VIDYA, v. 39, n. 1, p. 311-332, jan./jun., 2019 - Santa Maria, 2019. **ISSN** 2176-4603

PROFESSORES E FORMADORES: DIÁLOGOS SOBRE O PAPEL DA DEMONSTRAÇÃO MATEMÁTICA

TEACHERS AND TEACHER'S TRAINERS: DIALOGUES ON THE ROLE OF MATHEMATICAL DEMONSTRATION

EMERSON ROLKOUSKI*
SUELLEN RODRIGUES DE OLIVEIRA MAZZOLLI**

RESUMO

Esse artigo tem por objetivo tecer compreensões sobre percepções do Professor de Matemática da Educação Básica e do Formador de professores de Matemática acerca das demonstrações e seu ensino. Para a realização deste estudo, elaborou-se um roteiro com questões pertinentes ao tema utilizado para entrevistar três Formadores e três Professores de Matemática. Os dados constituídos foram submetidos à Análise de Conteúdo, possibilitando a emersão de três categorias: a demonstração e o trabalho do Matemático; a demonstração e a formação e atuação do Professor de Matemática; e, a demonstração e a sala de aula de Educação Básica. Para cada uma das categorias foram construídos textos articulados à literatura pertinente apontando distanciamentos entre a formação e a atuação dos professores e a redução das funções da demonstração. Considerando-se os resultados encontrados, sugere-se caminhos para a superação da dicotomia formação/atuação que possam auxiliar no desenvolvimento do pensamento matemático na Educação Básica.

Palavras-chave: Formação de Professores de Matemática. Licenciatura. Educação Básica. Demonstrações.

ABSTRACT

This article aims to show understandings about perceptions of the Mathematics Teacher of Basic Education and the Teacher of Mathematics trainers about the mathematics demonstrations and their teaching. For the accomplishment of this study, three Trainers and three Mathematics Teachers were interviewed, based in a script was elaborated with questions pertinent to the theme. The data were submitted to Content Analysis, enabling the emergence of three categories: the demonstration and the work of the Mathematician; the demonstration and the formation and work of the Mathematics teacher; and, the demonstration and the classroom of Basic Education. For each of the categories were written texts based on the pertinent literature pointing distances between the formation and the work of the teachers and the reduction of the functions of the demonstration. Considering the results, paths are indicated for overcoming the formation/actuations dichotomy in the demonstration mathematics teaching.

Keywords: *Mathematics Teacher Training. Undergraduate Course for Teachers. Basic Education. Demonstrations.*

* Doutor em Educação Matemática. Universidade Federal do Paraná. E-mail: rolkouski@uol.com.br. Orcid: https://orcid.org/0000-0001-7961-4715
** Mestre em Educação em Ciências e em Matemática. Rede Municipal de Educação de Curitiba. E-mail: prof.suellen@yahoo.com.br. Orcid: https://orcid.org/0000-0001-7881-7780

INTRODUÇÃO

Ainda que atenuada pelas últimas duas reformas realizadas nos currículos dos cursos de formação de professores de Matemática (BRASIL, 2002, 2015), boa parte do tempo de um curso de licenciatura é destinada à execução da rotina "Definição, Teorema e Demonstração". Aos alunos que apresentam demonstrações criativas e corretas aos olhos de seus professores abrem-se as portas das pós-graduações em Matemática Pura, aos outros, resta a memorização com vistas a aprovação e futuramente ao diploma que pode abrir as portas para a profissão de professor.

