VIDYA, v. 32, n. 1, p.35-49, jan./jun., 2012 - Santa Maria, 2012. **ISSN** 0104-270 X

ANÁLISE DAS ESTRATÉGIAS UTILIZADAS PELOS ESTUDANTES NO ESTUDO DE FUNÇÕES LOGARÍTMICAS E EXPONENCIAIS

ANALYSIS OF STRATEGIES USED BY HIGH SCHOOL STUDENTS STUDYING LOGARITHMIC AND EXPONENTIAL FUNCTIONS

ADRIANA TIAGO DOS SANTOS*
BARBARA LUTAIF BIANCHINI**

RESUMO

Este artigo tem como finalidade apresentar alguns resultados da pesquisa realizada com estudantes do 3º ano do Ensino Médio que visa o ensino das Funções Logarítmicas utilizando o software GeoGebra. Tais resultados foram obtidos na aplicação de uma sequência didática composta de quatro sessões. Neste trabalho, apresentamos os resultados da Sessão IV cujo objetivo das atividades propostas é possibilitar o reconhecimento da função logarítmica como a função inversa da exponencial. Os referenciais teóricos que subsidiaram esta pesquisa foram: os Registros de Representação Semiótica (DUVAL, 2003) e os Processos do Pensamento Matemático Avançado (DREYFUS, 1991) e como metodologia de pesquisa os pressupostos da Engenharia Didática. A análise dos protocolos em conjunto com a observação das discussões feitas pelos sujeitos da pesquisa durante o desenvolvimento da sessão permitiu-nos constatar que as duplas apresentaram dificuldade em fazer a conversão do registro gráfico para o registro algébrico. O uso do GeoGebra possibilitou a visualização das funções estudadas no registro gráfico e os sujeitos realizaram comparações entre várias funções para concluírem que a função logarítmica é a inversa da função exponencial. As atividades propostas mobilizaram o desenvolvimento dos processos do PMA como: visualização, comparação, generalização e abstração.

Palavras-chave: Geogebra. Função logarítmica. Função Exponencial. Ensino Médio.

ABSTRACT

This article presents some results of the research made with students in the last year of high school studying Logarithmic Functions using the GeoGegra software. The results were obtained with the application of a didactic sequence composed of four sections. The purpose of the activities discussed in Session IV is to allow the recognition of the logarithmic function as the function that is the inverse of the exponential one. The theory that form the basis of this research are: Records of Semiotic Representation (Duval, 2003), Advanced Mathematical Thinking Processes (Dreyfus, 1991,) and as a research methodology, the assumptions of the Didactic Engineering. The analysis of the protocols in conjunction with the observation of the discussions made by the research subjects during the development of the session helped to conclude that the pairs had difficulty making the conversion of the graphic record to the algebraic record. The use of GeoGebra allowed the visualization of the functions studied in the graphic record and the subject made some comparisons between the various functions to conclude that the logarithmic function is the inverse of the exponential function. The proposed activities mobilized the development of the PMA processes, such as: visualization, comparison, generalization and abstraction.

Keywords: *GeoGebra. Logarithmic Function. Exponencial Function. High School.*

* Mestre em Educação Matemática pela PUC/SP, professora da Rede Pública Estadual de Ensino do Estado de São Paulo, professora do Departamento de Ciências Exatas da UNINOVE. *E-mail:* adriana_larissa.le@hotmail.com
** Doutora em Psicologia da Educação pela PUC/SP; professora do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC/SP, professora associada do Departamento de Matemática da PUC/SP. *E-mail*: barbara@pucsp.br

INTRODUÇÃO

Este artigo tem como propósito apresentar resultados de nossa pesquisa realizada com alunos do 3º ano do Ensino Médio em uma escola da rede estadual de São Paulo, no município de Itaquaquecetuba, obtidos da dissertação de mestrado desenvolvida pela primeira autora e orientada pela segunda.

Nossa investigação foi composta por uma sequência didática que abarca os temas funções exponenciais e logarítmicas. A escolha do tema justifica-se após a leitura de resultados de pesquisas Bianchini e Puga (2006), Nasser (2009), Ardenghi (2008), que apontaram que os estudantes apresentam no ensino superior dificuldades com essas funções, apesar de fazer parte do repertório de conteúdos que integram o Currículo do Ensino Médio, segundo as Orientações Curriculares do Ensino Médio – OCEM - (BRASIL, 2006).

Tais orientações apontam a necessidade da exploração das diversas representações de uma função, tanto algébrica como gráfica, de modo que se explore e se registre qualitativamente a relação entre o crescimento e o decrescimento entre as variáveis e que sejam entendidas de modo global. É sugerido que os professores solicitem aos alunos expressarem com palavras uma função dada por meio da forma algébrica. É importante salientar o significado da representação gráfica das funções quando são apresentados seus parâmetros, para identificar os movimentos realizados pelo gráfico de uma função quando se alteram os coeficientes.

No que diz respeito ao uso das tecnologias, Dreyfus (1991) argumenta que o uso de um ambiente de aprendizagem computacional no ensino da Matemática pode favorecer os Processos do Pensamento Matemático Avançado (PMA) como a visualização, observação, abstração e a generalização. Muitas vezes a representação de um mesmo conceito utilizado de forma alternada por meio de um *software* pode suscitar relações normalmente implícitas a se tornarem explícitas, o que pode contribuir para que o estudante estabeleça relações entre ideias em síntese para a formação de conceitos.

Para Kenski (2001), as ferramentas computacionais podem ser vistas como auxílio no processo de ensino e aprendizagem devidamente articuladas como uma estratégia pedagógica que oportunizam a construção crítica do conhecimento. Contudo, não substituem o papel do professor, nem resolvem todos os problemas de dimensões escolares, mas podem no contexto de sala de aula e para além dele oportunizar a dinâmica da experimentação.

Concordamos com os autores citados acima que o uso de *software* gráfico pode auxiliar na compreensão do conceito da função exponencial, escolhemos o GeoGebra por ser um *software* livre e favorecer a representação gráfica e algébrica de forma simultânea.

Desta forma, para a elaboração de nosso instrumento de pesquisa e análise das produções dos alunos, escolhemos como referencial teórico os Registros de Representação Semiótica (DUVAL, 2009) para a escolha de atividades que contemplem a coordenação de diversos registros de representação semiótica e utilizamos o software GeoGebra com o intuito de favorecer uma estratégia didático-pedagógica de ensino, ou seja, fazer uso desta tecnologia de forma planejada com objetivos previamente estabelecidos de forma que o estudante possa desenvolver os processos de: observar, conjecturar, levantar hipóteses, generalizar e abstrair. Tais processos são importantes para o desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado (PMA) (DREYFUS, 1991).

