VIDYA, v. 32, n. 1, p.97-112, jan./jun., 2012 - Santa Maria, 2012. **ISSN** 0104-270 X

FRACTALES A NUESTRO ALREDEDOR

Fractals around us

Juan E. Nápoles Valdes*
Leonel L. Palomá Parra**

RESUMEN

En este trabajo ilustramos, sin muchos formalismos, la presencia de los fractales a nuestro alrededor. Primeramente establecemos algunos conceptos básicos, estableciendo una clasificación de los fractales, lo que permite presentar el contenido deseado y establecer algunas conclusiones en relación a la Educación Matemática.

Palavras-chave: Fractales. Autosemejanza. Educación.

ABSTRACT

In this paper we illustrate, without much formality, the presence of fractals around us. First we establish some basic concepts, establishing a classification of fractals, allowing the desired content and present some conclusions in relation to mathematics education.

Keywords: *Fractals. Self-similarity. Education.*

* UNNE, FACENA, Av. Libertad 5050, (3400) Corrientes, Argentina, (jnapoles@exa.unne.edu.ar) Universidad Tecnológica Nacional, French 414, (3500) Resistencia, Chaco, Argentina (jnapoles@frre.utn.edu.ar).
** Universidad de Caldas, Calle 65 2610, CP 57 Manizales, Colombia (llpalomap@gmail.com) y Universidad Nacional de Colombia Sede La Nubia (llpalomap@unal.edu.co).

Preliminares

Miremos a nuestro alrededor, veremos montañas, nubes, plantas, animales, algunas personas tiene ojos claros, flores, frutas, etc.; ¿qué tienen en común todas estas cosas y muchas más? Su forma. Lamentablemente, no es posible describirla en términos de la geometría euclidiana; más que el reflejo de la perfecta armonía de un mundo sencillo y ordenado, parece ser el dominio de la irregularidad y el caos. Poco más de tres décadas han pasado desde que el concepto de fractal fue introducido por Benoit Mandelbrot[1], En 1975, Benoit B. Mandelbrot publicó un ensayo titulado **Les objets fractales: forme, hasard et dimension**, Editorial Flammarion, Paris[2]. En la introducción de la citada monografía se puede leer "*El concepto que hace de hilo conductor será designado por uno de los dos neologismos sinónimos "objeto fractal" y "fractal", términos que he inventado, ..., a partir del adjetivo latino "fractus",..*".

Figura 1 - Benoit B. Mandelbrot

En 1982 publica un nuevo libro, con gráficos espectaculares creados con la tecnología informática que, por aquel tiempo, estaba a su disposición **The Fractal Geometry of Nature**, Editorial W.H. Freeman & Co. New York. En la página 15 de esta obra Mandelbrot propone la siguiente definición "Un fractal es, por definición, un conjunto cuya dimensión de Hausdorff-Besicovitch es estrictamente mayor que su dimensión topológica".

Este concepto no es definitivo, el mismo Mandelbrot reconoce que no incluye algunos conjuntos que, por otras razones, deben incluirse en la categoría de fractales. Han sido propuestas otras definiciones y, de hecho, estamos ante un concepto geométrico para el que aún no existe un una definición precisa, ni una teoría única y comúnmente aceptada.

No obstante, durante este período de tiempo, la geometría fractal se ha establecido como una nueva rama de las Matemáticas que tiene muchas aplicaciones en áreas tan disímiles como fisiología, química, psicología, física, finanzas, biología, astronomía, geografía, música y geología lo que ha llevado a que se le preste cada día más atención.

Los fractales surgen con una pregunta aparentemente simple ¿Cuánto mide la costa de Gran Bretaña? Este fue el título de un trabajo empírico de Richardson[4]

[1] Matemático polaco-francés nacido en Varsovia (Polonia) el 20 de noviembre de 1924, de familia judía lituana y que emigró a Francia en 1936, donde se había establecido su tío Szolem Mandelbrojt, a la sazón profesor de Matemáticas en el Collège de France (miembro fundado del grupo Bourbaki) y a quien la educación de Benoît quedó confiada. Falleció el 14 de octubre de 2010 en Cambridge, Massachusetts, EEUU.

[2] Existe traducción al español Los objetos fractales, Tusquets Editores S.A., Barcelona, 1987.

de 1961 que interesó sobremanera a Mandelbrot. Consideremos cómo obtener la longitud exacta de la costa británica. Podemos tomar un mapa físico y con una regla medir la distancia total en centímetros, multiplicando esta cantidad por la unidad de escala del mapa, tenemos una longitud. Pero ésta longitud es solo aproximada, pues no siempre podemos tener en cuenta las bahías y penínsulas que aparecen por la unidad de medida tomada; para un valor más exacto, deberíamos trabajar con los instrumentos propios de agrimensores e ingenieros que nos permiten tener en cuenta esas curvas de la costa. En definitiva, ¿cómo encontrar esa longitud? Mandelbrot llegó a la conclusión que no se puede determinar esta longitud puesto que la costa británica es un patrón extremadamente complejo y no hay manera de medir las hondonadas y penínsulas pequeñas de la costa, independientemente del instrumento que usemos, los matemáticos resuelven esta cuestión usando las herramientas que le proveen la geometría euclidiana y el cálculo, pero estos patrones complejos que rompen con los conocidos de la geometría y el cálculo, resistiéndose a estas herramientas por lo que Mandelbrot decidió que no correspondían a los términos conocidos y los llamó fractales[4]. En el mapa de la izquierda se ha ilustrado esta observación, marcando dos “distancias” entre Edimburgo y Dover.