Seja pelo pesquisador, seja por seus entrevistados, o contexto apresentado acima é relatado com mais ou menos detalhes em trabalhos acadêmicos (GOUVÊA, 1998; PIETROPAOLO, 2005). Baseados nos resultados desses trabalhos e em nossa experiência como docentes, acreditamos que as discussões sobre as dificuldades encontradas pelos alunos de Licenciatura em Matemática, a valorização do rigor e do formalismo no âmbito do curso ou mesmo o tempo destinado à tríade "Definição, Teorema e Demonstração", devem estar atrelados à discussão de qual o seu impacto na formação do professor e na sala de aula de Educação Básica. Tal discussão não pode ser levada a termo sem uma reflexão sobre o papel da demonstração na Educação Básica e sobre "quê demonstração" estamos falando. Nesse sentido, o diálogo com Formadores de Professores de Matemática e Professores em atuação são bem-vindos. O objetivo desse artigo é então, contribuir para essa reflexão apresentando e tecendo compreensões sobre percepções de professores de Matemática da Educação Básica e de Formadores de Professores em relação a demonstração e ao seu ensino.

Com vistas a cumprir tal objetivo, primeiramente explicitamos como os dados sobre as percepções de Professores de Matemática da Educação Básica e de Formadores de Professores em relação a demonstração e ao seu ensino foram constituídos. A seguir apresentamos as categorias e a análise empreendida à luz da literatura pertinente, notadamente, Moreira e David (2010), De Villiers (2001), Garnica (1995), Hanna e Jahnke (1996), Hanna (1989) e Thurston (1994). A partir dos resultados que obtivemos procuramos apontar caminhos para a efetivação de um ensino que vise ao desenvolvimento do pensamento matemático na Educação Básica.

METODOLOGIA

Para a realização desse estudo foram entrevistados seis profissionais, sendo três Formadores de Professores e três Professores da Educação Básica. Os seis entrevistados possuem mais de cinco anos de atuação. Os três Formadores são da mesma Universidade, trabalham como formadores de professores desde seu ingresso na instituição, e possuem interesses de pesquisa diversos: Matemática Aplicada; Matemática Pura; e, Educação Matemática e Filosofia. Os três professores foram formados nessa instituição, são pós-graduados e atuam na rede pública de ensino, na Educação Básica.

Os Formadores entrevistados foram aqui denominados por Formador (pesquisador em Matemática Pura), Formador (pesquisador em Matemática Aplicada) e Formador (pesquisador em Educação Matemática e Filosofia) e os professores da Educação Básica por Professor X, Professor Y e Professora Z. Cada formador e professor concedeu uma entrevista que foi gravada em áudio e transcrita. Os Professores X e Z concederam as entrevistas no colégio em que trabalham; e o Professor Y foi entrevistado em sua residência. Já os Formadores foram entrevistados em seus respectivos gabinetes. As entrevistas duraram, em média, 30 minutos.

O roteiro da entrevista, semi-estruturada, para os Formadores continha as seguintes questões:

1. Qual o papel das demonstrações para você? Essa importância/papel que você dá às demonstrações enquadra-se mais para o Matemático ou para o Professor de Matemática?

2. Você acredita que na Escola Básica é possível trabalhar com demonstração? É possível? É viável trabalhar com demonstrações nesta etapa de ensino?

3. Como o professor poderia trabalhar com demonstrações em sala de aula?

4. Você acredita que o modo como as demonstrações são abordadas no curso de formação de professores de Matemática motiva o futuro docente a trabalhar com demonstrações em sala de aula? O que você pensa sobre?

Para a entrevista, semi-estruturada, com os Professores as questões foram as seguintes:

1. Qual o papel das demonstrações para a sua formação como Professor de Matemática? Você considera que elas foram importantes?

2. Você consegue fazer relações entre as demonstrações que viu durante a graduação e os conteúdos que tem que ensinar?

3. Você acha viável ou razoável trabalhar com demonstrações com seus alunos? Como você faz isso no seu dia-a-dia, na sua prática de sala de aula?