Neste artigo, apresentamos as análises dos resultados da Sessão IV cujo objetivo foi apresentar, por meio do registro de partida, a representação no registro gráfico das funções (com o auxílio do *software* GeoGebra), explorar os conceitos de simetria e função inversa para que os alunos pudessem concluir que a função logarítmica é a inversa da função exponencial.

Os Processos do Pensamento Matemático Avançado (PMA)

Dreyfus (1991) afirma que para ter compreensão em Matemática os processos mentais e psicológicos devem estar intimamente ligados, ou seja, esses aspectos raramente são separados. As imagens mentais e a Matemática estão muito ligadas, essa ligação entre esses processos é relevante para entender a aprendizagem e o desenvolvimento do PMA.

Segundo o autor, as representações mentais são de grande relevância na Matemática e no caso das funções, os gráficos, as tabelas de valores, os diagramas de flechas e fórmulas algébricas são as diversas representações desse conceito.

A essência dos processos do PMA está presente nos processos de representar, visualizar, generalizar, classificar, conjecturar, induzir, analisar, sintetizar, abstrair e formalizar.

É importante ter muitas representações de um mesmo conceito, porém somente a existência delas por si próprias não é suficiente para permitir a flexibilidade da utilização do conceito na resolução de problemas. É necessário o processo de alternar entre as representações existentes de um mesmo conceito. Porém, ensinar e aprender este processo de mudança não é fácil.

O processo de generalização, segundo Dreyfus (1991), consiste em observar ou induzir dados, para identificar aspectos comuns, para expandir os domínios de validade. É partir de um caso particular para um caso geral, isto não é uma tarefa fácil, mas deve ser salientado que a generalização que ocorre com relação a determinados objetos matemáticos é importante para o estudante porque ele deixa de esperar o conhecido em "terra firme" para lidar com a generalidade que adicionou à situação.

Os Registros de Representação Semiótica

Para Duval (2003), a originalidade cognitiva não está em partir dos erros para entender as "concepções" e a origem as dificuldades dos alunos para entender álgebra ou outro campo da Matemática, mas sim procurar descrever inicialmente o funcionamento cognitivo que possibilite a um aluno compreender e ter autonomia para desenvolver processos matemáticos que lhe são propostos em situações de ensino.

A diferença entre a atividade cognitiva requerida pela Matemática ou aquela requerida em outros domínios do conhecimento não deve ser procurada nos conceitos, mas na importância primordial das representações semióticas, ou seja, o tratamento matemático depende do sistema de representação utilizado e de que os objetos matemáticos não são perceptíveis ou observáveis com a ajuda de instrumentos. O autor designou os diferentes tipos de representações semióticas utilizados em Matemática como **registros** de representação.

Duval (2003) apresenta a hipótese de que a compreensão em Matemática supõe a coordenação de, ao menos, dois registros de representação semiótica. Esta coordenação está presente na atividade de conversão que consiste na mudança de representação de um registro para outro. A conversão é uma atividade de transformação representacional fundamental, é aquela que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão e não pode ser reduzida a uma "codificação" como forma simples de tratamento.

Nesse contexto, a conversão da representação de uma função no registro algébrico do registro de partida para a representação no registro gráfico e no registro de chegada não deve ser vista apenas como um conjunto de regras associado a um ponto, associado a um par de coordenadas no sistema cartesiano de forma pontual. É necessária uma apreensão global e qualitativa a fim de explorar as variáveis visuais (crescimento, decrescimento, relação com os coeficientes da função) das funções no registro gráfico (DUVAL, 2003).

Ao analisar uma atividade de conversão por meio da comparação entre a representação no registro de partida com a representação terminal no registro de chegada, poderão ocorrer duas situações: a congruência em que a representação terminal transparece na representação do registro de partida e a conversão está próxima de uma situação de simples codificação e quando ela não transparece absolutamente e se dirá que ocorre a não congruência.

Na Figura 1, ilustramos como realizamos a articulação dos registros de representação semiótica da função logarítmica conforme a teoria de Duval.

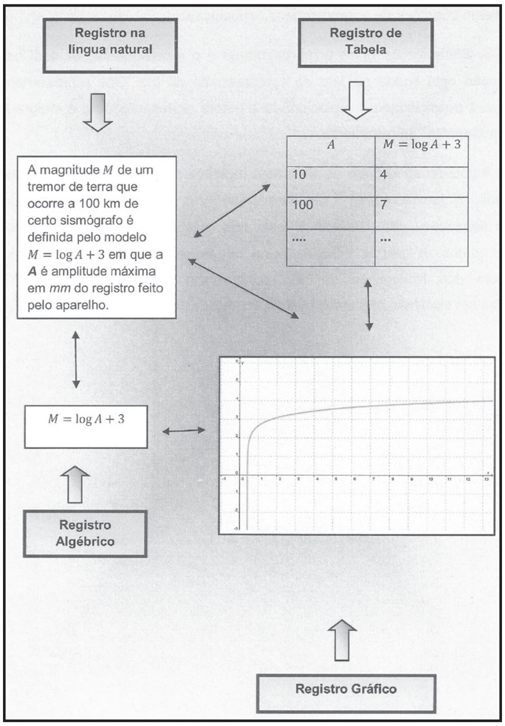


Figura 1 - Articulação entre os registros de representação semiótica.
Fonte: SANTOS, 2011, p. 33.

Concordamos com Duval quando ressalta que para haver a compreensão Matemática é necessária a mobilização de dois ou mais registros de representação, para que não haja confusão entre o conteúdo de uma representação com o objeto representado. Esse reconhecimento é a condição fundamental para que um aluno transfira ou modifique formulações ou representações de informações durante uma resolução de problemas.

Procedimentos Metodológicos

A metodologia que utilizamos para subsidiar a realização desta pesquisa foram os pressupostos da Engenharia Didática, que favorecem uma ligação entre a investigação do conteúdo que se quer propor em sala de aula e entre a ação pedagógica.

