VIDYA, v. 39, n. 1, p. 55-71, jan./jun., 2019 - Santa Maria, 2019. **ISSN** 2176-4603

# *JÁ-ENCONTRADOS* NA APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA: QUAIS IMPLICAÇÕES?

## *MET-BEFORES IN LEARNING MATHEMATICS: WHAT IMPLICATIONS?*

**DANIELE PERES DA SILVA MARTELOZO***
**ANGELA MARTA PEREIRA DAS DORES SAVIOLI****

**RESUMO**

Neste artigo teórico e qualitativo, temos como intenção discutir sobre os efeitos das experiências matemáticas dos indivíduos em suas aprendizagens atuais e/ou futuras. Sustentamos nossas discussões e considerações no quadro teórico dos Três Mundos da Matemática, de David Tall, e em trabalhos de autores que abordam essa temática, especialmente ao conceito de *já-encontrado*. Para tanto, apresentamos um mapeamento de pesquisas nacionais - teses e dissertações, a fim de trazer resultados empíricos evidenciados em investigações com estudantes da Educação Básica e do Ensino Superior envolvendo *já-encontrados* e suas influências na aprendizagem de conceitos matemáticos. Nossas análises confirmam e evidenciam a importância de considerar e como lidar com experiências matemáticas anteriores, sobre *já-encontrados colaboradores* e *dificultadores* pertencentes e influenciadores no processo de aprendizagem da Matemática. A maneira que os estudantes lidam com seus *já-encontrados* pode acarretar em dificuldades ou sucesso no que se refere ao desenvolvimento do pensamento matemático.

**Palavras-chave:** Três Mundos da Matemática. *Já-encontrados*. Aprendizagem da Matemática. Educação Matemática.

***ABSTRACT***

*In this theoretical and qualitative article, we intend to discuss the effects of the mathematical experiences of individuals in their current and/or future learning. We support our discussions and considerations in the theoretical framework of the Three Worlds of Mathematics, of David Tall, and in works by authors who approach this theme, especially the concept of the term met-before. To do so, we present a mapping of national researches - theses and dissertations, in order to bring empirical results evidenced in investigations with students of Basic Education and Higher Education involving met-befores and their influences in the learning of mathematical concepts. Our analysis confirms and highlights the importance of considering and how to deal with previous mathematical experiences about supportive met-befores and problematic met-befores belonging to and influencing the process of learning mathematics. The way that students deal with their met-befores one scan lead to difficulties or success in the development of mathematical thinking.*

***Keywords:*** *Three Worlds of Mathematics. Met-befores. Learning of Mathematics. Mathematics Education.*

* Doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina - (UEL), Paraná, Brasil. E-mail: dani-peres@hotmail.com. Orcid: https://orcid.org/0000-0002-9881-5907
** Doutora em Matemática pela Universidade de São Paulo (USP). Docente da Universidade Estadual de Londrina - UEL, Londrina, Paraná, Brasil. Professora do Programa de Matemática e do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina (UEL), Londrina/PR, Brasil. E-mail: angelamarta@uel.br. Orcid: https://orcid.org/0000-0002-5624-6398

## CONTEXTUALIZANDO

Concernente ao contexto de sala de aula, quando se pretende investigar aspectos ligados aos processos de ensino e de aprendizagem, neste caso específico, referente às aulas de Matemática, há que se considerar os sujeitos envolvidos, professor e estudantes. Tendo em vista esses participantes, faz-se necessário compreender e refletir acerca das múltiplas questões que podem permear e influenciar o conjunto de ações desenvolvidas nesse cenário, por exemplo, elementos afetivos, elementos cognitivos, o sistema de ensino, o ambiente físico, aspectos de natureza política e social, as experiências anteriores desses indivíduos que compõe esse ambiente, entre outras. Esses elementos, ou ainda, as interações entre eles certamente influenciarão na aprendizagem dos indivíduos ao constituírem esse cenário. Prosseguimos considerando esse contexto.

Nesse âmbito, a ação docente reflete uma prática recheada de desafios. Tendo em vista esses desafios, os processos de ensino e de aprendizagem tornam-se complexos, demandando reconstruções, retomadas e reflexão, tanto para o professor, como para os estudantes. Essa consideração é consenso nas teorias de aprendizagem, assim como na área de Educação Matemática. Também é consenso na Educação Matemática que o desenvolvimento cognitivo é um processo particular, uma vez que os sujeitos são distintos, compondo-se de variados aspectos, apresentando diferentes formas de pensamento, de aprendizagem, de expressão, de representação, enfim, de desenvolvimento, os quais carecem de necessidades diferentes.

Essa multiplicidade de elementos que compõe cada estudante, que influencia e atua nos processos de ensinar e de aprender, propõe uma reflexão acerca da necessidade de considerá-los e, mais que isso, de discutir maneiras de investigá-los a fim de potencializar a aprendizagem. Dessa forma, neste artigo, dentre alguns dos diferentes aspectos os quais interferem no desenvolvimento desses processos, voltamos nossos olhares, para um, presente e importante na aprendizagem da Matemática: as experiências anteriores dos estudantes referentes à Matemática.

Nesse sentido, ao falarmos de elementos que influenciam a aprendizagem de estudantes, destacamos a “bagagem” dos estudantes, isto é, seus conhecimentos anteriores referentes à aprendizagem de conceitos matemáticos nas diferentes formas de operar matematicamente, e ainda, a maneira em que interpretam novas situações, em contextos distintos, a partir do que já vivenciaram. Diante de uma situação não familiar ao estudante, por exemplo, quando lhe é apresentado expressões algébricas, ele pode empregar relações já familiares com operações numéricas desenvolvidas em outro contexto, com a intenção de interpretar a nova situação. Nessa ideia, podemos pensar sobre a situação em que o estudante atribui um valor numérico a uma determinada expressão algébrica, a partir da familiaridade em “obter um resultado” para expressões numéricas.

Nesse contexto, destacamos a importância de considerar e como abordar em sala de aula com aprendizagens anteriores dos estudantes ao lidar com a Matemática, uma vez que esses construtos mentais podem auxiliar ou dificultar o desenvolvimento do pensamento matemático. O construto mental dessas experiências anteriores recebe o nome de *já-encontrados*[1] (TALL, 2013). Para essa discussão, sustentamo-nos no conceito de *já-encontrado,* sendo este, central da teoria dos Três Mundos da Matemática (TALL, 2013).

Assim, as discussões apresentadas neste artigo, são provenientes de reflexões iniciadas em uma pesquisa de doutorado, da primeira autora, sob a orientação da segunda. Logo, com o conceito de *já-encontrado*, temos como intenção *discutir sobre os efeitos das experiências matemáticas dos*

1 A expressão *já-encontrado* vem do inglês *met-before* (TALL, 2013) e foi traduzido por Lima (2007). Neste artigo utilizamos essa tradução.

*indivíduos em suas aprendizagens atuais e/ou futuras, com vistas a potencializar o desenvolvimento do pensamento matemático.*

Ao longo do texto que compõe este artigo, a partir da literatura, trazemos considerações que se referem a esse conceito, assim como, na terceira seção, a fim de ratificar as reflexões e apontamentos realizados, apresentamos resultados empíricos evidenciados em pesquisas (teses e dissertações) com estudantes da Educação Básica e do Ensino Superior, envolvendo *já-encontrados* e suas influências na aprendizagem de conceitos matemáticos. Ao trazermos o conceito de *já-encontrado* para a discussão em que se propõe este artigo, torna-se relevante apresentarmos de maneira breve, o quadro teórico que sustenta esse termo. Assim, esboçadas as intenções e o contexto deste artigo, na seção a seguir, discorremos a respeito da origem desse conceito, bem como suas principais contribuições no que tange a aprendizagem da Matemática.

