

## COLISÃO ENTRE DOIS PÊNDELÓS COM “EFEITO ESTILINGUE”

### “SLINGSHOT EFFECT” WITH TWO PENDULUMS

FERNANDO LANG DA SILVEIRA\*

#### RESUMO

Discute-se teoricamente a colisão com “efeito estilingue” onde um pêndulo transfere momento linear e energia cinética para um segundo pêndulo menor. Apresenta-se um interessante estudo experimental do efeito realizado a partir de um vídeo. Finalmente o “efeito estilingue gravitacional”, utilizado para aumentar a energia mecânica de sondas espaciais que passam por perto de planetas, é discutido.

**Palavras-chave:** Colisão. Transferência de momento linear. “Efeito estilingue”.

#### ABSTRACT

*We discuss theoretically the collision with the “slingshot effect” where a pendulum transfers linear momentum and kinetic energy to a second smaller pendulum. We present an interesting experimental study of the effect achieved from a video. Finally we discuss the ‘gravitational slingshot effect’ used to increase the mechanical energy of the spacecraft passed nearby planets.*

**Keywords:** Collision. Linear momentum transference. “Slingshot effect”.

---

\* Doutor. IF-UFRGS. E-mail: lang@if.ufrgs.br

## INTRODUÇÃO

O “efeito estilingue” decorre da transferência de energia cinética e momento linear de um corpo com massa  $M$  para um corpo de massa  $m$  ( $M \gg m$ ) através de uma colisão, determinando que a velocidade do corpo de massa menor seja, após a colisão, maior do que a velocidade de qualquer um dos dois corpos antes da colisão.

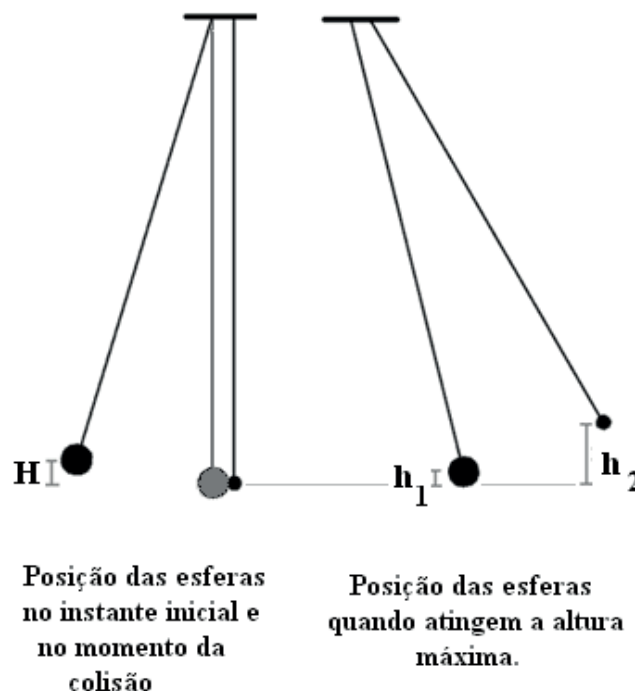
Discutiremos neste texto o “efeito estilingue” com dois pêndulos. No nosso artigo *Colisão com o “efeito estilingue”* (SILVEIRA; BRAUN, 2010), encontra-se outra instância do “efeito estilingue” com duas esferas empilhadas que são deixadas cair e colidem com o piso.

Finalmente abordaremos o “efeito estilingue gravitacional”, utilizado para aumentar a energia mecânica de naves espaciais ao passarem próximas a algum planeta SEM DISPÊNDIO de combustível.

## A COLISÃO DOS DOIS PÊNDULOS

Dois pêndulos com aproximadamente o mesmo comprimento são suspensos de tal forma que em repouso na situação de mínima energia potencial gravitacional se encontram em contato, com os centros das duas esferas alinhados horizontalmente conforme indica a figura 1.

**Figura 1** - Posição das esferas antes, durante e após a colisão.



A esfera maior, com massa  $M$ , é afastada lateralmente de modo que seu centro de gravidade se eleve por uma altura  $H$  em relação ao nível de mínima energia potencial gravitacional, enquanto a esfera menor, com massa  $m$ , continua em repouso.

Em seguida, a esfera maior é liberada e desce, transformando sua energia potencial gravitacional em energia cinética e imediatamente antes colisão se movimenta com a velocidade  $V$  que, como é fácil demonstrar admitindo-se a conservação da energia mecânica, vale

$$V = \sqrt{2gH}, \quad (1)$$

onde  $g$  é a intensidade do campo gravitacional.