A Engenharia Didática, segundo Artigue (1995), inclui quatro fases: estudos preliminares em que são realizados estudos sobre o quadro teórico didático geral, os conhecimentos já adquiridos sobre o objeto matemático estudado, como análise epistemológica do ensino atual e seus efeitos. Na análise a *priori*, é realizada descrição das escolhas a serem feitas para a construção da sequência, previsão das estratégias de resolução das atividades. A experimentação é a fase da aplicação da sequência didática proposta. A análise a *posteriori* consiste no confronto entre os resultados da experimentação e a descrição realizada na análise a *priori*, esse processo é chamado de validação.

Realizamos quatro sessões para o ensino da função logarítmica. Nas sessões I e II, colocamos atividades que contemplassem situações-problema envolvendo a potenciação e o estudo da função exponencial. Na sessão III, apresentamos atividades com objetivo de estudar os logaritmos.

Apresentaremos neste artigo a análise a *posteriori* das atividades da sessão IV cujo objetivo é possibilitar o reconhecimento da função logarítmica como a função inversa da exponencial.

Descrição e aplicação da Sequência

A aplicação da sequência foi realizada durante o mês de maio de 2010, em uma escola pública da rede estadual de São Paulo no município de Itaquaquecetuba.

Pedimos a autorização da equipe gestora da escola (direção e coordenação) para a realização da pesquisa, que a fizeram prontamente e se prontificaram a auxiliar em qualquer material didático que precisássemos.

Convidamos os alunos do 3º Ano do Ensino Médio para participar da pesquisa fora do horário de aula. O critério utilizado para a escolha dos participantes foi o da disponibilidade de horário vespertino para a realização das atividades. Participaram 6 alunos durante 8 encontros com a duração de aproximadamente 2 horas para a realização das quatro sessões. Os alunos se organizaram em dupla e doravante serão chamadas: D1, D2 e D3.

Os alunos que se voluntariaram para participar da pesquisa foram alunos de salas diferentes, pois na escola há 4 turmas de 3º Ano do Ensino Médio com aproximadamente 47 alunos frequentes em cada uma. Não tínhamos informações sobre o desempenho destes alunos no que se refere ao conhecimento matemático e desconhecíamos suas dificuldades em Matemática.

As sessões foram realizadas em um laboratório denominado pela Secretaria da Educação como projeto "Acessa Escola" que funciona como uma espécie de lan house e possui 27 computadores. Nesta sala são disponibilizados alunos estagiários para a manutenção do uso controlado dos computadores. Orientamos os participantes a fazer a leitura das atividades com muita atenção e calma sem se preocupar com os possíveis erros e acertos.

Salientamos que as atividades seriam entregues para as duplas e pedimos para que em todas as sessões permanecessem sempre com a mesma dupla. Disponibilizamos as atividades impressas, folhas em branco para rascunhos, uma calculadora científica para cada dupla. Solicitamos para que evitassem o uso da borracha e lápis, pois queríamos analisar o processo de resolução das atividades e não somente o resultado. Também solicitamos a autorização dos responsáveis legais dos alunos para participar da pesquisa e para gravar em áudio os diálogos das duplas durante as sessões. Os alunos já utilizavam a calculadora científica durante as aulas de Matemática, mas até o momento da aplicação só conheciam as funções básicas de uma calculadora comum.

Para familiarização com o *software*, na segunda sessão, mostramos algumas funções na tela do GeoGebra e deixamos cerca de 15 minutos para os alunos o explorarem.

As duplas solicitaram nossa ajuda após várias discussões entre si e procuramos indagá-los com outras questões sem induzir à resposta, pois para nós o processo de investigação e descoberta é importante para a consolidação da aprendizagem. Percebemos a responsabilidade dos alunos para resolver as questões e durante os encontros nenhum aluno ausentou-se.

As atividades foram adaptadas do Caderno do Professor elaborado pela Secretaria Estadual de Educação do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2009) de forma que se possa privilegiar a coordenação entre a conversão dos registros de representações semióticas fundamentada pela teoria de Duval (2009) e observar quais processos do Pensamento Matemático Avançado podem ser suscitados durante a aplicação da sequência didática e nas análises dos resultados.

Análise das atividades da Sessão IV

Apresentaremos a seguir as análises dos resultados das produções das duplas D1, D2 e D3 para cada uma das atividades propostas. Os recursos utilizados para a obtenção desses resultados foram: protocolos e rascunhos produzidos pelos alunos e a transcrição das gravações em áudio realizadas durante a aplicação.

As análises foram feitas à luz da teoria dos Registros de Representação e Semiótica (DUVAL, 2009) e identificamos quais processos do Pensamento Matemático Avançado estiveram presentes nos diálogos e protocolos das duplas.

A Sessão IV foi realizada com o auxílio do *software* GeoGebra. Nosso objetivo foi explorar a visualização do gráfico de funções no registro gráfico, e o conceito de função inversa de uma função para que ao final da Sessão, os alunos pudessem concluir que a função logarítmica é a inversa da função exponencial. Encontra-se no Anexo I as atividades que compõe a Sessão IV.

A estratégia que a dupla D1 utilizou para encontrar a expressão algébrica foi diferente do que previmos em nossa análise *a priori*. Ao utilizar o *software* GeoGebra, digitou várias funções tais como $f(x) = x^2$, $g(x) = x$ e $h(x) = x^3$ e percebeu que para encontrar o gráfico das funções da primeira questão, uma função afim, esta teria que ter um expoente 1.

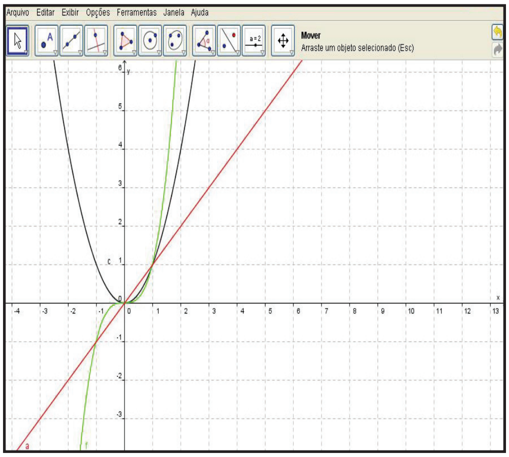
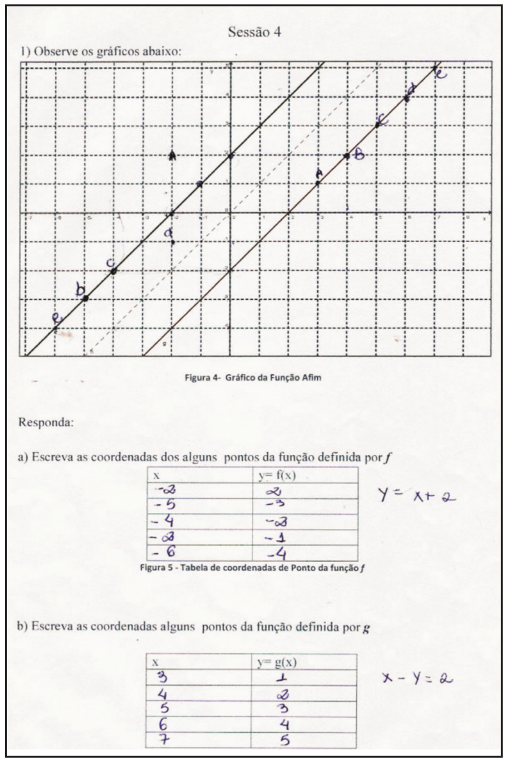


Figura 2 - Protocolo da dupla D1 - Sessão IV
Fonte: SANTOS, 2011, p. 172.