## *JÁ-ENCONTRADOS* NA APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA: COMPREENDENDO SUAS ORIGENS

Com investigações envolvendo a construção e a compreensão de conceitos matemáticos, muitas foram as teorias relacionadas à cognição, destacando-se vários pesquisadores, por exemplo, Sfard (1991), Dubinsky (2002), Dreyfus (1991), Tall (2013), entre outros que se debruçam acerca de questões referentes à construção e/ou desenvolvimento intelectual do pensamento matemático.

A partir de aproximadamente meio século de investigação, Tall (2013) apresenta resultados de uma intensa investigação a respeito do desenvolvimento do pensamento matemático em longo prazo, bem como traz aspectos que discutem como os indivíduos aprendem a pensar, desde o nascimento, nos primeiros níveis de ensino, ao Ensino Superior. Nesta pesquisa, tratamos de aspectos teóricos que abordam o desenvolvimento do pensamento matemático a partir da teoria do educador matemático David Tall, ao quadro teórico apresentado e discutido no livro *"Como os Humanos Aprendem a Pensar Matematicamente: Explorando os Três Mundos da Matemática*[2] (TALL, 2013). Iniciamos com considerações centrais desse quadro teórico, para posteriormente, direcionarmos nossa atenção ao conceito de *já-encontrados.*

Para o autor, os indivíduos iniciam o desenvolvimento do pensamento matemático a partir do nascimento, uma vez que nascemos com uma estrutura em nossa mente, a qual contempla aspectos humanos fundamentais ao desenvolvimento do pensamento matemático e que compartilhamos ao longo de nossas experiências. Esses aspectos são denominados de "já-estabelecidos[3]", são eles*:* o *reconhecimento* de padrões; a *repetição* de ações até que não precise mais de reprodução, e a *linguagem* no desenvolvimento da aprendizagem.

Assim, os seres humanos, a partir de atributos inatos e na medida em que passam por experiências, vivenciando situações em contextos diferentes, vão realizando conexões mentais a fim de que desenvolvam estruturas de conhecimento (TALL, 2013). O autor emprega a expressão "estrutura de conhecimento" no sentido de como é concebido e estruturado o conhecimento na mente do ser humano, referente ao seu desenvolvimento, sendo que esse termo

> [...] pode ter várias conotações em ciência cognitiva, filosofia e outras disciplinas. Refiro-me aqui de forma ampla para as relações que existem em um contexto ou situação específica, incluindo várias ligações entre conceitos, processos, propriedades, crenças e assim por diante (TALL, 2013, p. 6).

2 How Humans Learn to Think Mathematically: Exploring the Three Worlds of Mathematics
3 Do inglês, set-before, traduzido por Lima (2013).

Nesse sentido, uma estrutura de conhecimento diz respeito a algo mais geral, incluindo em uma situação ou contexto, o estabelecimento de relações, propriedades, conceitos, processos, experiências vivenciadas. A partir da construção e/ou reconstrução de estruturas de conhecimento, à medida que vão sendo refinadas, elaboradas, estas podem tornar-se conceitos pensáveis, ou seja, quando um fenômeno é concebido na mente de um indivíduo como algo simples, ou ainda, quando um objeto matemático é comprimido, podendo ser acessado quando necessário, uma vez que esses conceitos "[...] estão bem organizados para especificar estruturas que são uma consequência da própria Matemática" (TALL, 2013, p. 27).

Quando aos estudantes são proporcionadas experiências matemáticas, bem como formas distintas de operar matematicamente, estes podem desenvolver conceitos pensáveis cada vez mais sofisticados (TALL, 2013). Ao longo da jornada da aprendizagem, os indivíduos comprimem conhecimentos em conceitos pensáveis de formas distintas, com o objetivo de que os conceitos matemáticos sejam compreendidos, ou seja, que ocorra a aprendizagem. Para tanto, essa jornada requer interações entre conceitos matemáticos por meio de diferentes formas de lidar com a Matemática, a fim de criar novas estruturas de conhecimento, o que pode ser posteriormente, outros conceitos pensáveis. Logo, a construção de conceitos pensáveis faz-se presente na aprendizagem dos conceitos matemáticos, consequentemente, no desenvolvimento de estruturas de conhecimento cada vez mais elaboradas.

Com o desenvolvimento do pensamento matemático dos indivíduos, ao longo de vivências familiares e escolares, estes vão realizando diferentes experiências ao lidar com a Matemática, a fim de que os estudantes transitem em contextos distintos. Seguindo neste raciocínio, essas mudanças de contexto, que promovem reconstruções nas estruturas cognitivas, envolvem misturas de ideias a fim de estabelecer relações entre conceitos, construir novos conceitos e *insights*, sendo estas reconstruções, fundamentais para a evolução do pensamento matemático (TALL, 2013).

Para Tall (2013), as experiências ao lidar com a Matemática devem acontecer por meio da exploração e do desenvolvimento de modos distintos de operar matematicamente, ou seja, experiências em Três Mundos da Matemática, assim denominados pelo autor.

Dessa maneira, esse quadro teórico (TALL, 2013), entre outros conceitos, apresenta e discute três formas fundamentais e interligadas a respeito de como os indivíduos desenvolvem o pensamento matemático em longo prazo. Essas formas de operar matematicamente, que vão se refinando à medida que o indivíduo lida com os conceitos matemáticos, são denominadas em Três Mundos: Conceitual Corporificado, Operacional Simbólico e Formal Axiomático[4].

Nos próximos parágrafos, trazemos breves considerações sobre particularidades de cada mundo, ou seja, como são formulados e como se constituem.

Ainda que os Mundos da Matemática possuam linguagens, formas de exploração e provas distintas, estes se relacionam e interagem-se durante a aprendizagem da Matemática, sendo que para o sucesso no desenvolvimento do pensamento matemático, fazem-se necessárias experiências nas diferentes formas de operar matematicamente, ou seja, nos Três Mundos (TALL, 2013).

O mundo Conceitual Corporificado revela-se como um mundo em que o foco está nos objetos, ou seja, na observação, na identificação e na descrição de propriedades, tanto dos objetos reais como "[...] a experiências mentais, em que o indivíduo não precisa, necessariamente, da manipulação física de um objeto, pois ele pode manipulá-lo em seu pensamento, de forma a analisá-lo e a levantar conjecturas sobre propriedades do objeto ou de uma situação [...]" (LIMA, 2007, p. 74).

4 Em inglês: Conceptual Embodiment; Operational Symbolism e Axiomatic Formal (TALL, 2013).

Desta forma, esse mundo centra-se nos objetos, em suas regularidades, propriedades e relações estabelecidas entre os conceitos matemáticos, por exemplo, ao identificar e descrever o que diferencia um trapézio isósceles de um trapézio retângulo. À medida que os indivíduos vivenciam experiências diferentes ao lidar com a Matemática, manipulações nesse mundo vão misturando-se com símbolos matemáticos a fim de realizar ações sobre os objetos, e essas ações ficam cada vez mais sofisticadas, ou seja, utilizando-se de uma linguagem simbólica matemática mais elaborada, sendo essa última, característica do Mundo Operacional Simbólico.