Considerando que a colisão entre as duas esferas seja frontal, isto é, que após a colisão as direções dos movimentos de ambas as esferas sejam idênticas à direção do movimento anterior à colisão, e sendo  $U$  e  $u$  os valores respectivos das velocidades da esfera maior e da esfera menor, a *Lei de Conservação do Momento Linear do Sistema* relaciona as três velocidades pela expressão seguinte:

$$M \cdot V = M \cdot U + m \cdot u \quad (2)$$

Se a colisão é perfeitamente elástica, em decorrência da concomitante conservação da energia cinética de antes para depois da colisão, decorre a bem conhecida *Lei de Reversão da Velocidade Relativa*, isto é, a velocidade relativa entre as duas esferas permanece inalterada em módulo, mudando apenas seu sentido. Então

$$V = u - U. \quad (3)$$

Das expressões (1) a (3) encontra-se facilmente os seguintes resultados para as velocidades após a colisão

$$u = \frac{2M}{M+m} \sqrt{2gH}, \quad (4)$$

$$U = \frac{M-m}{M+m} \sqrt{2gH}. \quad (5)$$

As velocidades após a colisão estão relacionadas com as alturas máximas atingidas após a colisão por expressões semelhantes à expressão (1). Portanto é fácil demonstrar que as alturas máximas  $h_1$  e  $h_2$  são respectivamente:

$$h_1 = \left( \frac{M-m}{M+m} \right)^2 H \quad (6)$$

$$h_2 = \left( \frac{2M}{M+m} \right)^2 H \quad (7)$$

Na condição em que  $M \gg m$ , resulta que

$$h_1 \cong H, \quad (8)$$

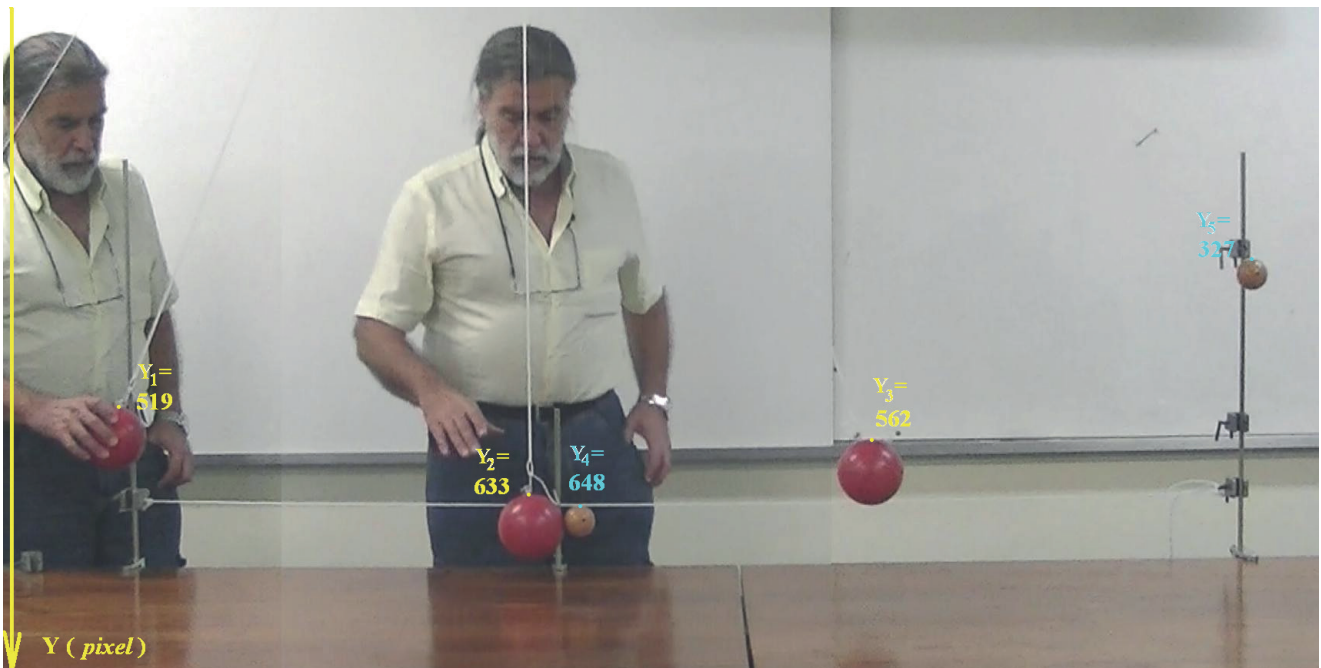
$$h_2 \cong 4H. \quad (9)$$

Ou seja, a elevação máxima do pêndulo mais leve pode chegar a ser 4 vezes maior do que a altura inicial do pêndulo mais pesado.