Figura 2 - Mapa de l Costa da Británica.

Figura 3 - Formas fractales vegetales. Foto de los autores

---

[3] Lewis Fry Richardson (1881-1953), sus trabajos sobre turbulencia le valieron ser elegido para la Royal Society.

[4] **How long is the coast of Britain? Statistical self–similarity and fractional dimension**, Science 156, 636-638, 1967.

El término fractal fue acuñado por Mandelbrot en 1975 de la palabra latina fractus, significando “fracturado”, o “quebrado”[5]. En términos más simples, los fractales se refieren a modelos espaciales muy irregulares o fragmentados que no pueden ser descritos en términos de la geometría euclídea. Como Mandelbrot (1975, p. 1.2) ha indicado *“Algunos conjuntos fractales son curvas, otros son superficies, todavía otros son nubes de puntos deshilvanados y aún otros son formados de una manera tan rara que para ellos no hay buenos términos en las ciencias o en las artes”*. Así, con la introducción de los fractales, los objetos que antes no podían ser definidos geométricamente debido a sus modelos irregulares o fragmentados pueden ser descritos ahora matemáticamente.

El carácter fractal de una imagen puede ser cuantificado por un parámetro llamado la *dimensión fractal* D, este parámetro cuantifica la relación entre la escala fractal usada y los modelos observados en diferentes aumentos, es decir, de su complejidad[6]. Este concepto forma parte de resultados obtenidos entre 1875 y 1925 por una pléyade de brillantes matemáticos, Besicovitch, Bolzano, Cantor, Haussdorf, Minkowski, Peano, von Kock, Weierstrass, que contaron con las contribuciones posteriores de Pontriaguin y Schnirelman (1932), Kolmogov y Tijomirov (1959-1961)y de Vilenkin, Lorenz y Levy en los años 60 y 70. En la Geometría Euclidiana, la dimensión es un concepto familiar descrito por valores enteros de 0, 1, 2 y 3 para puntos, líneas, planos y sólidos, respectivamente. Así, para una línea recta (no conteniendo ninguna estructura fractal) la dimensión D tiene un valor de 1, mientras que un área completamente llena (otra vez no conteniendo ninguna estructura fractal) tiene un valor de 2.

Los Fractales pueden ser divididos en tres categorías en dependencia de su “origen”:

- los fractales matemáticos (o sea, definidos por fórmulas o expresiones matemáticas, que permiten generar su imagen por computadoras y que sirven para simular objetos naturales)
- los fractales naturales (escenarios tales como árboles, montañas, nubes, etc.)[7]; y
- los fractales humanos (creaciones humanas que no pueden ser estudiadas por las herramientas “clásicas”, por ejemplo, secciones de las pinturas de Jackson Pollock poseen dimensión fractal[8]).

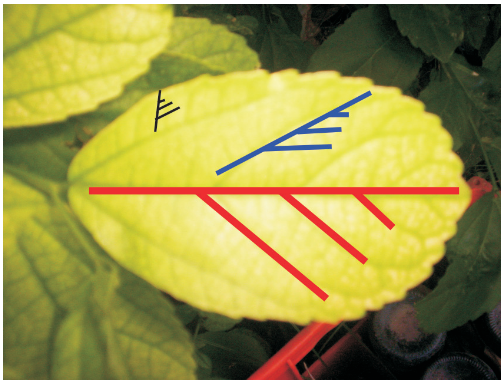


Figura 4 - Patrones de autosemejanza en una hoja. Foto de los autores.

[5] PEITGEN, H., H. JURGENS and D. SAUPE-The language of fractals, Scientific American, 263, 40-47, 1990.
[6] Ver por ejemplo, ZHOU, Guiyun and Nina S.-N. LAM-A Comparison of Fractal Dimension Estimators Based on Multiple Surface Generation Algorithms, Computers and Geosciences, 31(10), 1260-1269, 2005.

Hablando en un sentido estricto solo son fractales los de la primera clase, no obstante los fractales de la segunda y tercer clase pueden ser modelados por fractales de la primera clase o presentan algunas de las características de un fractal de este tipo.

En este trabajo ilustramos, sin muchos formalismos, la presencia de los fractales naturales y humanos a nuestro alrededor. Primeramente establecemos algunos conceptos básicos, estableciendo las diferencias con los fractales matemáticos, lo que permite presentar el contenido deseado y establecer algunas conclusiones en relación a la Educación Matemática[9].

Fractales Naturales

En contraste con la suavidad de muchos objetos humanos, las fronteras de formas naturales son a menudo mejor caracterizadas por la irregularidad y la rugosidad. Esta complejidad requiere el uso de elementos "descriptores" que son radicalmente diferentes de los de la Geometría Euclidiana o el Cálculo. Mientras que las formas euclidianas están formadas de líneas suaves (rectas o curvas), muchas formas naturales exhiben autosemejanzas a través de diferentes escalas espaciales, una propiedad descrita por Mandelbrot en el marco de su "nueva" geometría. Un objeto fractal natural de esta naturaleza, con modelos similares que se repiten en cada aumento más y más fino, es el árbol mostrado más adelante. Los modelos observados en diferentes aumentos, aunque no son idénticos, son descritos por la misma "estadística".