Podemos observar que o processo de visualização que o software proporciona possibilita ao estudante uma forma de observar relações que, neste caso, dependendo do expoente da variável, o gráfico muda. Podemos dizer que a dupla realizou a conversão do registro gráfico para o registro algébrico.



Sessão 4

1) Observe os gráficos abaixo:

Figura 4- Gráfico da Função Afim

Responda:

a) Escreva as coordenadas dos alguns pontos da função definida por *f*

x	y= f(x)
-2	2
-5	-3
-4	-2
-2	-1
-6	-4

Figura 5 - Tabela de coordenadas de Ponto da função *f*

Y = x + 2

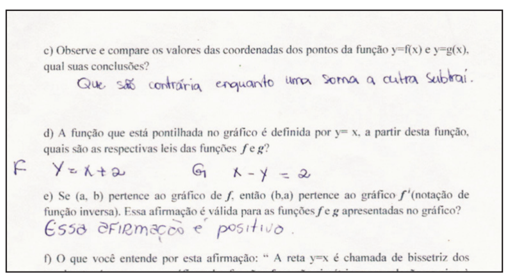
b) Escreva as coordenadas alguns pontos da função definida por *g*

x	y= g(x)
3	1
4	2
5	3
6	4
7	5

x - y = 2

Figura 3 - Protocolo da dupla D1 - Sessão IV.
Fonte: SANTOS, 2011, p. 173.

Após várias tentativas, D1 conseguiu encontrar as expressões algébricas que representavam o gráfico. Para completar as tabelas marcou vários pontos ao longo das retas e conseguiu completá-las.



c) Observe e compare os valores das coordenadas dos pontos da função y=f(x) e y=g(x), qual suas conclusões?

Que são contrária enquanto uma soma a outra subtrai.

d) A função que está pontilhada no gráfico é definida por y= x, a partir desta função, quais são as respectivas leis das funções *f* e *g*?

F Y = x + 2 G x - y = 2

e) Se (a, b) pertence ao gráfico de *f*, então (b,a) pertence ao gráfico *f*'(notação de função inversa). Essa afirmação é válida para as funções *f* e *g* apresentadas no gráfico?

Essa afirmação é positivo.

f) O que você entende por esta afirmação: " A reta y=x é chamada de bissetriz dos

Figura 4 - Protocolo da dupla D1 - Sessão IV
Fonte: SANTOS, 2011, p. 173.

2) a) Construa a função $f(x) = \log_2 x$ e escreva na tabela abaixo alguns pontos assinalados no gráfico abaixo:

x	y= f (x)
1	0
4	2
8	3
16	4
32	5
64	6

Figura 7- Tabela de coordenadas de ponto da função definida por f

b) Construa o gráfico da função $g(x) = 2^x$ e escreva alguns pontos assinalados no gráfico na tabela abaixo:

x	y= g (x)
0	1
2	1
4	2
8	3
16	4

Figura 8- Tabela de coordenadas de ponto da função definida por g

Figura 5 - Protocolo da dupla D1 - Sessão IV
Fonte: SANTOS, 2011, p. 174.

Com relação ao conceito da função inversa, não foi possível saber se foi abstraído pela dupla D1, o registro em seu protocolo ficou em branco. Não sabemos se foi por esquecimento ou por não saber explicar. Mas por meio do áudio, observamos que o **aluno R** disse: *"Bem, as funções log e exponenciais são inversas, porque os valores do x de uma função é o y da outra função"*. Notamos que essa dupla interagiu bastante entre si e teve dificuldade em justificar suas respostas por meio do registro em língua natural.

A princípio a dupla D2 não compreendeu o que foi pedido no item (a) e pediu-nos um auxílio. Explicamos que deveria procurar algumas coordenadas de alguns pontos da função f e completar as tabelas.

a) Escreva as coordenadas dos alguns pontos da função definida por f

x	y= f(x)
-3	-1
3	4
1	3
-6	-4
-4	-2

Figura 5 - Tabela de coordenadas de Ponto da função f

b) Escreva as coordenadas alguns pontos da função definida por g

x	y= g(x)
-2	-4
1	-1
3	1
5	3
6	4

Figura 6 - Protocolo da dupla D2 - Sessão IV.
Fonte: SANTOS, 2011, p. 175.

A dupla D2 completou a tabela sem o uso do *software* GeoGebra. Pedimos a esses alunos que executassem o software GeoGebra e construíssem o gráfico das funções referentes à questão 1 (cujo enunciado se encontra na Figura 10). A dupla achou difícil, pois não sabia qual expressão algébrica deveria digitar na janela do GeoGebra para encontrar uma expressão que representasse os gráficos das funções que constavam na primeira questão. **O aluno F** disse: *"Acho que isso deve estar relacionado com equação da reta então vamos tentar digitar:* $y = 2x,\ 2x + 1,\ -2x + 1.$*"*

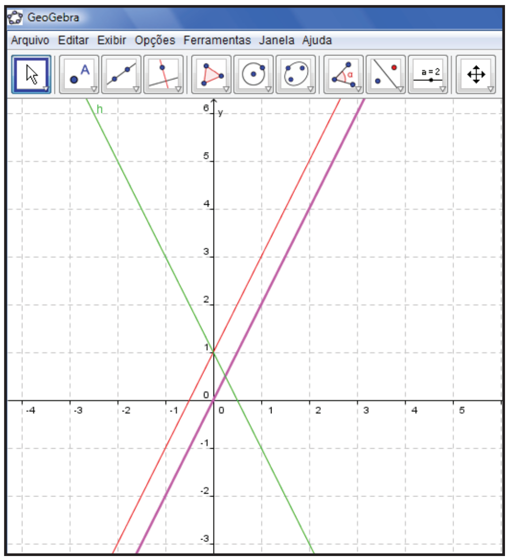


Figura 7 - Protocolo da dupla D2 – Sessão IV.
Fonte: SANTOS, 2011, p. 176.