O Mundo Simbólico centra-se nas manipulações, no cálculo da álgebra, da aritmética, por exemplo, em que as operações são representadas como símbolos manipuláveis. A fim de exemplificarmos noções desse mundo, pensemos em duas situações que o caracterizam: a manipulação com expressões algébricas e a identificação de uma função quadrática da forma $F(x) = ax^2 + bx + c$ a partir de uma dada situação em linguagem corrente.

Assim, os mundos Conceitual Corporificado e Operacional Simbólico

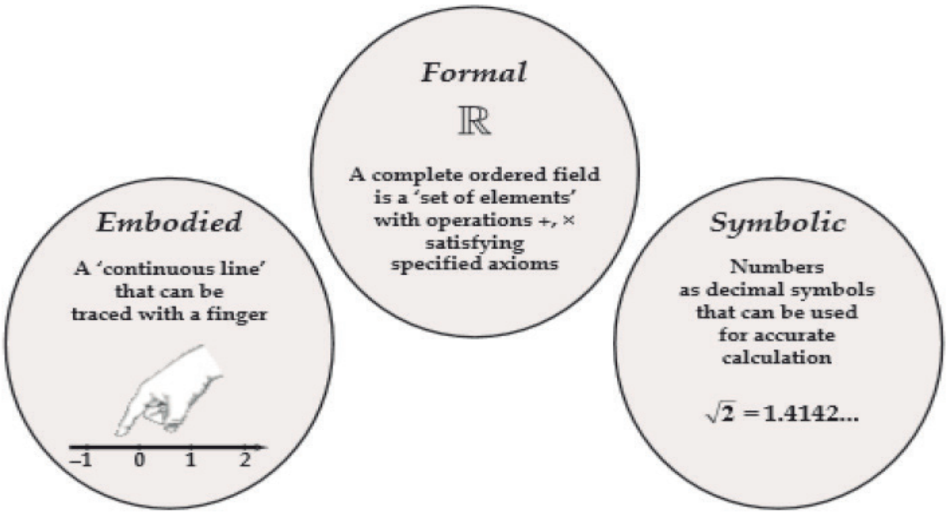
> [...] envolvem tanto a percepção como a ação, mas o primeiro concentra-se mais nos aspectos globais relacionados à percepção física e ao pensamento mental, ao passo que o último concentra-se mais nas propriedades sequenciais de processos como a contagem, levando ao simbolismo operacional de números naturais, frações, números negativos, decimais, números reais, desenvolvendo um sentido das propriedades generalizadas da aritmética que levam à álgebra (TALL, 2017, p. 12).

Estes dois mundos complementam-se durante a aprendizagem da Matemática. Essas formas de pensar e operar matematicamente combinam-se ao longo do desenvolvimento do pensamento matemático, uma vez que "[...] o mundo conceitual corporificado surge de um foco em objetos e o mundo operacional simbólico surge de um foco nas operações e sua representação como símbolos manipuláveis" (TALL, 2013, p. 140). Na escola, desenvolvem-se lado a lado, auxiliando os estudantes na aprendizagem de conceitos matemáticos, isto é, das propriedades dos objetos para ações em objetos, sendo que "[...] se o vínculo entre corporificação conceitual e simbolismo operacional não for feito, a falta de significado pode fazer com que a criança aprenda as operações de forma mecânica e não consiga construir uma flexibilidade no pensamento em longo prazo [...]" (TALL, 2010, p. 19).

Com relação ao Mundo Formal Axiomático, "[...] baseado em propriedades, expressas em termos de definições formais que são utilizadas como axiomas para especificar estruturas matemáticas [...]" (TALL, 2004, p. 3), concentra-se na Matemática formal, com a prova de teoremas, axiomas, definições formais, por exemplo, o estudo da Álgebra Axiomática, Análise, envolvendo uma Matemática mais sofisticada, sendo que seu desenvolvimento ocorre mais efetivamente no Ensino Superior.

Os Três Mundos da Matemática não são hierárquicos, misturam-se e complementam-se no processo de aprendizagem da Matemática, sendo essas experiências, fundamentais para o desenvolvimento do pensamento matemático. Por exemplo, quanto à aprendizagem dos conceitos no conjunto dos números reais, esse objeto matemático envolve experiências em diferentes situações, misturando corporificação, simbolismo e formalismo, respectivamente: na reta numérica; com símbolos, realizando cálculos, e um conjunto numérico que, munido das operações de adição e multiplicação usuais e a relação de ordem, é tratado como um corpo ordenado completo. Trazemos a Figura 1 a fim de exemplificar essas ideias.

**Figura 1 -** Os números reais como uma mistura




Fonte: TALL, 2013, p. 25

De tal modo, a partir da combinação de três mundos distintos e complementares, enfatizamos a importância de experiências envolvendo conceitos matemáticos em diferentes contextos. Ainda, referente às experiências no processo de aprendizagem da Matemática, nosso interesse está ao que "fica" na mente dos estudantes a partir da jornada pelos Mundos da Matemática, ou seja, aos *já-encontrados*. Nesse contexto, na sequência, dedicamos nossas discussões e reflexões a fim de problematizar possíveis efeitos desses construtos mentais na aprendizagem da Matemática, atual e/ou futura.

Durante a vivência escolar, são muitas as experiências com a Matemática, proporcionando interpretações, construção de relações, enfim, desenvolvimentos distintos no que se refere aos conceitos matemáticos e à maneira de compreender a Matemática como um todo. Os construtos mentais decorrentes da aprendizagem de conceitos ao lidar com a Matemática, por meio de diversas experiências, nos diferentes contextos, são denominados de *já-encontrados*.

Para os autores Lima e Tall (2008),

> Seguindo Tall (2004b), definimos um 'já-encontrado' como uma construção mental que um indivíduo usa em um determinado momento com base em experiências que eles conheceram antes. Um já-encontrado é uma parte específica da imagem conceitual do indivíduo, no entanto, ao fornecer um nome específico, pretendemos que ele seja usado para alunos e professores discutirem abertamente como seu conhecimento prévio pode afetar sua interpretação em um novo contexto (p. 4).

É nesse sentido que propomos o objetivo deste artigo, sobre o efeito das experiências matemáticas dos indivíduos em suas aprendizagens atuais e/ou futuras, consequentemente, discutir sobre a necessidade de considerarmos e "olharmos" para os conhecimentos prévios dos estudantes, como estão interpretando os conceitos em sala de aula a partir do que já viram. Assim, direcionamos esse texto a fim de abordar como as experiências anteriores dos estudantes com relação à aprendizagem da Matemática, podem influenciar o desenvolvimento do pensamento matemático e a importância em considerar tais aspectos. Corroboramos com Tall (2017) quando enfatiza a necessidade para

> [...] professores em qualquer etapa estar atento aos aspectos colaboradores e dificultadores que os alunos podem trazer de sua experiência anterior e também estar ciente de como a aprendizagem em uma determinada etapa desempenha seu papel no desenvolvimento em longo prazo (TALL, 2017, p. 2).

Experiências anteriores referentes à aprendizagem de conceitos matemáticos, sustentadas nos Mundos da Matemática, ou em um dos mundos, por exemplo, são essenciais para a aprendizagem em novas situações, pois dizem respeito à forma em que interpretamos as situações atuais, que muitas vezes, são influenciadas por experiências anteriores, por aquilo que nos é conhecido, ao que nos é familiar. Frequentemente é comum utilizarmos o que nos é familiar para a compreensão de novos conceitos, por exemplo,

> [...] Um fato numérico em que $5 + 2 = 7$, estabelecido por meio da contagem é favorável na aprendizagem subsequente, quer seja em aritmética decimal na qual $35 + 2 = 37$ ou $20 + 50 = 70$, na medição em que 5 metros mais 2 metros é 7 metros, ou mesmo em números complexos, em que $5i + 3 + 2i$; é $3 + 7i$ [...] (TALL, 2013, p. 88).