## ESTUDO EXPERIMENTAL

Realizamos um vídeo sobre o efeito estilingue com os dois pêndulos (<http://youtu.be/ENH4jD4b6iY> - acessado em 03/05/2013). Os dois pêndulos tinham cerca de 1,9 m de comprimento, tendo a esfera vermelha da figura 2 a massa  $M=1,18$  kg e a esfera marrom a massa  $m=0,13$  kg. A figura 2 foi obtida a partir de três quadros do referido vídeo.

**Figura 2** - Imagem obtida a partir de três quadros do vídeo indicando a posição de partida da esfera vermelha, a posição onde ocorreu a colisão e as posições extremas das duas esferas após a colisão.



Estão indicadas em unidades de *pixel* as posições *verticais* (coordenadas Y a partir do topo da imagem) das duas esferas nos três momentos capturados pelos 3 quadros que deram origem à figura 2. Estas coordenadas foram obtidas em um editor de imagens. A partir destas coordenadas é fácil a obtenção das alturas H,  $h_1$  e  $h_2$ . Ou seja,

$$H = (Y_2 - Y_1) = (633 - 519) = 114 \text{ pixel}, \quad (10)$$

$$h_1 = (Y_2 - Y_3) = (633 - 562) = 71 \text{ pixel} \text{ e} \quad (11)$$

$$h_2 = (Y_4 - Y_5) = (648 - 327) = 321 \text{ pixel}. \quad (12)$$

Das expressões (6) e (7) decorre que se podem expressar as razões entre as alturas como função das massas e as calcular então como

$$\frac{h_1}{H} = \left( \frac{M - m}{M + m} \right)^2 = \left( \frac{1,18 - 0,13}{1,18 + 0,13} \right)^2 = 0,64 \quad (13)$$

$$\frac{h_2}{H} = \left( \frac{2M}{M + m} \right)^2 = \left( \frac{2 \cdot 1,18}{1,18 + 0,13} \right)^2 = 3,25 \quad (14)$$

Os valores para as mesmas razões entre alturas, obtidos a partir diretamente das alturas encontradas nos resultados (10), (11) e (12) são

$$\frac{h_1}{H} = \frac{71}{114} = 0,62 \quad (15)$$

$$\frac{h_2}{H} = \frac{321}{114} = 2,82 \quad (16)$$

Ao comparar o resultado da expressão (13) com (15) e da expressão (14) com (16) observamos que o valor dado por (13) é maior do que (15) e que o valor dado por (14) é maior do que (16), embora sejam semelhantes tais razões.

O fato de que as razões calculadas em (15) e (16) são menores do que as razões obtidas a partir das massas decorre certamente da violação dos pressupostos do modelo que permitiu a obtenção dos resultados até a expressão (9), além das incertezas experimentais.

As hipóteses de *frontalidade* (ausência de espalhamento) e *elasticidade perfeita* (restituição completa da energia cinética de antes para depois) da colisão estão certamente violadas no experimento (apesar de aproximadamente cumpridas), explicando que as esferas não subam após a colisão tanto quanto previsto pelo modelo. Entretanto o “efeito estilingue” está evidenciado no fato de que a esfera menor sobe por cerca de 3 vezes a altura da qual a esfera maior partiu.

## O “EFEITO ESTILINGUE GRAVITACIONAL”

Uma aplicação notável de “colisão com efeito estilingue” são as manobras gravitacionalmente assistidas<sup>1</sup>. Diversas sondas espaciais utilizaram o “efeito estilingue gravitacional” para aumentar a sua velocidade e, conseqüentemente, a sua energia cinética, economizando desta forma combustível. Para tanto a trajetória da sonda deve passar perto de um planeta (ou de um corpo celeste com massa muito maior do que a massa da sonda) e a sonda deve se aproximar dele viajando no sentido oposto ao do movimento do planeta quando consideramos o Sol como sistema de referência. O interessante deste efeito é que depois de passar por perto do planeta, a sonda continua sua trajetória tendo um ganho importante de energia cinética! Tais manobras são exemplos de ‘colisões’ onde os corpos envolvidos nunca se tocam materialmente, mas apenas interagem através das forças gravitacionais. Argumenta-se a seguir que esse processo pode ser tratado como uma colisão, mesmo não havendo contato material entre a sonda e o planeta e apesar de a interação entre os dois corpos ser atrativa (as colisões que observamos cotidianamente envolvem intensas forças repulsivas quando os dois corpos se tocam, a exemplo do que acontece com os dois pêndulos).