A **aluna H** disse: *"Se observarmos as retas estão passando pelo* $y = 1$ *na forma crescente e decrescente. Então vamos digitar alguma coisa que o* x *tem que ser igual a 2, bem, vamos digitar* ***1x*** *para ver.* E escreveu: $f(x) = x,\ g(x) = x + 1,\ h(x) = x - 1.$"

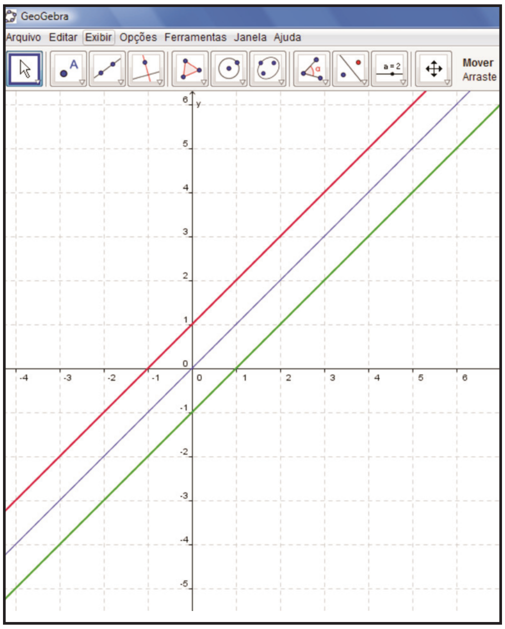


Figura 8 - Protocolo da dupla D2 - Sessão IV.
Fonte: SANTOS, 2011, p. 176.

A **aluna F** disse: *"Olha só, a reta está passando no eixo do **x**, então quando digitamos* $f(x) = x, g(x) = x + 1, e\ g(x) = x - 1$ *isso quer dizer que o +1, e o -1, são os valores em que a reta corta no eixo do **x** e no caso da atividade 1, as retas cortam nos valores que* $x = 2, x = 0, e\ x = -2$ *."*

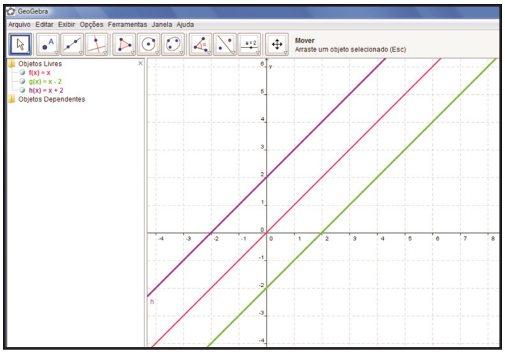
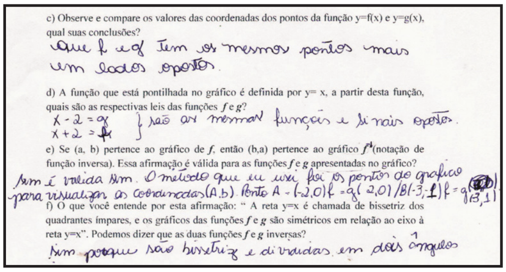


Figura 9 - Protocolo da dupla D1 - Sessão IV.
Fonte: SANTOS, 2011, p. 177.

A **aluna H** disse: *"Ah! Finalmente conseguimos! Isso é muito difícil, mas esse GeoGebra ajuda muito, porque não precisamos desenhar gráfico, pois o processo é demorado"*. Depois que elas (alunas F e H) e digitaram as expressões algébricas das funções na janela de entrada, foi pedido para que abrissem o menu **ferramentas** e habilitassem a opção **janela de Álgebra**, para que surgisse a expressão algébrica.



c) Observe e compare os valores das coordenadas dos pontos da função y=f(x) e y=g(x), qual suas conclusões?

Que f e g tem os mesmos pontos mais em lados opostos.

d) A função que está pontilhada no gráfico é definida por y= x, a partir desta função, quais são as respectivas leis das funções *f* e *g*?

x - 2 = g
x + 2 = f } são as mesmas funções e sinais opostos.

e) Se (a, b) pertence ao gráfico de *f*, então (b,a) pertence ao gráfico f^{-1}(notação de função inversa). Essa afirmação é válida para as funções *f* e *g* apresentadas no gráfico?

Sim é valida sim. O método que eu usei foi os pontos do grafico para visualizar as coordenadas(A.b). Ponto A - (-2,0) f = g(2,0) / B(-3,-1) f = g (3,1)

f) O que você entende por esta afirmação: " A reta y=x é chamada de bissetriz dos quadrantes ímpares, e os gráficos das funções *f* e *g* são simétricos em relação ao eixo à reta y=x". Podemos dizer que as duas funções *f* e *g* inversas?

Sim porque são bissetriz e divididas em dois ângulos

Figura 10 - Protocolo da dupla D2 - Sessão IV
Fonte: SANTOS, 2011, p. 178.

Ao analisarmos o diálogo entre a dupla D2 e também os seus protocolos, observamos que, inicialmente, sentiram dificuldades para fazer a conversão do registro gráfico para o registro algébrico. Essa atividade é um fenômeno de não congruência, pois o processo algébrico para fazer essa conversão não é tão simples. Duval afirma que:

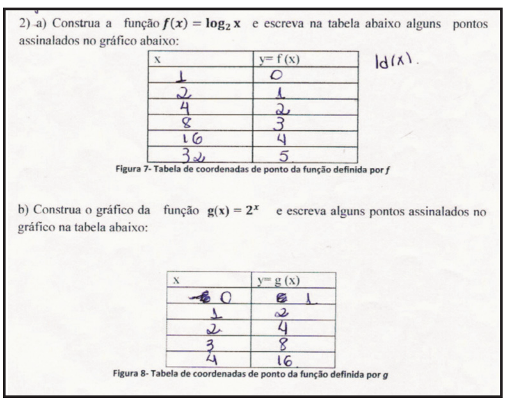
> Geralmente, no ensino, um sentido de conversão é privilegiado, pela ideia de treinamento, num sentido estaria automaticamente treinando a conversão no outro sentido. Os exemplos propostos aos alunos são instintivamente escolhidos, evidentemente, nos casos de congruência. Infelizmente esses

não são os casos mais frequentes (DUVAL, 2003, p. 20).