Figura 5 - Helechos, foto de los autores

Formalmente, no existen fractales en la Naturaleza ni producidos por el hombre. Ya que matemáticamente se definen como conjuntos que cumplen ciertas condiciones, con respecto a su dimensión y forma, tales condiciones son imposibles de cumplir por un objeto del mundo real.

Por ejemplo, para que una hoja de helecho tuviera forma fractal, tendría que cumplir el requisito de la autosemejanza (del que hablaremos más adelante). Tomemos la hoja completa, al compararla con la subhoja, vemos que se parecen mucho y ahora tomemos la subsubhoja y también su apariencia es igual (o casi) a la subhoja y a la hoja completa... Hasta aquí todo va bien, PERO, ¡Este proceso termina! Es un proceso finito ya que no podemos seguir tomando subsubsub... hojitas tan pequeñas como queramos; es aquí donde se rompe

[7] En un sentido estricto, no son fractales. Su uso se fundamenta en las características externas de tales objetos por ejemplo la rugosidad y múltiples fracturas no en las demás propiedades de un fractal, pues es imposible la existencia de autosimilitud infinita.

[8] TAYLOR R. P., A. P. MICOLICH and D. JONAS D.-Fractal analysis of Pollock's drip paintings, Nature; 399:422, 1999. Tenga en cuenta lo expresado en la nota anterior.

[9] Para detalles técnicos y más información recomendamos El infinito al alcance de la mano. Una introducción a la geometría fractal, editado por la Editorial de la Universidad Tecnológica Nacional (2006) y disponible en el sitio http://www.edutecne.utn.edu.ar/napoles-valdes/fractales.html

con la formalidad matemática del concepto autosemejanza. En la Naturaleza solo se observan procesos finitos y esta es la razón fundamental por la que no hay estructuras fractales en ella, no obstante, al margen de este formalismo, utilizaremos el término fractal natural.

Figura 6 - Forma fractal vegetal, tronco de un árbol donde se aprecia la rugosidad. Foto de los autores.

No tenemos que ir muy lejos para encontrar ejemplos de fractales naturales en el ambiente diario de nuestras casas, por ejemplo. Solo el alimento proporciona ilustraciones excelentes de formas que podrían ser clasificadas usando los conjuntos fractales identificados por Mandelbrot, la col y la lechuga (curvas), pollo rebozado frito y pizzas (superficies), puré de patatas (nubes), brócolis (puntos desconectados)y palomitas de maíz (formas raras no definibles). Otros ejemplos de fractales naturales incluyen líneas de la costa y ríos curvos (como aparecen en los mapas de enciclopedias, por ejemplo), flores como rosas o claveles, ramas de árboles, formaciones de roca, sierras, algas y otras plantas acuáticas, coral y partes de la anatomía humana como el pelo rizado, las venas, e intestinos.

Figura 7 - Más formas fractales vegetales. Foto de los autores.

Figura 8 - Formas fractales vegetales. Foto de los autores.

En lo que si estamos de acuerdo es que los fractales producen intrincados y bellos patrones que uno puede observar, casi siempre sin percatarse, día a día. A continuación, presentaremos algunas observaciones relacionados con esto. En nuestro trabajo consideraremos que una condición necesaria para que un ente natural, sea considerado un objeto fractal natural, es que se mantenga dicha estructura o una forma muy similar en un número finito de visualizaciones, como mínimo 3 etapas del crecimiento, tomemos como primer caso el helecho (vean la figura siguiente), vemos que cada etapa sucesiva del crecimiento revela autosemejanzas, las que estrechamente se parecen a etapas más tempranas, el primer cuadro de la izquierda, sería el paso 1, el cuadro derecho superior el paso 2 y el cuadro derecho inferior el 3.

La autosemejanza es un concepto que se puede entender de una forma muy intuitiva; a grandes rasgos, visualicemos un objeto geométrico, o una figura, ahora imaginemos que esta figura está compuesta de figuras mas pequeñas, cada una de las cuales es idéntica (o casi) a la figura original excepto por el tamaño; y a su vez cada una de estas figuras más pequeñas se compone de figuritas todavía más pequeñas (cada una de las cuales se ve idéntica a la figura de la cual se desprendió excepto por la escala y por lo tanto también estas últimas figuritas se ven idénticas a la figura total) y así sucesivamente... Con este procedimiento nos podemos imaginar generaciones y generaciones de figuras, cada generación se ve como su figura antecesora excepto porque es más pequeña en tamaño. Este concepto involucra la idea de semejanza que conocemos desde siempre. En la primaria aprendimos que dos figuras son semejantes si tienen exactamente la misma forma aunque sean de distintos tamaños, recordemos los teoremas sobre semejanza de triángulos.

Figura 9 E 10 - Una curiosidad. Forma fractal human realizada con plátanos. Foto de los autores.

Para definir autosemejanza, necesitamos primero del concepto de transformación de semejanza. Una transformación de semejanza en el plano o en el espacio, la obtenemos componiendo las tres transformaciones siguientes:

1. A la figura dada se le aplica una escala, aumentando o disminuyendo el tamaño.

2. Luego a la figura que se obtuvo se le aplica una rotación respecto algún centro dado y en el espacio se dice en que plano y en qué dirección tiene que rotarse la figura.