A interação gravitacional do planeta com a sonda conserva, durante todo esse processo, o momento linear do sistema planeta-sonda, pois as forças gravitacionais são forças internas ao sistema. Adicionalmente, por serem as forças gravitacionais conservativas, haverá conservação da energia mecânica do sistema planeta-sonda durante a passagem da sonda pelas proximidades do planeta. Ou seja, enquanto a sonda se aproxima do planeta, o sistema planeta-sonda adquire energia cinética graças à diminuição da sua energia potencial gravitacional e, posteriormente, enquanto a sonda se afasta, o sistema diminui a sua energia cinética, recuperando a energia potencial gravitacional que tinha no início da aproximação (quando a distância entre a sonda e o planeta é muito maior do que distância de máxima aproximação).

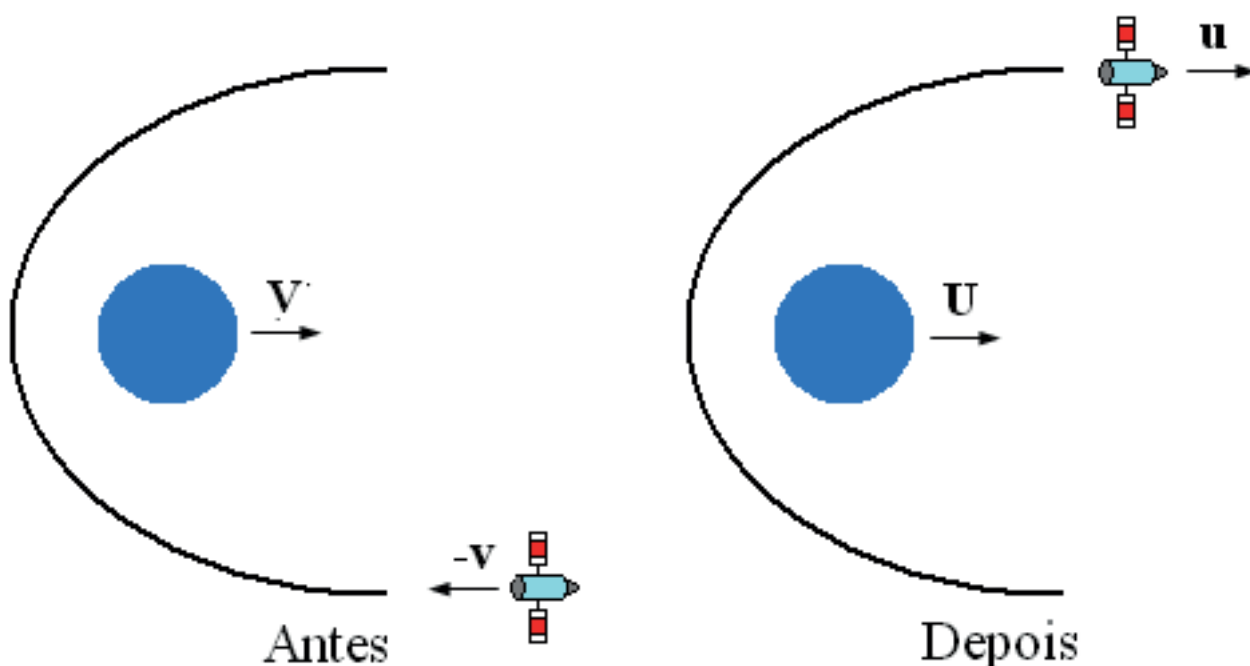
Desta forma, quando a sonda tiver se afastado suficientemente do planeta (isto é, quando novamente se encontrar a uma distância ao planeta que é muito maior do que a distância de máxima aproximação), a energia potencial gravitacional do sistema, por depender da distância relativa entre a sonda e o planeta, encontrar-se-á com o mesmo valor que tinha no início da aproximação ao planeta. Devido à conservação da energia mecânica do sistema e do retorno da energia potencial gravitacional aos valores que possuía inicialmente, a energia cinética do sistema planeta-sonda também retoma o seu valor inicial. A transição da sonda do estado muito afastado quando se aproxima do planeta para

<sup>1</sup> Disponível em: <<http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/doual.html#c4>> Acesso em: 31/08/09.

o estado em que novamente se afasta e já está muito distante do planeta, pode ser modelada como uma 'colisão' elástica, pois não houve alteração nem do momento linear, nem da energia cinética do sistema planeta-sonda.