Segundo Brolezzi e Barufi (2007), no Ensino Médio, o estudo de algumas funções elementares se restringe apenas à expressão algébrica, a mudança de registro é feita apenas em um único sentido e dificilmente é dado o gráfico de uma função para encontrar a sua expressão algébrica.

Acreditamos que essa abordagem em um único sentido pode ser um fator que pode causar dificuldades na abstração do conceito de uma função por meio de outras representações.

Os processos do Pensamento Matemático Avançado que podemos destacar, nesta atividade, foram o processo de visualização, mudança de representação, elaborar e testar conjecturas e a generalização. Segundo Dreyfus (1991), o uso do computador pode facilitar o desenvolvimento desses processos para que ocorra a aprendizagem.



2) a) Construa a função $f(x) = \log_2 x$ e escreva na tabela abaixo alguns pontos assinalados no gráfico abaixo:

x	y= f (x)
1	0
2	1
4	2
8	3
16	4
32	5

ld(x).

Figura 7- Tabela de coordenadas de ponto da função definida por *f*

b) Construa o gráfico da função $g(x) = 2^x$ e escreva alguns pontos assinalados no gráfico na tabela abaixo:

x	y= g (x)
~~6~~ 0	~~6~~ 1
1	2
2	4
3	8
4	16

Figura 8- Tabela de coordenadas de ponto da função definida por *g*

Figura 11 - Protocolo da dupla D2 - Sessão IV. Fonte: SANTOS, 2011, p. 178.

Em nossa análise *a priori*, prevíamos que os alunos observassem, por meio da tabela, que os pares ordenados (a, b) da tabela referente pertencem f à função definida por $f(x) = \log_2 x$ são os mesmos (b, a) que pertencem à função g definida por $g(x) = 2^x$ e portanto são funções inversas. Essa característica de '"*Pensar ao contrário" não é automática*" [...]. (BROLEZI; BARUFI, 2007, p. 28)

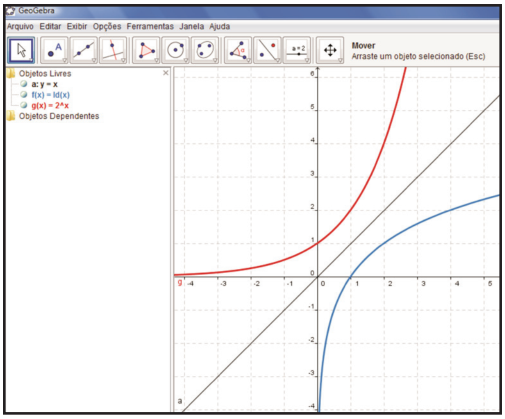


Figura 12 - Protocolo da dupla D2 - Sessão IV. Fonte: SANTOS, 2011, p. 178.

Desta forma, a dupla D2 não percebeu inicialmente que as funções f e g eram inversas, mas a abstração deste conceito tornou-se possível quando utilizou o software GeoGebra pois digitou as expressões algébricas de duas funções na janela de entrada do software em um mesmo sistema cartesiano e concluiu, a partir da visualização dos dois gráficos, que uma função é inversa da outra.

Assim como a dupla D1, para completar a tabela, a dupla D3 também escreveu pontos que pertenciam às retas que são respectivamente as representações gráficas das funções f e g e não encontraram dificuldades para resolver os itens (a) e (b).

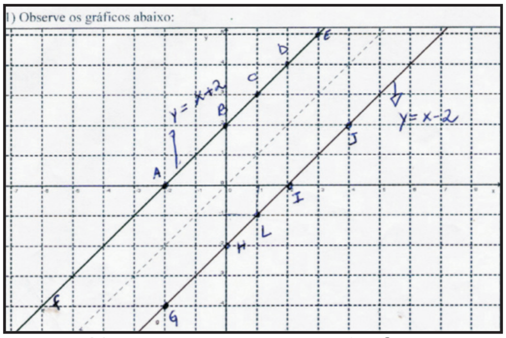
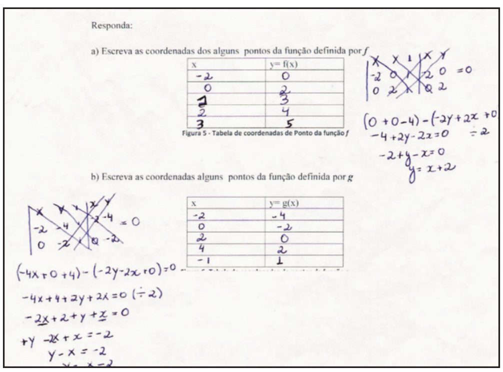


Figura 13 - Protocolo da dupla D3 - Sessão IV.
Fonte: SANTOS, 2011, p. 180.

Para encontrar a expressão algébrica das respectivas funções, utilizou o cálculo de determinantes conforme Figura 14 e encontrou a expressão $y = x + 2$ e $y = x - 2$.

Desse modo, podemos dizer que a dupla D3 realizou a conversão no registro gráfico para o registro algébrico. Não previmos em nossa análise a priori o uso de conhecimentos referentes à Geometria Analítica para resolver as questões, pois acreditávamos que o fato dos alunos observarem os pares ordenados nas tabelas, seria o suficiente para concluírem que as funções definidas por f e g são inversas.



Responda:

a) Escreva as coordenadas dos alguns pontos da função definida por f

x	y= f(x)
-2	0
0	2
1	3
2	4
3	5

Figura 5 - Tabela de coordenadas de Ponto da função f

$(0+0-4)-(-2y+2x+0)$
$-4+2y-2x=0 \quad \div 2$
$-2+y-x=0$
$y=x+2$

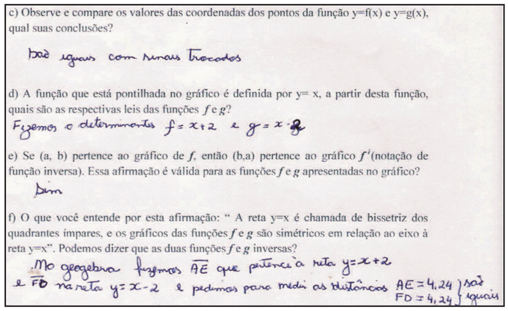
b) Escreva as coordenadas alguns pontos da função definida por g

x	y= g(x)
-2	-4
0	-2
2	0
4	2
-1	1

$(-4x+0+4)-(-2y-2x+0)=0$
$-4x+4+2y+2x=0 \ (\div 2)$
$-2x+2+y+x=0$
$+y \ -2x+x=-2$
$y-x=-2$

Figura 14 - Protocolo da dupla D3 - Sessão IV.
Fonte: SANTOS, 2011, p. 180.