3. Finalmente se desplaza la figura que se obtuvo sin cambiar su tamaño ni girarla o rotarla.

Con estos tres pasos se obtiene una figura en la que todos sus ángulos son iguales a los de la figura original, las proporciones de la figura se preservan, salvo la escala, lo único que cambia en la figura es el tamaño y la disposición en el plano o en el espacio, vean las diferentes escalas en la imagen de la hoja, diferenciadas por colores. Con estos ingredientes decimos que dos figuras son semejantes si podemos obtener una a partir de la otra mediante una transformación de semejanza. Una figura autosemejante es una figura la cual podemos descomponer en figuras más pequeñas, cada una de las cuales es semejante a la figura original. Observemos que una figura autosemejante no es todavía un fractal, por ejemplo, una recta es autosemejante, pero no es un fractal[10].

Figura 11 - Iris, formas fractales animales. Foto de los autores.

Tomemos el caso de un árbol. Un árbol es de hecho un tronco que tiene ramas que crecen en ángulos ascendentes en posiciones diferentes. Cada una de estas ramas tiene ramas (más finas) que crecen en ángulos similares. Cada rama tiene ramitas que crecen en ángulos similares para alcanzar una hoja. Después de una observación más detenida, uno ve que las venas de una hoja se bifurcan del mismo modo que las ramitas hicieron de las ramas, las ramas hicieron de los miembros y los miembros del tronco. Es interesante el hecho que antes que los fractales fueran "descubiertos", los botánicos podían identificar el modelo de un árbol, con sus ramas y hojas, como un patrón fractal.

De los fractales naturales "vivos" podemos añadir que el mundo vegetal es especialmente fértil pues se incluyen brócolis, cactáceas, la superficie rugosa de los árboles, la ramificación de otras especies de árboles, las formaciones vegetales propias de las regiones tropicales, frutas como el ananás, la distribución de colores en una col, etc. A los lectores los invito a realizar la siguiente experiencia: vayamos a una plaza con árboles frondosos y miremos su follaje contra el azul del cielo, esa forma irregular de los bordes, no puede ser definida en términos matemáticos "clásicos".

Dentro del mundo animal, es fácil identificar como formas fractales exoesqueletos de erizos, la superficie de una medusa (ver la excelente toma en http://www.fotonatura.org/galerias/fotos/153572/), la distribución del color del iris en el ojo humano, colonias de bacterias, etc. El propio cuerpo humano es rico en ejemplos de objetos fractales, tomemos el caso del sistema circulatorio humano, como la sangre es una materia preciosa para los tejidos, el cuerpo humano emplea un sistema complejo para la entrega de ella en todas y cada una de las parte del mismo, este sistema refleja el sistema de bifurcación que presentamos antes en el caso de los árboles: las arterias conectan a las capilares, las cuales conectan a las venas hasta que la sangre es distribuida equitativamente. Los pulmones son otro ejemplo anatómico de una objeto fractal natural. Incluso el ritmo cardíaco de un corazón sano, dibujado en el electrocardiograma es una curva fractal[11].

[10] Lo afirmado aquí debe tomarse en el sentido que pueden generarse objetos con dimensión fractal a partir de motivos artísticos como es el arte decorativo árabe. Por otra parte, si bien trasciende los objetivos de este trabajo, matemáticamente podemos decir que la autosemejanza puede ser de una de los siguientes tipo: cuasi autosemejanza, exacta autosemejanza y autosemejanza estadística.

[11] Ver CIPRA, Barry A.-A healthy Heart is a fractal heart, SIAM News 36(7), September 30, 2003 disponible en http://siam.org/pdf/news/353.pdf . Mayores detalles sobre la vinculación entre las Ciencias Médicas y la geometría Fractal pueden encontrarse en EDITORIALS-Fractals and medicine, The Lancet 338: 1425-1426, 1991 y en Fractals in Biology and Medicine, Birkhauser, 1994 de Theo F. NONNENMACHER, Gabriele A. LOSA and Ewald R. WEIBEL.

Figura 12 - Edición de la página de Paul Bourke. http://local.wasp.uwa.edu.au/~pbourke/fractals/selfsimilar/

En el campo de la psicología se están logrando resultados interesantes que abren una nueva dirección de estudios[12].

Figura 13 - Formas fractales animales, foto de los autores

Otro grupo de fractales naturales está compuesto por las formas inanimadas de la Naturaleza, por ejemplo los rayos, las olas, copos de nieve, los cristales, montañas, las costas, cascadas, rocas, el terreno desecado y con grietas, las galaxias, etc. Algunos de estos tópicos son objeto de atención en variados campos, tomemos a modo de ejemplo el estudio de la deformación de algunos materiales[13]. Una de las hipótesis más fascinantes y controversiales de la ciencia actual es que el Universo tiene dimensión fractal, quizás solo dependen de los instrumentos, errores humanos o de los instrumentos,…[14]

Como conclusión a este epígrafe, quisiéramos presentar nuestra definición de objetos fractales naturales que, como sabemos, difieren de los objetos fractales propios de la Matemática. Un fractal es un conjunto matemático que puede gozar de autosimilitud a cualquier escala y su dimensión puede ser no entera. El hecho que goce de autosimilitud significa que el objeto fractal no depende del observador para ser en sí, es decir, si tomamos algunos tipos de fractales podemos comprobar que al hacer un aumento doble el dibujo es exactamente igual al inicial, si hacemos un aumento 1000 veces más grande, comprobaremos la misma característica, así pues si hacemos n aumentos, el dibujo resulta igual, luego las partes se parecen al todo.