Conforme apresentado pelo autor, experiências anteriores podem interferir positivamente na aprendizagem da Matemática, de forma a colaborar no novo contexto. Um exemplo diz respeito ao objeto matemático Equação Polinomial do Primeiro Grau, sendo que conhecimentos no desenvolvimento de conceitos e manipulações desse objeto interferem quando estudantes transitam para a aprendizagem de Equações Polinomiais do Segundo Grau. Possivelmente, diante desse novo contexto, os estudantes empregam conceitos que lhes são familiares ao lidar com Equações do Primeiro Grau, por exemplo, ao identificarem termos semelhantes como $x$ e $2x$, estendem essa relação ao perceber a semelhança entre os termos e $x^2$ e $2x^2$. Na representação gráfica de funções, outra situação refere-se quando os estudantes compreendem o significado do coeficiente angular de uma Função Polinomial do Primeiro Grau, identificando que duas retas são paralelas sem a necessidade de traçar o gráfico. Dessa forma, a essas experiências anteriores que apoiam a nova aprendizagem, Tall (2013) as denomina de *já-encontrados colaboradores.*[5]

No entanto, *já-encontrados* também interferem na aprendizagem de forma negativa. Por exemplo, quando estudantes aplicam algumas regras de manipulação na resolução de Equações Polinomiais do Segundo Grau, antes válidas para a manipulação de Equações Polinomiais do Primeiro Grau. Lima (2007), em sua pesquisa de doutorado, evidenciou que estudantes realizavam "[...] manipulações algébricas incorretas que transformavam uma equação quadrática em uma linear" (LIMA; HEALY; KOCH, 2017, p. 765). A essas experiências anteriores que dificultam a aprendizagem da Matemática, Tall (2013) as denomina de *já-encontrados dificultadores*[6].

Assim,

> [...] Ao se deparar com experiências que lhe são familiares, um indivíduo utiliza um conhecimento ou procedimento já-encontrado, assumindo-o válido para a situação

5 Em inglês: "Supportive met-before".
6 Em inglês: "Problematic met-before".

> que tem em mãos. Se o já-encontrado é utilizado de maneira positiva, isto é, ele é válido para a situação em que ele é utilizado, ele é chamado de já-encontrado colaborador (TALL, 2013). Se ele não é válido para a situação em que se usa, ele é um já-encontrado dificultador (TALL, 2013) (LIMA; HEALY; KOCH, 2017, p. 762).

Na jornada pelos Mundos da Matemática, nas diferentes experiências na aprendizagem da Matemática, sendo essa jornada repleta de reconstruções e de retomadas, cada estudante tem um desenvolvimento cognitivo, de modo que cada um percorre seu caminho. Tendo em vista essa individualidade no que se refere ao desenvolvimento do pensamento matemático, então, cada indivíduo interpreta e lida com as experiências anteriores, diante de novas informações e de novos conhecimentos, de modo particular, consequentemente, um *já-encontrado* que pode ser colaborador para um estudante, pode ser dificultador para outro e vice-versa.

Segundo Lima (2007), ao investigar *já-encontrados* de estudantes ao lidarem com equações quadráticas,

> [...] Dependendo da experiência de aprendizado, um já-encontrado pode ter suas bases em qualquer um ou em todos os mundos da Matemática, isto é, qualquer tipo de experiência, corporificada, simbólica ou formal, pode interferir no aprendizado. Em nosso ponto de vista, "já-encontrados" são de grande importância no aprendizado de qualquer conteúdo de Matemática, especialmente em equações, nesse caso, porque eles explicitam que tipos de experiências estão interferindo no aprendizado atual e que tipo de experiências os alunos ainda necessitam (p. 66).

Em Lima e Tall (2008), os autores afirmam que este conceito diz respeito aos rastros das experiências anteriores com relação à Matemática na aprendizagem atual e, consequentemente, no desenvolvimento do pensamento matemático futuramente. Na discussão desse conceito, a ideia central não está na experiência em si, mas nas consequências para a aprendizagem em um novo contexto, ou seja, na maneira em que os indivíduos utilizam e interpretam as relações construídas anteriormente ao lidarem com novos conceitos, bem como para o desenvolvimento do pensamento matemático em longo prazo.

Ao ressaltarmos implicações de elementos resultantes de experiências anteriores no que se refere à aprendizagem da Matemática, uma vez que podem ser colaboradores ou dificultadores para a aprendizagem atual e/ou futura, também destacamos o papel do professor, no sentido de que compreendam a essência desse conceito, sobre: a importância do professor considerar e ter consciência do que traz esse conceito e formas de intervenções em sala de aula e de seus possíveis efeitos na aprendizagem.

Segundo Tall (2013, 2016), nas aulas de Matemática, muitas vezes são enfatizados "o que os estudantes precisam saber", os aspectos de suporte, ficando em segundo plano, ou esquecidos, "o que os estudantes trazem", e mais que isso, como esses construtos mentais podem influenciar a aprendizagem atual, ou seja, seus *já-encontrados, colaboradores* ou *dificultadores*.

Ter consciência de que as experiências anteriores na aprendizagem da Matemática interferem na aprendizagem atual e futura, bem como noções de como podem interferir, são questões importantes quando refletimos e investigamos aspectos concernentes à aprendizagem da Matemática. Tendo essa consciência, faz-se necessário que o professor realize intervenções didáticas a fim de sanar ou reduzir dificuldades originadas por *já-encontrados dificultadores*, por exemplo, ao intervir na ideia de que a operação de multiplicação sempre resulta em um número maior que seus fatores, o que nem sempre é válido no contexto dos números fracionários, ou então, afirmar que $\frac{1}{2} < \frac{1}{3}$, já que $\mathbf{2 < 3}$. Esses são alguns exemplos de erros que estudantes podem cometer oriundos de *já-encontrados dificultadores*, no último exemplo, o *já-encontrado* é a desigualdade $\mathbf{2 < 3}$, podendo interferir ao trabalhar com comparações entre números na representação fracionária (TALL, 2013). Assim, ao compreender um *já-encontrado*, cabe ao professor, "[...] identificar sua origem e como ele continua a funcionar nessa situação [...]" (TALL, 2010, p. 7-8).

Ainda, *já-encontrados* podem acarretar em reações emocionais negativas, por exemplo, ansiedade, medo, frustração, decorrentes de *já-encontrados dificultadores* que causam conflitos na aprendizagem, ou então, emoções positivas como satisfação, prazer, curiosidade, a partir de *já-encontrados colaboradores*. A maneira em que os estudantes interpretam e lidam com seus *já-encontrados* ao longo da aprendizagem da Matemática "[...] e os efeitos emocionais decorrentes desempenham um papel importante no desenvolvimento individual do pensamento matemático" (TALL, 2013, p. 23).