No caso da dupla D3, a estratégia utilizada levou-nos a ter como hipótese o fato de os alunos estarem estudando conceitos da Geometria Analítica na época da aplicação desta atividade. A dupla observou que seria possível encontrar a equação da reta para a solução da primeira questão.



c) Observe e compare os valores das coordenadas dos pontos da função y=f(x) e y=g(x), qual suas conclusões?

São iguais com sinais trocados

d) A função que está pontilhada no gráfico é definida por y= x, a partir desta função, quais são as respectivas leis das funções f e g?

Fizemos o determinantes $f = x+2$ e $g = x-2$

e) Se (a, b) pertence ao gráfico de f, então (b,a) pertence ao gráfico f'(notação de função inversa). Essa afirmação é válida para as funções f e g apresentadas no gráfico?

Sim

f) O que você entende por esta afirmação: " A reta y=x é chamada de bissetriz dos quadrantes ímpares, e os gráficos das funções f e g são simétricos em relação ao eixo à reta y=x". Podemos dizer que as duas funções f e g inversas?

No geogebra fizemos $\overline{AE}$ que pertence à reta $y=x+2$ e $\overline{FD}$ na reta $y=x-2$ e pedimos para medir as distâncias $AE=4,24$ $FD=4,24$ são iguais

Figura 15 - Protocolo da dupla D3 - Sessão IV.
Fonte: SANTOS, 2011, p. 174.

Ao utilizar o software GeoGebra, a estratégia utilizada para verificar se as funções f e g são inversas uma da outra foi o recurso a conceitos de Geometria, como também para justificar as suas conclusões. Podemos verificar que houve uma conversão do registro gráfico para o registro figural.

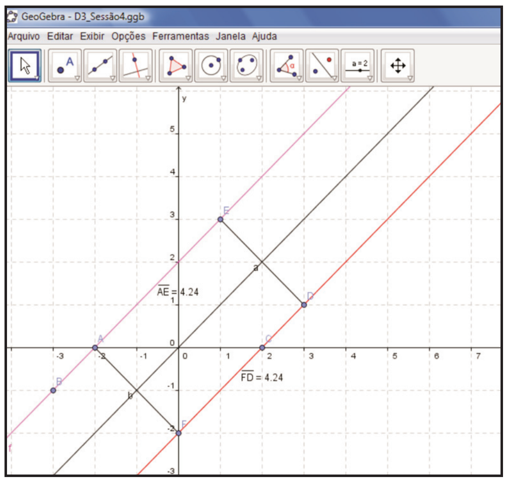
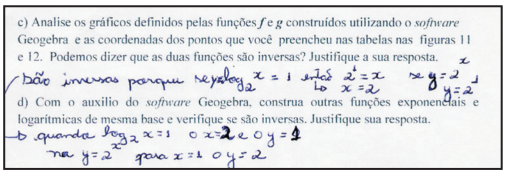


Figura 16 - Protocolo da dupla D3 - Sessão IV.
Fonte: SANTOS, 2011, p. 183.

Para escrever a justificativa, utilizou o recurso da Geometria Plana; podemos visualizar em um retângulo AEFD que a distância entre AE e FD são iguais e a reta $y = x$ intercepta AF e ED em pontos médios de AF e ED, portanto possuem mesma distância e desta forma concluíram que são inversas. Os processos do Pensamento Matemático Avançado envolvidos foram os da visualização, observação e a generalização.


c) Analise os gráficos definidos pelas funções *f* e *g* construídos utilizando o *software* Geogebra e as coordenadas dos pontos que você preencheu nas tabelas nas figuras 11 e 12. Podemos dizer que as duas funções são inversas? Justifique a sua resposta.

São inversas porque se $\log_2 x = 1$ então $2^1 = x$ → $x = 2$ se $y = 2^x$ $y = 2^1$

d) Com o auxilio do *software* Geogebra, construa outras funções exponenciais e logarítmicas de mesma base e verifique se são inversas. Justifique sua resposta.

→ quando $\log_2 x = 1$ o $x = 2$ e o $y = 1$
na $y = 2^x$ para $x = 1$ o $y = 2$

Figura 17 - Protocolo da dupla D3 - Sessão IV.
Fonte: SANTOS, 2011, p. 183.

Ao analisarmos o protocolo acima, podemos concluir que a dupla D3 relacionou a função logarítmica como a inversa da função exponencial, e para isso fez a conversão do registro gráfico para o algébrico e comparou as coordenadas das funções f definidas por $f\,(x) = \log_2 x$ para $f(2) = 1$ e para a função g definida $g(x) = 2^x$ quando $g(1) = 2$ Portanto a função f terá um ponto como coordenada (2,1) e no segundo caso terá como coordenada (1,2), concluindo então que são funções inversas.

Podemos observar os processos do Pensamento Matemático Avançado como a visualização, comparação e a generalização, pois a dupla a partir da visualização propiciada pela janela gráfica do GeoGebra comparou as coordenadas das funções f e g e generalizou que o que ocorria para alguns pontos dos dois gráficos das funções f e g acontecia para todos (generalização).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este artigo teve como propósito apresentar resultados de nossa pesquisa realizada com alunos do 3º ano do Ensino Médio em uma escola da rede estadual de São Paulo no município de Itaquaquecetuba.

Neste trabalho apresentamos os resultados da sessão IV cujo objetivo das atividades propostas foi o de possibilitar o reconhecimento da função logarítmica como a função inversa da exponencial.

Percebemos que as três duplas conseguiram fazer as atividades com o uso de estratégias diferentes e não previstas por nossa análise *a priori*. A única dupla que relacionou as coordenadas dos pontos de uma função, com as coordenada da sua inversa, foi a dupla D3. Este fato ocorreu apenas quando estiveram observando o comportamento da função logarítmica e a exponencial que foi a estratégia esperada em nossa análise *a priori*.

O uso do software GeoGebra como uma estratégia didático-pedagógica contribuiu para a aprendizagem destes alunos. Todas as duplas destacaram a importância da visualização do gráfico da função no software, além da possibilidade de testar outras funções de modo dinâmico e rápido.