Un conjunto u objeto es considerado frac-

[12] Ariel Osvaldo QUEZADA LEN-**Fractales en el estudio de la Psicología**, Revista Digital Universitaria 7(10), 2006 disponible en http://www.revista.unam.mx/vol.7/num10/art85/oct_art85.pdf

[13] Ubaldo ORTIZ M. y Moisés HINOJOSA R.-Geometría de fractales y autoafinidad en ciencia de materiales disponible en http://www.discereaprender.com/angelica/documentos/Libros/Geometria_de_Fractales.pdf , ver también las actividades propuestas en http://ocw.upm.es/geometria-y-topologia/geometria-de-ayer-y-hoy/contenidos/Trabajos%20Prop05-06%20Num.pdf

[14] Recomendamos el introductorio Is the universe a fractal?, Space, 09 March 2007, New Scientist Space de Amanda GEFTER, disponible en http://www.blingdomofgod.com/articles/fractaluniverse.pdf

tal cuando su tamaño se hace arbitrariamente mayor (o tendiente a cero) a medida que la escala del instrumento de medida disminuye. Por ejemplo, sea C una curva cualquiera y k la escala del instrumento de medida. Si el límite de C, cuando k se hace infinitamente pequeño es infinito (o cero) entonces se considera fractal, o sea, $C \to \infty$ ($\to 0$), cuando $k \to 0$; ejemplo del primer caso es la Curva de Von Koch, del segundo el Conjunto de Cantor. Un caso particular que no está incluido en lo anterior es el de los modelos infinitos comprimidos de alguna manera en un espacio finito, por ejemplo, curvas que llenan un cuadrado, es el caso de la familia de las Curvas de Peano, que poseen dimensión fractal 2.

Resumen de las propiedades de los fractales:

- Dimensión no entera.
- Infinitud o nulidad.
- Autosimilitud.
- Compleja estructura a cualquier escala.

Excepto la última, las tres anteriores no están presentes en todos los fractales.

Figura 14 - Formas fractales inanimadas. Foto de los autores.

Partir de esta caracterización, llamaremos objetos fractales naturales a aquellos entes naturales, animados o no, que poseen las siguientes características:

1) Poseen autosemejanza finita.

2) Exhiben rugosidad, fracturas o líneas (o superficies) quebradas.

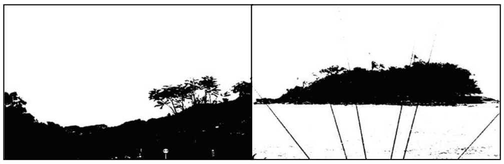


Figura 15 - Fractales naturales inanimadas. Paisajes naturales editados. Foto de los autores.

Fractales Humanos

Bajo el punto de vista de las artes podríamos decir que un fractal es básicamente la expresión visual o auditiva e incluso espacial (de cualquier dimensión) de una expresión matemática. La particularidad de la creación artística con fractales consiste en que el algoritmo de la fórmula nos conduce a una progresión ascendente o descendente de la misma y a la generación en el caso de imágenes, de expresiones visuales que se repiten y progresan hacia lo infinitamente grande o hacia lo infinitamente pequeño.

Los fractales posibilitan crear nuevos mundos en nuevas dimensiones, jugar con el caos y la aleatoriedad y las posibilidades fascinantes e infinitas que ofrecen. La visualización del mismo concepto del infinito, del todo, de la nada, del Universo... Sin lápices, sin pigmentos, sin soportes, solo con un ordenador y los programas de generación y cálculo, aunque también sin ordenadores y durante siglos, el ser humano ha utilizado patrones geométricos repetitivos siguiendo modelos fractales como elementos decorativos en vasijas, arquitectura, decoración...

Un ejemplo muy gráfico puede ser el arte decorativo árabe, basado en la repetición de motivos geométricos o los ejemplos que encontramos en el arte africano (nos detendremos en éste, más adelante). El mosaico del suelo en la cripta de la Catedral de Anagni, en el Lacio, Italia, que fue construida en el año 1104, está formado por Triángulos de Sierpinski de orden 4, 800 años antes de que definiera su famoso triángulo (similar a la de San Clemente, en España). Hay también ejemplos de recursividad en la arquitectura de catedrales góticas, como la de León en España. También podemos observar y apreciar la geometría fractal en el arte y la arquitectura hindúes, en los que se aprecian patrones recursivos y formas autosimilares. Sobre la Torre Eiffel escribe Benoît Mandelbrot en su libro **The Fractal Geometry of Nature** (páginas 131-132) *"Mi impresión es que la torre que Gustave Eiffel construyó en París, antes de conocerse las ideas de Koch, de Peano y de Sierpinski, incorpora deliberadamente la idea de una curva fractal por completo en la estructura de los ramales ascendentes de la torre"*.