As entrevistas assim constituídas foram submetidas à Análise de Conteúdo que é, segundo Bardin (2011),

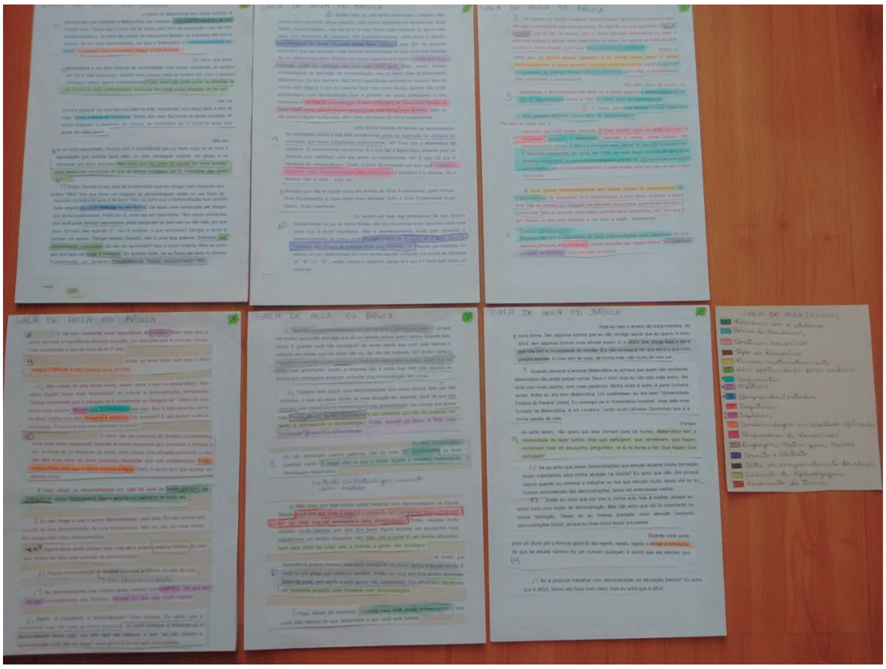
> Um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter, por procedimentos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens, indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) destas mensagens (p. 42).

Após a constituição dos dados iniciou-se a pré-análise dos depoimentos, realizando leituras, denominadas de leituras flutuantes a fim de "mergulhar completamente" nas informações obtidas. Na etapa seguinte, tendo a questão de pesquisa em mente, definiu-se as unidades de análise: palavras, frases ou parágrafos.

Em seguida iniciamos a categorização. Segundo Bardin (2011, p. 146), categorizar é a ação de classificar, por diferenciação e reagrupamento, os elementos que constituem um conjunto. As categorias são classes que reúnem um grupo de elementos sob um título genérico. Esse agrupamento é feito considerando as características comuns dos elementos. Em nosso caso, tal ação ocorreu primeiramente de forma separada, e, em um segundo momento, novo movimento foi realizado com vistas a estabelecer um diálogo entre os Professores e Formadores.

O procedimento utilizado foi colorir palavras/frases/parágrafos que representassem uma mesma ideia. Esse processo, realizado previamente por um dos pesquisadores, foi submetido ao outro pesquisador que deveria explicitar os motivos pelo qual acreditava que tais unidades de análise tinham sido pintadas da mesma cor. Dessa maneira, negociou-se a atribuição de significados entre pesquisadores buscando uma maior consistência das categorias construídas.

Figura 1 - Exemplo do início do processo de categorização



Fonte: os autores.

Observando a figura nota-se a quantidade de pré-categorias que foram elencadas na primeira leitura das relações (cada cor representa uma pré-categoria). O que se fez na sequência foi realizar a leitura de cada uma delas, a fim de reclassificá-las reduzindo a quantidade de categorias. Finalizado o processo, chegamos às seguintes categorias:

Categoria Um: as demonstrações e o trabalho do Matemático;

Categoria Dois: as demonstrações e a formação e atuação do Professor de Matemática;

Categoria Três: as demonstrações e a sala de aula de Educação Básica.

Sobre cada uma dessas categorias constituiu-se um texto interpretativo, sistematizando e produzindo conhecimento sobre o objeto de pesquisa em diálogo com os dados e com a literatura.