Na sessão IV, a *aluna H* disse: *"Ah! Finalmente conseguimos! Isso é muito difícil, mas esse GeoGebra ajuda muito, porque não precisamos desenhar gráfico, porque processo é demorado"* (dupla D1).

De modo geral, podemos dizer que as principais dificuldades que surgiram foram no tratamento numérico e algébrico, principalmente no momento em que foi solicitado para que completassem as tabelas, pois eram necessários conhecimentos prévios sobre as propriedades das potências. Esse fato já havíamos constatado em outras pesquisas realizadas sobre esta temática. Outra dificuldade que podemos ressaltar foi a justificativa no registro da língua natural, a dupla D1 foi muito enfática em dizer que:

"Nas aulas de Matemática, em geral, não somos motivados a justificar as nossas conclusões com palavras, mas apenas com números" (dupla D1).

Os avanços dos alunos foram claramente destacados na sessão IV, pois cada dupla utilizou uma estratégia diferente para descobrir a expressão algébrica das funções a partir do registro de partida no registro gráfico e realizaram a conversão do registro gráfico para o registro algébrico.

Essas estratégias nos surpreenderam, pois foi diferente do que previmos em nossas análises *a priori*. Esperávamos que os alunos observassem as coordenadas de alguns pontos que pertenciam às retas que estavam no enunciado e as observassem, para que compreendessem o conceito de função inversa, no entanto, quando os alunos utilizaram o *software* GeoGebra, as estratégias foram diversas, utilizaram recursos de tentativa e erro, recurso da Geometria e o cálculo de Determinantes estudados em Geometria Analítica.

Esses avanços para nós foram de fato relevantes. A compreensão do conceito de função inversa é complexa e muitas vezes utilizamos apenas o registro algébrico como estratégia de ensino. Entendemos que não é simples para os alunos perceberem a relação existente entre essas duas funções: a exponencial e a logarítmica.

Dreyfus (1991) defende que o uso do computador como ambiente de aprendizagem, utilizando diferentes representações de um mesmo conceito pode contribuir para estabelecer relações entre elas e o surgimento de ideias para a formação de conceito que podemos chamar de processos de investigação.

Acreditamos que o uso do *software* GeoGebra permitiu aos alunos envolvidos nesta pesquisa a ação de descoberta, pois, a partir da observação dos gráficos das funções, puderam levantar hipóteses, testá-las e finalmente validar as suas conjecturas. O seu papel foi importante na aplicação desta sessão de acordo com o objetivo pretendido nas atividades propostas.

Porém cabe ressaltar que o papel do professor é fundamental em aulas que a tecnologia está presente, pois sabemos que ela isoladamente não garante o aprendizado do aluno.

Assim, podemos concluir que nosso objetivo foi alcançado, pois gostaríamos de mostrar que a função logarítmica é a inversa da exponencial e todas as duplas demonstraram ter abstraído essa noção, entretanto, sabemos que o conceito de função inversa é um conteúdo complexo e deve ser mais explorado ao longo do Ensino Médio, priorizando a conversão entre os registros de representação.

Como reflexão da nossa prática, ao realizar esta pesquisa, percebemos o quanto é trabalhoso elaborar uma sequência didática e planejar estratégias de ensino com objetivos previamente estabelecidos. Percebemos que o uso apenas de materiais pedagógicos e livros didáticos em que os exercícios estão prontos não é suficiente para contribuir para a aprendizagem. É necessário que o professor escolha situações-problema que possibilitem aos alunos a oportunidade para investigar, elaborar e testar hipóteses, conjecturar e assim tornar possível a generalização e abstração de um conceito matemático.

Para tanto, concluímos o quanto a formação continuada do professor é importante, pois contribui para o crescimento profissional e consequentemente refletirá na aprendizagem dos alunos.

Como pesquisadoras esperamos que a leitura deste artigo possa contribuir para novas pesquisas na Educação Matemática e para a reflexão da prática docente dos colegas professores de Matemática.

REFERÊNCIAS

ARDENGHI, M. J. **Ensino e aprendizagem do conceito de função**: Pesquisas realizadas no período de 1970 a 2005 no Brasil. 2008. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2008.

ARTIGUE, M; DOUADY, R.; MORENO, L. **Ingeniería didática em Educación Matemática**: um esquema para la investigación y la innovación em la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. Bogotá: Pedro Gómez, 1995.

BIANCHINI, B. L; PUGA, L. Z. Função: Diagnosticando Registros de Representação Semiótica. In: **REFREMAT -** Revista Eletrônica de Republicação em Educação Matemática: UFSC, p. 5-16, 2006.

BRASIL. Secretaria da Educação Básica. **Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Orientações Curriculares para o Ensino Médio;** volume 2. Brasília, MEC, 2006.

BROLEZZI, A. C; BARUFI, M.C.B. **História da Matemática e ensino de cálculo**: reflexão sobre o pensamento reverso. Guarapuava: SBHMat, 2007.

DREYFUS, T. Advanced Mathematical Thinking Processes. In: Tall, David. **Advanced Mathematical Thinking.** Kluwer Academic Publishers: Dordrecht – Holanda, 1991, p. 25-41.

DUVAL. Registros de Representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: MACHADO. S. D. A (Org). **Aprendizagem em Matemática**: Registros de representação semiótica. Campinas, SP: Papirus, p. 11-33, 2003.

______. **Semiósis e Pensamento Humano**: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais (Fascículo I)- Tradução: LEVY, L. F; SILVEIRA. M. R. A. 1. ed. – SãoPaulo: Livraria da Física, 2009.

KENSKI, V. M. Comunidades de aprendizagem: em direção a uma nova sociabilidade na educação. **Revista de Educação e Informática** “Acesso” SEED/SP, n. 15, dez. 2001.

NASSER, L. Uma Pesquisa sobre o desempenho de alunos de cálculo no traçado de gráfico. In: FROTA, Maria Clara Rezende; NASSER, Lilian (Org.). **Educação Matemática no Ensino Superior**: pesquisas e debates. Recife: SBEM, 2009.

SANTOS, A. T. C. **O Ensino da Função Logarítmica por meio de uma sequência didática ao explorar suas representações com o uso do *software* GeoGebra.** 2011. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2011.

SÃO PAULO (ESTADO). Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. **Caderno do Professor de Matemática.** 1º ano Ensino Médio, v. 3, 2009.

RECEBIDO EM: 01/11/2011.
APROVADO EM: 11/02/2012.