Quando o professor considera e investiga *já-encontrados* de estudantes, em sala de aula, por exemplo, ao questioná-los "[...] o que você conheceu antes que o faz pensar isto [...]" (TALL, 2013, p. 22), essa intervenção pode proporcionar indicações de como os estudantes raciocinam, interpretam, em suas ideias, e como essas construções podem influenciar na aprendizagem em novos contextos. Esse quadro teórico não se aplica apenas aos estudantes, mas diz respeito ao processo de aprendizagem da Matemática, de como nós pesquisadores e professores lidamos com nossos *já-encontrados*, de como a Matemática foi desenvolvida, a fim de maiores percepções que possam fomentar e potencializar o desenvolvimento do pensamento matemático.

## *JÁ-ENCONTRADOS*: UM MAPEAMENTO DE TESES E DISSERTAÇÕES NACIONAIS

Nesta seção, frente ao conceito de *já-encontrados*, trazemos reflexões a partir do recorte de um levantamento de investigações nacionais, realizado nos anos de 2015 e 2016, resultante de uma pesquisa de doutorado. Com esse levantamento, nossa intenção foi de "conhecermos" e investigarmos pesquisas que abordam o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática (TALL, 2013) na literatura, bem como uma análise acerca de características referentes a esse assunto, por exemplo, quanto ao foco de cada pesquisa, níveis de ensino investigados, relações desse quadro teórico com outras abordagens, entre outros aspectos.

Para tanto, esse mapeamento compreendeu: dois eventos, em suas quatro últimas edições - Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM) e Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM); dois periódicos - Boletim de Educação Matemática (pesquisamos em todo o acervo) e Ciência e Educação (pesquisamos a partir do ano de 2009); e, cinquenta e quatro Programas de Pós-Graduação[7] nas linhas de pesquisa - Educação Matemática; Educação em Ciências e Matemática; Educação Matemática e Ensino de Física; Ensino de Ciências e Matemática; Ensino de Ciências e Educação Matemática; Ensino de Matemática; Ensino, História e Filosofia das Ciências e Matemática; Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática; Ensino de Ciências Exatas; Ensino de Ciências Naturais e Matemática; Educação Matemática e Tecnologia; e, Educação para a Ciência e a Matemática.

Quanto à escolha pelos eventos e periódicos mencionados, consideramos serem importantes fontes de discussão e reflexão de aspectos teóricos e práticos referentes à Educação Matemática,

7 Esses programas foram escolhidos com base em uma listagem de programas de Pós-Graduação no site da Plataforma Sucupira. Segue o endereço: https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/avaliacao/consultaFichaAvaliacao.jsf.

sendo estes, atividades da Sociedade Brasileira de Educação Matemática - SBEM. Sobre as teses e dissertações selecionadas, envolvendo o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática (TALL, 2013), e que abordam, em suas fundamentações teóricas, o conceito de *já-encontrados*, empregando esse termo em suas análises, apresentamos oito pesquisas, sendo duas teses e seis dissertações, as quais são analisadas nesse estudo.

Para essas buscas, procuramos pelas seguintes palavras nos títulos das pesquisas: *Três Mundos da Matemática*; *Mundos*; *Corporificado*; *Corporificação*; *Simbólico*; *Formal*; *Pensamento Matemático*; *Tall*. Cabe esclarecer que a partir das pesquisas selecionadas, num movimento de exploração, identificamos outras investigações envolvendo esse quadro teórico, porém, não expondo tais palavras de busca em seus títulos. Para esta investigação, uma vez que direcionamos nossos olhares para as teses e dissertações, são elas: Santos (2011) e Müller (2015).

Logo, num movimento de organização e posterior análise, classificamos as pesquisas, quanto: ao tipo - tese ou dissertação; ao nível - sendo ES (Ensino Superior), EM (Ensino Médio) e EF (Ensino Fundamental). O Quadro 1 apresenta as pesquisas encontradas.

**Quadro 1 -** Relação de teses e dissertações nacionais que envolvem o conceito de já-encontrados.

| Título/Autores | Tipo/Nível | Ano | Instituição |
|---|---|---|---|
| EQUAÇÕES ALGÉBRICAS NO ENSINO MÉDIO: UMA JORNADA POR DIFERENTES MUNDOS DA MATEMÁTICA/ Rosana Nogueira de Lima | Tese/ EM | 2007 | PUC/SP |
| FUNÇÕES: UM ESTUDO BASEADO NOS TRÊS MUNDOS DA MATEMÁTICA/ Norberto Machado Angelini | Dissertação/ EM | 2010 | UNIBAN/SP |
| SIGNIFICADOS DO SÍMBOLO DE IGUALDADE NUMA JORNADA POR TRÊS MUNDOS DA MATEMÁTICA/ Josias Nogueira Badaró | Dissertação/ EF | 2010 | UNIBAN/SP |
| UMA INTRODUÇÃO AO ESTUDO DE EQUAÇÕES QUADRÁTICAS À LUZ DOS TRÊS MUNDOS DA MATEMATICA/ Rosangela Marazzio Koch | Dissertação/ EF | 2010 | UNIBAN/SP |
| O PAPEL DO SOFTWARE APLUSIX NA TRANSIÇÃO DE EQUAÇÕES DE AVALIAÇÃO PARA EQUAÇÕES DE MANIPULAÇÃO: O CASO DAS EQUAÇÕES QUADRÁTICAS/ Ricardo Pedroso dos Santos | Dissertação/ EF | 2011 | UNIBAN/SP |
| UMA JORNADA POR DIFERENTES MUNDOS DA MATEMÁTICA INVESTIGANDO OS NÚMEROS RACIONAIS NA FORMA FRACIONÁRIA/ Paulo Cézar Freire | Dissertação/ EF | 2011 | UNIBAN/SP |
| A PROPOSTA CURRICULAR DO ESTADO DE SÃO PAULO E O *SOFTWARE* GEOGEBRA: UMA ANÁLISE DE ATIVIDADES SOBRE FUNÇÕES EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA À LUZ DOS TRÊS MUNDOS DA MATEMÁTICA/ Patrícia Felipe | Dissertação/ EM | 2013 | UNIBAN/SP |
| OBJETOS DE APRENDIZAGENS MULTIMODAIS E ENSINO DE CÁLCULO: UMA PROPOSTA BASEADA EM ANÁLISE DE ERROS/ Thaísa Jacintho Müller | Tese/ ES | 2015 | UFRGS/RS |

Fonte: Construção dos autores.

Considerando que do total de treze pesquisas identificadas (entre teses e dissertações), oito abordam em suas fundamentações teóricas o conceito de *já-encontrados*, trazendo-o em suas análises e/ou como questão norteadora, então, essa consideração revela a importância desse termo no quadro teórico em questão. Essa foi uma característica que nos levou a debruçarmos nossas atenções a esse conceito, especialmente, acerca de sua influência na aprendizagem da Matemática atual e/ou futura, consequentemente, influenciando o desenvolvimento do pensamento matemático.

Com esse recorte do levantamento realizado na pesquisa de doutoramento, ou seja, duas teses e seis dissertações, temos como objetivo trazer e exemplificar indícios de aspectos que refletimos neste artigo, sobretudo acerca da influência de *já-encontrados* na aprendizagem da Matemática, assim como realizar algumas considerações desse quadro teórico a fim de suscitar apontamentos e contribuições para a área de Educação Matemática. De tal modo, de forma breve, sobre as pesquisas que compõem o Quadro 1, destacamos alguns indicativos, assim como noções de suas respectivas conclusões e aferições que avaliamos pertinentes para entendimentos referentes aos *já-encontrados* na aprendizagem de conceitos matemáticos na discussão que propomos. Na sequência, trazemos essa discussão e análise a partir das oito pesquisas selecionadas para este estudo.

a) Lima (2007), em sua pesquisa de doutorado, investigou concepções de estudantes do Ensino Médio no estudo de equações lineares e quadráticas. Dentre outros aspectos investigados, o trabalho teve como enfoque, buscar e identificar *já-encontrados* que interferem no trabalho destes estudantes com equações.