El artista plástico Maurits Cornelius Escher (1898-1972) es el que mejor ha reflejado gráficamente el pensamiento matemático moderno, intuyendo los fractales y su geometría ya que sin ser matemático, sus obras muestran un interés y una profunda comprensión de los conceptos geométricos, desde la perspectiva a los espacios curvos, pasando por la división del plano en figuras iguales. Sin ordenadores y sin conocer los fractales realizó a partir de la década de los 30 del pasado siglo XX, numerosos grabados que nos incursionan artísticamente, en las cuestiones de las progresiones infinitas. Se interesó también por las construcciones imposibles, por conciliar cuestiones paradójicas entre sí y por representar la unidad de las dualidades.

Al inicio mencionábamos que la obra de Jackson Pollock, un famoso pintor del siglo recién finalizado, contiene estructuras fractales.

También es posible hacer música fractal ya que los valores numéricos que se asignan Al inicio mencionábamos que la obra de Jackson Pollock, un famoso pintor del siglo recién finalizado, contiene estructuras fractales.

También es que los valores numéricos que se asignan posible hacer música fractal ya a los parámetros que definen un fractal pueden convertirse en notas musicales. El precursor de la música mediante fractales fue Joseph Schilinger en la obra **The Schilinger Musical Composition** (1941), un vasto trabajo recogido en 12 volúmenes[15].

Figura 16 - Mosaico de la Catedral de Anagni, http://www.campusred.net/straining/cursos/C2Dignacioargote/lecciones/images/mscsierp.jpg

Mediante el empleo de técnicas fractales, se pueden generar espectaculares imágenes sintéticas simulando decorados, paisajes naturales, vuelos de aeronaves y todo tipo de zooms y travellings cinematográficos, por lo que el cine, la publicidad y los videojuegos están aprovechando este tipo de tecnologías para elaborar sus propias escenografías y efectos especiales. Así, en los últimos años, la geometría de superficies es utilizada con profusión en la generación de paisajes y personajes por ordenador. Se usan fractales, por ejemplo, para generar entornos montañosos o arborescentes (los fractales han estado siendo usados comercialmente en la industria cinematográfica, en películas como Star Wars y Star Trek. Las imágenes fractales son usadas como una alternativa ante costosos sets elaborados para producir paisajes fabulosos); y se prueban diversas propiedades topológicas hasta conseguir la veracidad deseada en las texturas (piel, tela, plumas, etc.). Un ejemplo de esto último son los personajes del Troll o de Golum en la trilogía *El Señor de los Anillos* (*Lord of the rings*. Peter Jackson, 2001-2003).

Figura 17 - Camino de adoquines, arte que puede llevarnos a un fractal. Foto de los autores.

Todas estas aplicaciones cinematográficas utilizan programas para simular determinados entornos o superficies. Yo siempre recomiendo **Fractal Creations. Explore the magic of fractals on your PC** (Waite Group Press, 1991) de Timothy WEGNER y Mark PETERSON, el cual trata la teoría de los fractales y detalla como usar el programa Fractin, revelando la programación en C, que permite construir los fractales rápidamente. Este programa permite generar fractales, así como manipularlos, editarlos y alterarlos, a diferencia de otros programas, los fractales se generan casi instantáneamente.

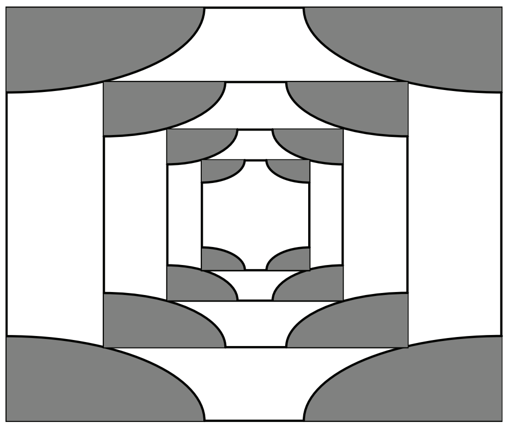


Figura 18 - Posible generación de un fractal a partir de un mosaico como el presentado en la figura anterior.

Ahora bien, estos fractales humanos que hemos presentados, son todos creaciones que utilizan procesos matemáticos más o menos definidos, por lo que quisiéramos presentar ahora algunas de las contribuciones de Ron Eglash, obtenidas de sus

[15] Para mayores detalles ver http://www.oni.escuelas.edu.ar/olimpi99/fractales/musica.htm.

investigaciones en Africa y recogidas en el libro **African Fractals: modern computing and indigenous design**, Rutgers University Press, 1999. En este libro, se muestran como las vistas áreas de las villas africanas y aún las construcciones aisladas, pueden ser simuladas utilizando algoritmos fractales. Eglash advirtió sobre las suposiciones erróneas de que esto implica un modo de vida "más natural" e hizo énfasis en el aspecto intencional de estas construcciones. Del orden propio de los patrones en Owari a las escalas logarítmicas en la fabricación de las pantallas para viento, encontramos que las ideas matemáticas que subyacen en la geometría fractal están conscientemente expresadas en una variedad de diseños africanos y sistemas de conocimiento. Por otra parte, muestra que a pesar de que cuatro de cada cinco componentes de la geometría fractal -escalas no lineales, semejanza propia, recursión e infinitud- son encontrados en África, no existe un equivalente para la medida cuantitativa de la dimensión fractal.