ANÁLISE DOS DADOS

Nessa seção descrevemos as categorias constituídas pelos dados. Tais categorias são ilustradas por excertos de entrevistas e seguidas de compreensões estabelecidas pelo diálogo com a literatura pertinente.

Categoria Um: as demonstrações e o trabalho do Matemático

Nessa categoria os entrevistados explicitam suas ideias relativas ao papel da demonstração no trabalho do Matemático quando perguntados diretamente sobre, ou quando falam sobre outros assuntos.

Observa-se a seguir algumas funções das demonstrações para os Matemáticos, como a explicação e verificação:

> [...] mas as demonstrações são o que fazem você realmente entender o porquê daquelas coisas funcionarem. [...] Ou você acredita que aquela é a fórmula, ou tenta entender por que tem que ser aquela fórmula. [...] Agora se você quer saber: 'Bom, por que é essa a fórmula?', 'Por que é assim que faz?'. Só faz sentido se for através de uma demonstração. A demonstração cumpre o seu papel aí. É buscar argumentos para entender. Faz parte do processo de aprendizagem e compreensão do problema. [...] antes eu respondi o que era para mim - além do que é a demonstração em si, em Matemática, que é aquela quantidade de argumentos lógicos, tal, que garante a validade de um resultado, um enunciado [...] (Formador α)

> [...] eu vejo a demonstração como uma forma de você ter entendimento em nível um pouco mais elevado sobre o termo em si, porque a própria demonstração explica o porquê que determinadas coisas funcionam [...] eu vejo a demonstração como uma forma de você entender a Matemática em outro nível de compreensão, além daquela parte de execução automática de tarefas, de cálculos. (Formador β)

> Só que, para efeito do que o Matemático chama de "deter o conhecimento matemático sistematizado, consolidado", aí a demonstração já é o papel final, digamos, de juiz. [...] é a última palavra sobre uma ideia matemática, do ponto de vista do matemático, não do Educador Matemático. Ou seja, para ela ser aceita como matemática verdadeira tem que ser demonstrada [...] Mas, sem ter uma demonstração lógica pode-se fazer uma argumentação sobre matemática, discorrer sobre matemática, aprender sobre matemática e, inclusive, alimentar a intuição sobre a Matemática. [...] como eu digo, a demonstração é a última palavra, mas do ponto de vista mais da própria ciência Matemática. Para aceitar algo matematicamente tem que estar demonstrado. Esse é o sentido lógico! (Formador γ)

Há ainda a menção ao papel da demonstração como forma de generalizar um resultado:

> [...] É você fazer um caso, fazer outro, tentar generalizar, fazer. Não precisa resolver o problema necessariamente em todas as situações, mas uma situação em que você se convença de que aquilo funciona em alguns casos. (Formador α)

Para os Formadores, observa-se que a demonstração está relacionada a um entendimento mais aprofundado sobre o assunto, para garantir a veracidade de um resultado e para se convencer de o porquê de alguns resultados serem válidos. Já para os professores, embora não tenha sido perguntado diretamente sobre o papel das demonstrações para o Matemático, dois deles assim se manifestaram:

> O papel da demonstração para o Professor de Matemática, que dá aula para o Ensino Básico é totalmente diferente do papel da demonstração para o Matemático, principalmente em relação à linguagem. A linguagem de um Matemático para a Matemática não tem muita coisa a ver com a [linguagem] de um Professor para um aluno. (Professor Y)

> Para o Matemático, eu acho que as demonstrações têm sim um papel fundamental. (Professora Z)

Nas demais categorias, as diferenças entre o papel das demonstrações para os Matemáticos e para os professores de Matemática serão retomadas e aprofundadas. Aqui, cabe salientar que há o reconhecimento dessas diferenças e do papel fundamental que exercem no trabalho do Matemático.