Nesse sentido, segundo a autora, com relação à interferência dos *já-encontrados* presentes no trabalho dos alunos, quanto aos significados atribuídos às equações e aos métodos de resolução, os dados coletados revelaram que os principais *já-encontrados* são provenientes da Aritmética, sendo os mais frequentes, as operações com números inteiros, e da Álgebra, principalmente do trabalho com expressões algébricas e com equações. Por exemplo, na resolução de equações quadráticas,

> "Aparentemente o "já-encontrado" da equação linear é tão forte que, ao se depararem com uma equação quadrática, os alunos procuram maneiras de transformá-las em lineares, por meio de alguma operação com o expoente da incógnita. Por exemplo, o aluno subtrai o expoente da incógnita ao quadrado do expoente da incógnita linear, obtendo uma incógnita linear, ou ainda, o aluno opera o expoente da incógnita ao quadrado no coeficiente desta incógnita e não sobre a própria incógnita" (LIMA, 284).

Lima (2007) aponta que, identificar *já-encontrados* dos estudantes, permitiu-lhe obter indícios das experiências que os estudantes tiveram que influenciaram o trabalho com equações e de que maneira foi essa interferência. Nesse sentido, a autora destaca a importância desse conceito aos professores, uma vez que, com ele, é possível identificar o que ainda precisa ser estruturado com relação à aprendizagem dos estudantes referente aos conceitos matemáticos. Ainda, enuncia que *já-encontrados* tem como objetivo que professores conversem com seus estudantes sobre "[...] as dificuldades ou as experiências de aprendizagem que tiveram, usando termos que são auto-explicativos e de simples compreensão" (LIMA, 2007, p. 281).

b) Angelini (2010), em sua dissertação de mestrado, investigou estudantes do Ensino Médio em atividades envolvendo o conceito de função. Pautado no quadro teórico dos Três Mundos da Matemática, ao analisar as respostas dos estudantes, o autor aponta *já-encontrados* referentes aos mundos da Matemática, identificados nas resoluções dos estudantes. Destacamos algumas considerações feitas pelo autor no que se refere aos *já-encontrados dificultadores* e *colaboradores.*

Sobre erros cometidos pelos estudantes decorrentes de *já-encontrados dificultadores*: transitar do gráfico para a expressão algébrica; acreditar que há apenas uma resposta correta para um problema; operações aritméticas com números na representação decimal; sobre diferentes representações, em que sempre na "[...] expressão deve aparecer y=...; não assimilou g(x) como notação de função [...]" (ANGELINI, 2010, p. 141), ou então, "[...] somente é função se a letra (qualquer uma) estiver sozinha no membro da esquerda, começando com y=..., x=... [...]" (p. 150); entre outros.

A respeito de já-encontrados colaboradores: conceitos relacionados ao cálculo de porcentagem; imagens de gráficos já trabalhados; ideias de reta e segmento; identificação da variável independente; “[...] técnicas de localizar pontos sobre um plano cartesiano traçando paralelas e assinalando o ponto na intersecção das duas paralelas ao eixo [...]” (ANGELINI, 2010, p. 96), entre outros.

De acordo com essa investigação, Angelini (2010) ressalta que os “já-encontrados” “[...] são importantes para tentar identificar características dos Três Mundos da Matemática que estão presentes no raciocínio dos alunos” (ANGELINI, 2010, p. 70) e com isso, orientar a prática do professor a fim de que os estudantes tenham experiências contemplando características dos Três Mundos da Matemática.

c) Badaró (2010) realizou uma investigação bibliográfica, em pesquisas da área de Educação Matemática, na Matemática e na história da Matemática, acerca do significado do símbolo de igualdade em cada um dos Três Mundos da Matemática. Em sua dissertação, entre outros objetivos, um deles foi investigar o papel de *já-encontrados* no entendimento dos significados matemáticos do símbolo de igualdade. Das pesquisas analisadas, quanto aos significados do símbolo de igualdade, o autor indica algumas ideias advindas de *já-encontrados*, por exemplo, “[...] quando as crianças mais novas relacionam o conceito de igualdade a uma coisa ser igual à outra em quantidade ou forma ou quando elas utilizam o significado operacional, mesmo diante de uma situação matemática que indica uma equivalência” (BADARÓ, 2016, p. 116).

Em seus resultados, Badaró (2010) ressalta o importante papel dos *já-encontrados* na aprendizagem dos estudantes, sugerindo que os “[...] “já encontrados” sobre o conceito de igualdade sejam pesquisados nos alunos antes da sua utilização no ensino da Matemática” (BADARÓ, 2016, p. 117), uma vez que antes do significado matemático, muitos podem ser os significados atribuídos ao símbolo de igualdade.

d) Koch (2010) trabalhou com estudantes do oitavo ano do Ensino Fundamental ao resolverem tarefas contendo equações quadráticas. Nessa dissertação de mestrado, ao investigar características dos Três Mundos da Matemática nas resoluções dos estudantes, bem como as dificuldades apresentadas por eles na transição de resolver equações lineares para resolver equações quadráticas, a autora apresenta considerações acerca de *já-encontrados*. A partir das análises, Koch (2010) afirma ter identificado *já-encontrados dificultadores* relacionados a conceitos referentes à resolução de equações lineares, como: regras de sinal, potenciação, extração de raiz.

Assim como evidenciado em Lima (2007), Koch (2010) também aponta que os estudantes realizaram manipulações a fim de resolverem equações quadráticas como se fossem lineares, por exemplo,

> [...] os alunos usam os seus ‘já-encontrados’ na resolução das equações quadráticas, tais como isolamento da incógnita e operações inversas. Porém, tais ‘já-encontrados’ agem de maneira negativa quando os componentes dos grupos não admitem que uma equação quadrática possui duas raízes como resposta [...] (KOCH, 2010, p. 136).

Ainda, Koch (2010) evidencia que

> [...] os alunos não conhecem os procedimentos algébricos, portanto não fazem a manipulação simbólica corretamente, mas buscam em seus conhecimentos anteriores (“já-encontrados”), formas de encontrar valores que satisfaçam a equação, levando-os a resolverem como se as equações quadráticas fossem

lineares, indicando que eles estão corporificando o simbolismo, que é quando o indivíduo parte do mundo simbólico e chega ao mundo corporificado (p. 129).

Nesse sentido, como exemplo de *já-encontrado dificultador* identificado e apresentado pela autora:

"No caso da equação $\mathbf{3x^2 = 27}$ acreditamos que os 'já-encontrados' de multiplicação e potenciação possam ter agido como um fator de dificuldade, porque os componentes do grupo parecem não compreender que a potência é o processo inverso da radiciação, como podemos ver na fala do aluno D03 *"3 vezes quanto, que vezes 2 que dá 27"* dando à potenciação o status de multiplicação por dois." (KOCH, 2010, p. 118).