Las imágenes que presentamos a continuación, están tomadas del sitio de Eglahs http://www.rpi.edu/~eglash/eglash.dir/afractal/afarch.htm

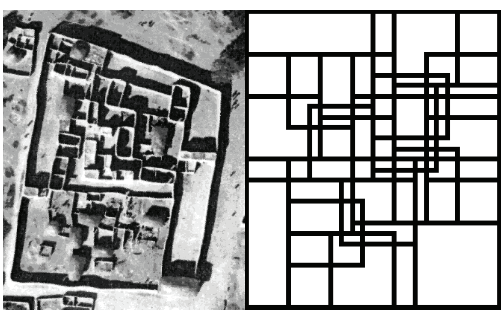


Figura 19 - Fractal Africano. Disponível em: <http://www.rpi.edu/~eglash/eglash.dir/afractal/afarch.htm>.

En la arquitectura africana, tomemos una vista aérea de la ciudad de Logone-Birni en Cameroon. Este es el mayor y más complejo edificio de la ciudad, el palacio del jefe. El modelo fractal para tal edificio es el situado a su derecha.

Lo interesante es que podemos esbozar los tres primeros pasos en la generación de tal modelo, siguiendo las siguientes figuras:

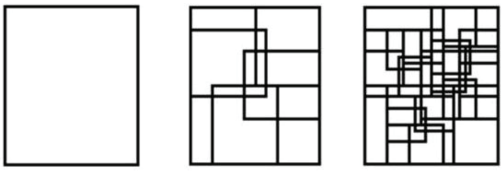
El patrón de escala no-lineal de peinado Yoruba, "Ipako Elede", puede ser también encontrado en los estilos de plantaciones de maíz afro-americanas. En la figura de la izquierda, se ha añadido el patrón que genera el peinado fractal.

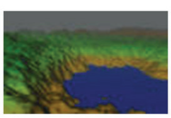
Epílogo

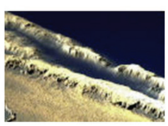
La popularidad de los fractales, creados por Benoit Mandelbrot, es inmensa. El trabajo de Mandelbrot, casi siempre en solitario y con incursiones en diferentes disciplinas, es de una enorme creatividad.

Algunas de sus ideas, aparentemente estéticas y de carácter matemático, han resultado de una gran utilidad en variados campos. En el año 2004 cumplía ochenta años y en la revista **Nature** se publicaba el artículo *Father of Fractals*, donde se hacía un interesante análisis de su vida y su obra. En el año 2003 había sido galardonado con el *Japan Prize* junto con el científico americano James A Yorke. En el trabajo de Mandelbrot se produce una interacción e integración entre el rigor matemático, ideas estéticas de carácter artístico y aplicaciones interdisciplinares. Muchas de las consecuencias de sus ideas sobre la descripción de la Naturaleza serán de enorme utilidad en la compresión de los fenómenos complejos.

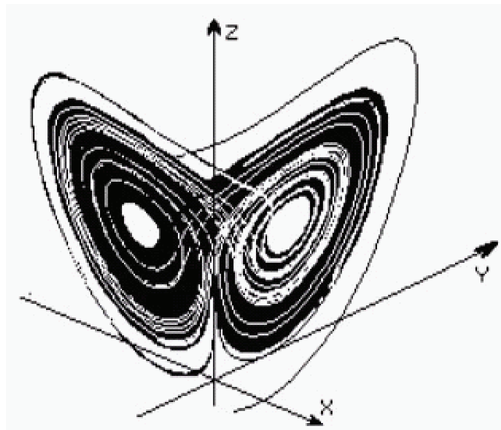
Por otra parte, a la Geometría Fractal se la conoce como la “Geometría de la Naturaleza” y nunca mejor la frase *una imagen vale más que cien palabras* si observamos las siguientes imágenes generadas por computadoras:







Por supuesto que no podríamos concluir nuestros comentarios sin presentar la Dimensión Fractal D de algunas formas fractales naturales de las que hemos hablado.



http://www.geocities.com/SiliconValley/5659/CAOS/C

Este trabajo por supuesto que es incompleto, una de las direcciones sobre la que pudiéramos abundar es la relación entre los fractales y el caos en fenómenos cotidianos (muchas veces triviales). Vamos a dar dos ejemplos:

1) En la Naturaleza tenemos sistemas que se asemejan al comportamiento mecánico de un reloj. Ello implica que planteando una serie de condiciones iniciales podremos saber como ese mismo sistema se va a comportar más delante, en un tiempo dado, de una manera “casi” exacta. Un ejemplo claro de ello es el sistema planetario. Los astrónomos pueden predecir un eclipse de Sol cientos de años antes de que ocurra con una asombrosa certidumbre. La palabra casi, es la que introduce el concepto de Caos.

2) Seguramente todos han oído hablar del famoso “Efecto Mariposa” que dice algo así como si una mariposa aletea en China, bajo circunstancias propicias esa onda puede generar un huracán en las costas bretonas el próximo año.

Bueno, ambos ejemplos son los extremos de lo que se produce en la Naturaleza, el primero sumamente mecánico y predecible y el segundo que en principio parece regido solamente por el azar.