A sonda, ao passar por perto do planeta, tem a direção da sua trajetória modificada. Assim sendo, esse processo de 'colisão' é bidimensional (BARLETT; HORD, 1985). Entretanto, por simplicidade, trataremos a situação de forma idealizada, simplificada, isto é, imaginando que apenas o sentido da trajetória tenha sido alterado. Então o processo pode ser modelado como uma 'colisão' elástica e frontal entre a sonda e o planeta. A figura 3 representa esquematicamente, no sistema de referência do Sol, a configuração das velocidades do planeta ( $V$ ,  $U$ ) e da sonda espacial ( $-v$ ,  $u$ ) respectivamente antes e depois de a sonda espacial passar por perto do planeta.

**Figura 3** – Representação esquemática das configurações das velocidades do planeta e da sonda espacial antes e depois de passar perto do planeta.



Nesta 'colisão' do planeta (cuja massa é  $M$ ) com a sonda espacial (cuja massa é  $m$ ) há conservação do momento linear do sistema constituído pelos dois corpos de acordo com a seguinte expressão:

$$M \cdot V + m \cdot (-v) = M \cdot U + m \cdot u \quad (17)$$

Adicionalmente, dado que a colisão é elástica, vale também a Lei de Reversão da Velocidade Relativa expressa como

$$V - (-v) = -(U - u) \quad (18)$$

Isolando-se  $U$  na expressão (18) e substituindo-se na expressão (17) resulta

$$u = 2 \frac{M}{M+m} \cdot V + \frac{M-m}{M+m} \cdot v \quad (19)$$

Mas como  $M \gg m$  da expressão (19) se encontra

$$u \cong 2 \cdot V + v. \quad (20)$$

Assim sendo, o módulo da velocidade da sonda aumenta pelo dobro do valor da velocidade do planeta! Pode-se facilmente também demonstrar que a velocidade do planeta permanece praticamente inalterada quando a sonda passa nas suas proximidades.

Na realidade, o acréscimo de velocidade é menor do que o dado pela expressão (20), pois a ‘colisão’ elástica da sonda com o planeta não é frontal. Não obstante, o acréscimo pode ser importante como, por exemplo, aconteceu com a sonda Cassini em 1999, que, ao retornar das vizinhanças de Vênus, passou a cerca 1200 km da superfície da Terra, aumentando a sua velocidade de 16 km/s para 21 km/s<sup>2</sup>, seguindo depois para Júpiter e Saturno. Portanto, a energia mecânica da sonda ao passar por perto da Terra cresceu em cerca de 42% sem dispêndio de combustível!

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

O interessante “efeito estilingue” pode ser viabilizado na montagem com dois pêndulos apresentada neste artigo ou com outro dispositivo experimental descrito em [1]. Ele também pode ser visto em um vídeo que permite ao usuário fazer medidas <[www.if.ufrgs.br/lavim/colisao\\_estilingue/exp\\_colisao\\_estilingue.htm](http://www.if.ufrgs.br/lavim/colisao_estilingue/exp_colisao_estilingue.htm)> (acesso em: 05/03/2014).

O “efeito estilingue”, além de despertar a nossa curiosidade e instigar para a sua compreensão, se presta a uma profícua discussão sobre colisões, envolvendo uma matemática acessível a alunos de ensino médio.

## REFERÊNCIAS

SILVEIRA, F. L.; BRAUN, L.; BRAUN, T. Colisão com “efeito estilingue”. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 32, n. 3, 3305, 2010. Disponível em: <<http://www.sbfisica.org.br/rbef/pdf/323305.pdf>>. Acesso em: 05 mar. 2014.

BARLETT, A. A.; HORD, C. W. **The slingshot effect: explanation and analogies**. *The Physics Teacher*, 466-473, nov 1985.

-----  
RECEBIDO: 01.03.2014.

CONCLUÍDO: 01.04.2014.

---

2 Disponível em: <[http://veja.abril.com.br/250899/p\\_102.html](http://veja.abril.com.br/250899/p_102.html)>. Acesso em: 11/09/09.