Compreensões

Segundo De Villiers (2001), a dificuldade para compreender a necessidade das demonstrações é um dos maiores problemas para seu ensino. A importância da prova (ou prova rigorosa, ou demonstração) para "o fazer" em Matemática pode ser percebida em atividades e discursos cotidianos da prática científica da Matemática em que a prova rigorosa é reconhecida como "elemento central no desenvolvimento do que se conhece por Matemática" (GARNICA, 1995, p. 11). No entanto, conflitos sobre a natureza da demonstração tem se mostrado marcado por "nítidas posições controversas" (GARNICA, 1995, p. 11) que fomentam o debate sobre tais noções. Além disso, os objetivos de uma demonstração matemática são abordados de maneiras diferentes.

Na literatura matemática, como afirma Garnica, especificamente na Lógica, há o cuidado de tratar o problema da prova do modo tradicionalmente aceito: "um mecanismo definido formalmente cujas raízes não necessitam de investigação e cujos frutos compõem a conhecida produção científica em Matemática" (GARNICA, 1995, p. 11). Questões sobre a natureza das demonstrações têm sido discutidas mais vezes nos campos da Filosofia da Matemática ou da Filosofia da Lógica, porém, a prova continua sendo concebida do modo usual: convencer, validar, verificar, assim como se pode constatar nos dados coletados.

A demonstração, tradicionalmente, tinha como finalidade a verificação da correção das afirmações matemáticas. Neste sentido era usada para eliminar as dúvidas, pessoais ou dos céticos. Tal finalidade para a demonstração, segundo De Villiers (2001), dominou de forma unilateral a prática de ensino e boa parte das discussões e investigações referentes ao ensino das demonstrações. Este autor cita Hanna e Volmink como exemplos de pesquisadores que parecem definir demonstração em termos da função de verificação:

> Uma demonstração é um argumento necessário para **validar** uma afirmação, um argumento que pode assumir várias formas diferentes desde que seja convincente. (HANNA[1], 1989, p. 20 apud DE VILLIERS, 2001, p. 31, grifo do autor).
> Porque é que nos preocupamos em demonstrar teoremas? Defendo aqui que a resposta é: para que possamos **convencer** pessoas (incluindo nós próprios)... podemos encarar a **demonstração como um argumento suficiente para convencer um céptico razoável**. (VOLMINK[2], 1990 apud DE VILLIERS, 2001, p. 31, grifo do autor).

A validação de conceitos e ideias matemáticas não é a única possibilidade para as demonstrações. Thurston (1994) considera, por exemplo, que a demonstração matemática é uma atividade interligada à construção da própria Matemática servindo para trazer entendimento e compreensão. Enquanto Hanna e Jahnke (1996) elencam as seguintes funções para a demonstração:

- Verificar: conferindo o estatuto de verdade de uma sentença;
- Explicar: esclarecendo o porquê de a sentença ser verdadeira;
- Sistematizar: organizando vários resultados dentro de um sistema dedutivo de axiomas, conceitos e teoremas;

1 HANNA, G. More than formal proof. For the Learning of Mathematics. 9(1), p. 20-23, 1989.
2 VOLMINK, J. D. The Nature and Role of Proof in Mathematics Education. Pytagoras, 23, p. 7-10, 1990.

- Propiciar a descoberta: possibilitando a criação de novos resultados;
- Propiciar a comunicação: possibilitando a transmissão de conhecimento matemático.

De Villiers (2001), ampliando o estudo de Bell[3] (1976 apud DE VILLIERS, 2001), apresenta as seguintes funções para a demonstração:

- Verificação: convencimento (próprio e dos outros) em relação à veracidade de uma afirmação;
- Explicação: compreensão do motivo pelo qual uma afirmação é verdadeira;
- Sistematização: organização de resultados em um sistema dedutivo de axiomas, conceitos e teoremas;
- Descoberta: a tentativa de se demonstrar uma conjectura pode levar a novos resultados (descoberta de teorias e conjecturas);
- Comunicação: comunicar e disseminar o conhecimento matemático na sociedade (entre Matemáticos profissionais, entre Professores e entre os estudantes);
- Desafio intelectual: satisfação pessoal pelo êxito na construção de uma demonstração.