A autora enfatiza a importância dos *já-encontrados* para atingir o objetivo da investigação, sendo que por meio desse conceito, foi possível analisar os procedimentos e conhecimentos anteriores utilizados pelos estudantes na resolução das equações quadráticas propostas, e ainda, implicações dessa nova experiência na ampliação de conceitos matemáticos.

e) Santos (2011), em sua dissertação de mestrado, investigou as dificuldades envolvendo a passagem de resolver equações lineares para a resolução de equações quadráticas, sobretudo, a contribuição do *software* Aplusix nessa transição. Para tanto, o autor investigou três estudantes do 9º ano, sendo que, em suas análises, debruçou-se aos *já-encontrados* mediadores dessa passagem, como por exemplo, investigou se os estudantes utilizam estratégias aritméticas e estratégias de resolução de equações lineares, para a resolução de equações quadráticas.

No que se refere aos *já-encontrados dificultadores*, conforme apresentado nessa pesquisa, um deles advém de estratégias relacionadas às operações aritméticas, pois "[...] ao ver uma equação, as alunas a tratam como uma conta e procuram desenvolver para chegar a um resultado [...]" (Santos, 2011, p. 131). Outro exemplo é o caso da resolução da equação $\mathbf{(x - 3)^2 = x^2 + 9}$. Para o autor, "[...] esse tipo de erro é um 'já-encontrado', em que os alunos estão desenvolvendo os termos separadamente, por exemplo, como $\mathbf{(x)^2 = x \cdot x = x^2}$ e $\mathbf{(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9}$, posteriormente juntando os resultados como $\mathbf{x^2 + 9}$ como visto nos exercícios" (SANTOS, 2011, p. 135).

Nesse sentido, segundo Santos (2011), é essencial o entendimento de *já-encontrados* que podem gerar dificuldades na aprendizagem dos estudantes, nesse caso, no entendimento de equações quadráticas.

f) Freire (2011), em sua dissertação de mestrado, investigou mudanças de raciocínio de alunos do Ensino Fundamental em tarefas que contemplam números racionais na forma fracionária. A partir das resoluções dos estudantes, o autor investigou, entre outros elementos teóricos, as interferências de *já-encontrados* ao lidarem com números racionais na forma fracionária. Nesse contexto, apresentamos alguns exemplos analisados e apontados pelo autor.

Operações com números naturais foram um *já-encontrado* que influenciou de forma negativa nas resoluções dos estudantes em várias tarefas, pois "[...] ao aplicarem o algoritmo dessas operações em um universo fora do conjunto dos números naturais, esses alunos não foram bem sucedidos" (FREIRE, 2011, p. 178). Por exemplo, em uma tarefa envolvendo o subconstruto[8] operador, "alunos dividiram as quantidades apresentadas com números racionais na forma fracionária como se fosse um número natural, então provavelmente o 'já-encontrado', divisão com números naturais, interferiu

8 No que se refere aos números racionais, "[...] para que desenvolva uma compreensão efetiva desse sistema numérico, a criança deve ser exposta a uma diversidade de interpretações do que seja uma razão de inteiros (essas interpretações constituem os chamados subconstrutos da noção de número racional)" (MOREIRA; FERREIRA, 2008, p. 105).

na resolução da questão por parte dos alunos" (FREIRE, 2011, p. 131). Com relação ao subconstruto medida, a régua graduada, comumente utilizada por estudantes, foi um *já-encontrado* identificado pelo autor, uma vez que interferiu "[...] diretamente no posicionamento dos números na reta real, pois os alunos relacionaram a régua graduada com a reta real e as divisões da reta (em milímetros) com numerador ou denominador do número racional na forma fracionária" (FREIRE, 2011, p. 167).

De modo geral, quanto ao efeito dos *já-encontrados* nas resoluções das tarefas, Freire (2011) afirma que foi de fundamental importância identificar e analisar tais interferências na aprendizagem dos estudantes investigados, uma vez que as estratégias que os estudantes utilizaram para resolver as questões propostas dependem dos *já-encontrados* que possuem.

g) Felipe (2013) realizou uma pesquisa de mestrado em que investigou estudantes do Ensino Médio ao trabalharem em um ambiente computacional, com atividades contemplando conteúdos de funções polinomiais de 1º e 2º graus, exponencial e logarítmica, com o auxílio do *software* GeoGebra. Nas atividades realizadas, a autora analisou e destacou *já-encontrados* influenciando a construção de novos conceitos. Destacamos alguns *já-encontrados* apontados por Felipe (2013).

Conceitos referentes à Função Polinomial de Segundo Grau influenciaram a resolução de alguns estudantes, uma vez que "[...] estão utilizando 'já-encontrados', nesse caso, o termo 'parábola', para expressar o nome do gráfico da função exponencial [...]" (FELIPE, 2013, p. 157). Outro exemplo diz respeito a uma atividade em que, apresentada uma função exponencial, pedia-se para que os estudantes verificassem se a função era decrescente ou crescente. Logo, na resolução dessa atividade, segundo Felipe (2013),

> Para D2 não foi suficiente observar o desenho da curva. Então, utilizou "já-encontrados" adquiridos por meio da resolução das atividades anteriores como, por exemplo, a estratégia de colocar um ponto sobre o gráfico e movimentá-lo, observando a variação das coordenadas dele. Nesse caso, a dupla observou que, quanto maior fosse o valor da abscissa, menor seria o valor da ordenada do ponto, concluindo que a função era decrescente. Já D3 utilizou "já-encontrados" verificando os valores dos coeficientes a, b, c da função, concluindo que ela era decrescente (p. 175).

Para Felipe (2013), em uma de suas conclusões, o professor deve ter o papel de um "[...] mediador, a fim de auxiliar alunos a superar dificuldades, identificando "já-encontrados" [...]" influenciadores na aprendizagem atual, a fim de que "[...] reflitam sobre os erros, reconstruindo conhecimentos cada vez mais sofisticados sobre o domínio matemático em questão e, preferencialmente, que consigam realizar uma jornada pelos Três Mundos da Matemática" (FELIPE, 2013, p. 26-27)

h) E por fim, trazemos alguns apontamentos de Müller (2015). Em sua tese de doutorado, teve como objetivo investigar dificuldades de aprendizagem de estudantes cursando Cálculo Diferencial e Integral e analisar possibilidades de superar tais dificuldades por meio de recursos tecnológicos. Tendo como pressuposto teórico, entre outros, os Três Mundos da Matemática, a autora também investigou a influência de *já-encontrados* na aprendizagem dos participantes, mediante os conceitos matemáticos envolvidos nas atividades empregadas.

Segundo a autora, as análises evidenciam a interferência de *já-encontrados* no desenvolvimento das atividades realizadas pelos estudantes. Um *já-encontrado dificultador* refere-se à propriedade distributiva, sendo que "[...] tentam aplicar essa ideia de distributividade para operações que não gozam dessa propriedade, tais como a derivação em relação à multiplicação" (MÜLLER, 2015, p. 59).

Ainda, Müller (2015) aponta que muitos dos estudantes investigados não possuem *já-encontrados* necessários para a compreensão de conceitos de Cálculo.

Essas pesquisas nacionais, em que apresentamos brevemente algumas especificidades, trazem exemplos confirmando *já-encontrados* pertencentes e influenciadores no processo de aprendizagem da Matemática, bem como no envolvimento em ações nos Três Mundos da Matemática. Fica evidente tal influência e importância na aprendizagem da Matemática. O que aprendemos anteriormente e a forma que interpretamos essas experiências podem influenciar em aprendizagens diante de conceitos em novos contextos, sendo fundamental para o sucesso no desenvolvimento do pensamento matemático. Confirmando essa ideia, "Aprender a pensar matematicamente é uma experiência cumulativa que depende do que já foi experimentado e a aprendizagem atual afetará o que e como aprendemos no futuro [...]" (TALL, 2013, p. 402).