Hay dos detalles esenciales en estos ejemplos (demasiado técnicos y que rebasan los marcos de este trabajo), uno, la dependencia o sensibilidad a las condiciones iniciales y el otro, que si representamos las trayectorias de ambos sistemas en un conveniente plano, llamado plano de Fases, se obtiene que todas las trayectorias son atraídas por una posición llamada de equilibrio y que en estos casos tiene una característica asombrosa, infinidad de trayectorias "entran" en la región de atracción, ninguna se corta, ninguna sale y más aún …. dicha región es acotada!!!!!!. Es lo que se llama un atractor extraño y debemos remontarnos hasta Poincaré para encontrar los primeros vestigios de tal "anomalía" en un problema vinculado con el ejemplo 1, el Problema de los 3 Cuerpos. Noten lo más importante de esta clase, esas imágenes de atractores anteriores, tienen una estructura FRACTAL!!!

Probablemente, el atractor extraño más famoso es el Atractor de Lorenz, vinculado a los estudios climáticos realizados por éste y cuya imagen presentamos.

Podemos resumir el impacto de los fractales en nuestras vidas desde varios puntos de vista:

- Como herramienta para matemáticos e investigadores.
- Como un método para describir la Naturaleza y medir rugosidades.
- En procesos médicos basados en estructuras fractales en nuestro cuerpo.
- En la exploración de cuerpos celestes (desde el estudio de las órbitas hasta los Anillos de Saturno).
- En el diseño de nuevas tecnologías (desde antenas fractales hasta compresión de imágenes).
- En el Arte.

El trabajo con fractales en nuestras aulas, es útil para trabajar con el alumno conceptos geométricos y actitudes adecuadas de trabajo en el aula de matemáticas de forma atractiva y creativa, mostrando una forma no convencional de utilizar las matemáticas. Permite promover en los alumnos la curiosidad por diversas cualidades geométricas y visuales estudiadas para, con posterioridad, acercarnos a la complejidad matemática de los mismos. Uno de los aspectos a destacar, implícito en la construcción de fractales, es la idea del manejo del infinito, que puede ir calando en los alumnos gracias a la recursividad del patrón, por supuesto limitada al soporte físico que se utilice (del papel hasta la PC). De esta manera la construcción simulada de formas de la Naturaleza es un ejercicio altamente motivador y estimulante: las formas, su génesis y hasta su belleza visual puede ser parametrizada o cuantificada.

Una de las dificultades es la propia definición como un conjunto matemático que cumple ciertas propiedades, pero la "definición" no es completa, en el sentido que no nombran "todas" las propiedades de la definición del conjunto fractal desde el punto de vista matemático, por ser éstas no todas visualizadas por lo que queda abierta cuál podría ser la transposición didáctica adecuada para este tipo de conceptos matemáticos, que son formales y muy complejos matemáticamente, pero con un valor didáctico importante tal y como dijimos antes.

Todo lo que nos puede brindar la geometría fractal en la Matemática Escolar, quizás puede ser ilustrada por Ian Malcom el protagonista de "Parque Jurásico" cuando dice "En el primer dibujo de la curva fractal, hay pocas pistas que permiten conocer la estructura matemática subyacente".

Tabela 1 - Formas fractales, las dimensiones y el origen.

Forma Fractal	Dimensión Fractal	Origen
Costas de Sudáfrica, Australia y Gran Bretaña	1.05-1.25	MANDELBROT, B. B.-**The fractal geometry of nature**, New York, Freeman, 1977.
Noruega	1.52	FEDER, J.-**Fractals**, New York, Plenum, 1988.
Galaxias	1.23	MANDELBROT, B. B.-**The fractal geometry of nature**, New York, Freeman, 1977.
Patrones de rocas geotermales	1.25-1.55	CAMBEL, A. B.-**Applied chaos theory: a paradigm for complexity**, London, Academic Press, 1993.
Plantas y árboles	1.28–1.90	MORSE, D. R.; J. H. LARSON; M. M. DODSON and M. H. WILLIAMSON-**Fractal dimension of anthropoid body lengths**, Nature 3, 315:731, 1985.
Olas	1.3	WERNER, B. T.-**Complexity in natural landform patterns**, Science, 102-284, 1999.
Nubes	1.30–1.33	LOVEJOY, S.-**Area-perimeter relation for rain and cloud areas**, Science 216-185, 1982.
Anémonas de mar	1.6	BURROUGH, P. A.-**Fractal dimensions of landscapes and other environmental data**, Nature 2, 295-240, 1981.
Copo de Nieve	1.7	NITTMANN, J. H. and H. E. STANLEY-**Non-deterministic approach to anisotropic growth patterns with continuously tunable morphology: the fractal properties of some real snowflakes**, Journal of Physics A, 20: L1185, 1987.
Vasos sanguíneos retinales	1.7	FAMILY, F.; B. R. MASTERS and D. E. PLATT-**Fractal pattern formation in human retinal vessels**, Physica D, 38-98, 1989.
Crecimiento de colonias de bacterias	1.7	MATSUSHITA, M. and H. FUKIWARA-**Fractal growth and morphological change in bacterial colony formation**, in J. M. GARCIA RUIZ; E. LOUIS; P. MEAKEN and L. M. SANDER (editors)-**Growth patterns in physical sciences and biology**, New York, Plenum Press, 1993.
Descargas eléctricas	1.75	NIEMEYER, L., L. PIETRONERO and H. J. WIESMANN-**Fractal dimension of dielectric breakdown**, Physical Review Letters, 53:1033, 1984.

RECEBIDO EM: 10.02.2012.
APROVADO EM: 05.06.2012.