Ao ampliar a gama de funções das demonstrações para o matemático, nos aproximamos do trabalho de sala de aula. Particularmente podemos nos referir às Investigações Matemáticas (PONTE *et al.*, 2004) como tentativas de replicar o trabalho do matemático em sala de aula, levando-o a conjecturar e descobrir caminhos para verificar sua veracidade ou refutá-las.

Assim como um professor de Ciências deveria ter um maior entendimento do *modus operandis* do fazer Ciência, pensamos que os cursos de Matemática deveriam auxiliar o futuro Professor de Matemática a ter um entendimento do fazer Matemática, aí incluído o papel da demonstração para o Matemático. Nesse sentido, não basta incluí-lo na rotina Definição - Teorema - Demonstração. Há necessidade de se falar sobre, de tomar como tema diferenças e semelhanças entre o trabalho do Matemático e do Professor de Matemática e incluí-lo em uma rotina de investigação, as quais podem ser exemplificadas pelas Investigações Matemáticas (PONTE *et al.*, 2004).

Categoria Dois: as demonstrações e a formação e atuação do Professor de Matemática

Nessa categoria os entrevistados explicitam suas ideias relativas ao papel da Demonstração para o Professor de Matemática. O que esperam os Formadores dos futuros Professores enquanto alunos de seus cursos e em sua futura atuação profissional. Quais os impactos que o aprendizado de demonstrações deveria ter para o exercício profissional, do ponto de vista dos Formadores e como tais impactos são percebidos pelos Professores entrevistados.

Um dos Formadores se atém particularmente a função da demonstração para comunicar e disseminar o conhecimento matemático:

> O que eu espero de um aluno que termina o curso de Licenciatura em Matemática é que ele tenha condições de pegar um texto matemático e ler. [...] que ele tenha condições de ler um enunciado, com épsilons, com deltas, com sequências convergindo, Álgebra, qualquer outro assunto... ou artigo, mesmo na Revista do Professor de Matemática, que ele tenha condições de ler aquele artigo, entender as definições, saber o que é um lema, o que é um teorema, uma proposição. [...] Com a estrutura que existe no texto matemático, onde as demonstrações desempenham um papel fundamental de garantir que aqueles dados são verdadeiros, um Matemático tem

3 BELL, A. W. A study of pupils proof-explanations in Mathematical situations. Educacional Studies in Mathematics, 7, 23-40, 1976.

> que ter condições de pegar um texto do nível dele, se ele é Licenciado em Matemática pegar qualquer texto de nível de graduação, ou Ensino Médio, ou Fundamental, ler aquilo; e mesmo que seja um texto mais avançado - como são aqueles textos do PROFMAT [...] tem que estar em condições de pelo menos ler estes textos e redigir uma demonstração. [...]Saber não só ler, mas também, se precisar, redigir um texto. Se ele descobriu um resultado, pensou em alguma coisa, como que ele vai convencer um colega, ou trazer um resultado, ou tentar escrever um artigo? [...] Eu acho que os alunos formados que saem daqui têm condições de ler algum texto e obter informações a partir dele. Não sei se produzir textos, mas eu espero que você como matemática formada pegue lá um artigo de uma Revista do Professor de Matemática e tenha condições de ler, se aquilo te interessou. [...] Tem que ter contato com o padrão formal da língua, ser alfabetizado dessa forma. (Formador α)

Para outro Formador, o papel das demonstrações é o de ampliar o entendimento sobre o assunto. Do ponto de vista desse Formador, as demonstrações dão mais segurança ao professor, que, com isso, poderá “explicar de maneira mais completa”:

