussão**. São Paulo: Summus, 1992.
- DE SOUZA, K. B. Piaget e a construção de conceitos geométricos. **Revista Temporis [ação]**, v. 1, n. 9, 2007. Disponível em: <www.nee.ueg.br/seer/index.php/temporisacao/article/view/30/49>. Acesso em: 03 mar. 2010.
- FERREIRO, E.; GARCÍA, R. Apresentação. In: PIAGET, Jean. **Introducción a la epistemología genética: el pensamiento matemático**. Buenos Aires: Paidós, 1975.
- KAMMI, C.; DEVRIES, R. **Piaget para a educação pré-escolar**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1992.
- LEIVAS, J. C. P. A aprendizagem de noções topológicas para classificação de quadriláteros na Licenciatura em Matemática. In: SEMINÁRIO DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO DA REGIÃO SUL, 7, **Anais...** Itajaí, 2008.
- _____. **Imaginação, Intuição e Visualização: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de matemática**. 2009. 294 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2009a.
- _____. Organizando o espaço geométrico por caminhos topológicos. **Rev. Vidya**, v. 28, n. 2, 2009b.
- PACHECO, E. D.; DE VASCONCELOS, P. A. C. Crise: espaço e representação. **Bocc**, ISSN: 1646-3137. Disponível em: <www.bocc.uff.br/pag/vasconcelos-paulo-crise-espaco.pdf>. Acesso em: 03 mar. 2010.
- PIAGET, J. **Introducción a la epistemología genética: el pensamiento matemático**. Buenos Aires: Paidós, 1975.
- _____; INHELDER, B. **A representação do espaço na criança**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1993.
- ROJO, M. D. S. **Las matemáticas de los cuentos y las canciones**. Madri: Editorial EOS, 2002.
- SCORTEGAGNA, G. M.; BRANDT, C. F. O professor e seu papel na construção do espaço pela criança. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9, **Anais...** Belo Horizonte, 2007.
- _____; _____. Contribuições dos estudos piagetianos para a elaboração de uma situação de ensino voltada para a aprendizagem da geometria. In: SEMINÁRIO DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO DA REGIÃO SUL, 7, **Anais...** Itajaí, 2008.

RECEBIDO EM: 12/07/2012.

APROVADO EM: 03/10/2012.