Entendemos que se o objetivo é potencializar a aprendizagem da Matemática, uma maneira de proporcionar ações nesse sentido, está diretamente relacionada a ter indícios de como os estudantes estão pensando, como estão interpretando e construindo os conceitos matemáticos, com vistas a realizar intervenções a fim de sanar dúvidas, conflitos, enfim, fomentar a aprendizagem. Assim, o conceito de *já-encontrado* e ao que se refere ao professor, sugere um diálogo simples, por exemplo, implicado em questionamentos do tipo: *O que pode ter levado esses estudantes a tais resoluções e/ou ideias? As experiências anteriores com relação à aprendizagem matemática podem ter influenciado na resolução dessa situação, por exemplo, algum conteúdo matemático? De que maneira?*

Nesse sentido, enfatizamos a importância e a necessidade de considerar e como abordar *já-encontrados* na aprendizagem da Matemática, sendo que essa reflexão permite ao professor, "aproximar-se" de seus estudantes a fim de compreendê-los e, se possível, auxiliá-los em seus processos de aprendizagem. Além disso, reflexões como essa podem suscitar que professores e educadores matemáticos repensem sobre desafios que cercam a sala de aula, bem como, elementos que permeiam e influenciam os processos de ensinar e aprender.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste artigo, tendo como objetivo discutir sobre os efeitos das experiências matemáticas dos indivíduos em suas aprendizagens atuais e/ou futuras, as discussões e reflexões apresentadas têm um caráter provocativo no sentido de suscitar que professores, educadores matemáticos, formadores de professores, pensem e considerem acerca de como experiências anteriores de estudantes referentes à construção de conceitos matemáticos podem influenciar o que estão aprendendo no contexto atual, assim como, afetar a aprendizagem futura. Essas reflexões nos dão pistas da importância em compreender evidências dos conflitos que os estudantes enfrentam na aprendizagem dos conceitos matemáticos.

É consenso que as dificuldades dos estudantes no que se refere à aprendizagem da Matemática estão presentes nos diferentes níveis, visto que uma quantidade considerável de pesquisas na área de Educação Matemática confirma e busca meios para amenizá-las. Assim, ao abordarmos o conceito de *já-encontrado*, nosso intuito é também ressaltar que, estando cientes de tal fato, acreditamos que uma forma de nos aproximarmos das dificuldades dos estudantes a fim de compreendê-los é concentrarmos "[...] no desenvolvimento subjacente do pensamento matemático à medida que a criança encontra novas ideias" (TALL, 2017, p. 8), o que estendemos para adolescentes, jovens e adultos, pois "Encontrar a matemática difícil não é algo que ocorre apenas em crianças. Isso ocorre em praticamente todos nós em algum estágio ou outro [...]" (TALL, 2017, p. 10).

Esse quadro teórico, especialmente no que se refere aos *já-encontrados*, traz uma reflexão para nós pesquisadores, educadores matemáticos a fim de que pensemos sobre como nossos *já-encontrados* influenciam nossas interpretações e, a partir disso, como podemos auxiliar nossos alunos na aprendizagem da Matemática. Pensar dessa maneira pode contribuir para indicações e compreensões de como os estudantes, em aulas de Matemática, estão interpretando os conceitos e o que pode estar impedindo o progresso, sendo que *já-encontrados dificultadores* e *já-encontrados colaboradores* têm implicações no domínio cognitivo.

Consideramos ser fundamental que reconheçamos os aspetos que podem provocar conflitos na aprendizagem dos estudantes na mudança de contexto. "[...] Isto sugere a necessidade de que matemáticos, os elaboradores de currículo, professores e alunos tornem-se explicitamente conscientes dos aspectos colaboradores e dificultadores da aprendizagem em longo prazo" (TALL, 2016, p. 15).

Acreditamos que esse é um caminho favorável que proporciona indícios a fim de reduzir e/ou sanar dificuldades, bloqueios, crenças negativas a respeito da aprendizagem da Matemática, bem como para os que estão interessados em reflexões ligadas à Educação Matemática, sobretudo, ao processo de aprendizagem. A consciência, a discussão e a reflexão de aspectos que podem apoiar ou impedir a aprendizagem, nesse caso, *já-encontrados*, permite a abertura de possibilidades de desenvolvimento a fim de gerar frutos no que se refere ao desenvolvimento do pensamento matemático dos estudantes.

## AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES).

## REFERÊNCIAS

ANGELINI, N. M. (2010). **Funções: Um estudo baseado nos Três Mundos da Matemática** (219f.). Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2010.

BADARÓ, J. N. (2010). **Significados do Símbolo de Igualdade numa Jornada por Três Mundos da Matemática** (122f.). Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2010.

FELIPE, P. (2013). **A Proposta Curricular do Estado de São Paulo e o software GeoGebra: uma análise de atividades sobre Funções Exponencial e Logarítmica à luz dos Três Mundos da Matemática**(240f.). Dissertação de Mestrado em Educação, Universidade Bandeirante Anhanguera, São Paulo, 2013.

FREIRE, P. C. (2011). **Uma jornada por diferentes Mundos da Matemática investigando os números racionais na forma fracionária** (194f.). Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2011.

KOCH, R. M. (2010).**Uma introdução ao estudo de equações quadráticas À Luz dos Três Mundos da Matemática** (156 f.). Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2010.

LIMA, R. N. D. (2007). **Equações Algébricas no Ensino Médio:** uma jornada por diferentes mundos da matemática (358 f.). Tese de Doutorado em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

LIMA, R. N., TALL, D. Procedural embodiment and magic in linear equations. **Educational Studies in Mathematics**, 67(1), 3-18, 2008.

LIMA. R. N. D., HEALY, L.,KOCH, M. O ensino de equações quadráticas: como "costurar" o corte didático? **Acta Scientiae**, 19(5), 759-781, 2017.

MOREIRA, P. C., FERREIRA. M. C. C. **A Teoria dos Subconstrutos e o Número Racional como Operador:** das estruturas algébricas às cognitivas. Bolema, 21(31), 103-127, 2008.

MÜLLER, T. J. (2015). **Objetos de aprendizagem multimodais e ensino de cálculo:** uma proposta baseada em análise de erros (203 f.). Tese de Doutorado em Informática na Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015.

SANTOS, R. P. (2011). **O papel do software aplusix na transição de equações de avaliação para equações de manipulação:** o caso das equações quadráticas (151 f.). Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2011.

TALL, D. Introducing the three worlds of mathematics. **For the Learning of Mathematics**, Fredericton, Canadá, v. 23 n. 3, p. 29-33, 2004.

TALL. D. Mathematical and emotional foundations for lesson study in mathematics. In: Plenary presented at the APEC Lesson Study Conference, Chiang Mai, Thailand, 2010. Disponível em: https://bit.ly/2z1aCGQ. Acesso em: 10 de out. 2017.

TALL, D. How Humans Learn to Think Mathematically: Exploring the Three Worlds of Mathematics, New York: Cambridge, 2013.

TALL, D. Long term effect of sense-making and anxiety in algebra. **And the rest is just algebra***,* New York: Springer, 2016.

TALL, D. Making sense of elementary arithmetic and algebra for long-term success. In: **Draft chapter prepared for teachers of Elementary Mathematics in Japan**, 2017. Disponível em: https://bit.ly/31LkUr8. Acesso em: 15 nov. 2017.

**RECEBIDO EM:** 14 jan. 2019
**CONCLUÍDO EM:** 11 mai. 2019