> [...] Eu vejo que as demonstrações são extremamente importantes para a formação, tanto do bacharel quanto do licenciado. [...] Eu vejo que, trabalhar Matemática, mesmo em disciplinas específicas, com um rigor, com conceitos bem definidos, ajuda que o profissional explique esses conceitos de uma maneira mais segura. [...] O nível de compreensão acima daquele que é visto em sala de aula, ou que pode ser visto em sala de aula, eu acho desejável, pois acredito piamente no seguinte fato: acredito que você tendo mais domínio no assunto, você explica ele de uma maneira mais completa e mais segura para as pessoas. [...] Eu sou muito adepto do seguinte: quando você explica com segurança, você torna as pessoas também um pouco mais seguras e confiantes no que está sendo passado. Se você trabalha com insegurança, se você não entende direito do que está falando, você transmite desconfiança para as pessoas e o aprendizado fica comprometido. [...] E para ensinar Matemática você tem que ter uma certa familiaridade com o assunto. [...] (Formador β)

Tal argumento, encontra eco nas vozes dos professores, que percebem as demonstrações como algo que sustenta seu conhecimento matemático:

> [...] eu acho que sem a demonstração ele [professor] vai ficar com falhas no embasamento teórico. (Professor X)

> A forma como as demonstrações foram abordadas em minha formação contribuíram mais para o meu conhecimento do que para a utilização em sala de aula. (Professor Y)

> Eu acho que a gente tem que sair da graduação sabendo o porquê dessa demonstração, de onde que saiu [...] então eu acho que nesse sentido é necessário que o professor tenha esse conhecimento para poder passar isso. (Professora Z)

Os Formadores se referiram à relação entre a Licenciatura e o Bacharelado. Para os Formadores α e β, não deve haver diferenciações entre as modalidades.

> Eu não sei te dizer assim “como ensinar demonstração” ou “como é passar a demonstração para os alunos aqui da graduação, no curso de formação de professores de tal modo que eles possam fazer algo lá na frente”. Isso eu não sei responder. O que eu acredito é assim: “a demonstração na graduação”. [...] eu acho que na formação dos alunos, não vou dizer de professores, na formação dos alunos que frequentam Licenciatura eu entendo que é importante. [...] quando você dá aula para os alunos da Matemática eles querem saber a Matemática porque eles têm que saber, acham interessante ou porque tem que passar naquilo, mas eles não querem saber para que serve. A questão é a Matemática pela Matemática. É disso que eu gosto: a Matemática pela Matemática. [...] Pode dizer assim: “Ah a Federal” sei lá, “o curso de Licenciatura em Matemática da Federal é muito teórico” ou “dedica pouco tempo à formação do professor” em, por exemplo, Didática e Metodologia, mas é assim. Eu acho que essa parte da demonstração, [...] eu acho que forma. (Formador α)

> [...] Eu vejo que as demonstrações são extremamente importantes para a formação, tanto do bacharel quanto do licenciado. Elas não diferem nas disciplinas comuns, não vejo diferença. [...] Não vejo muita diferenciação no papel da demonstração para o Matemático e para o Professor de Matemática da Escola Básica, porque, repare, o licenciado tem atribuições de bacharel, pelo que me consta, então eu acho que o teor de conteúdo que Matemáticos devem ter, quando as matérias são exclusivamente de Matemática, devem ser os mesmos. Primeiro, pela atribuição que o diploma exerce: o licenciado tem atribuições de bacharel. O Licenciado em Matemática vai fazer um mestrado, por exemplo. E segundo, eu não acho assim que deva haver uma diferenciação, levando-se em conta a atual situação da qualidade que os alunos estão chegando na universidade, em termos matemáticos. [...] Então, por isso, eu acho que a Matemática que um bacharel e um licenciado devem ter, não deve ter muita diferença não. Ainda mais nas disciplinas comuns, como Cálculo, por exemplo, tem que serem vistas no mesmo nível de dificuldade, no mesmo nível de exigência. (Formador β)

Um dos professores, ao se referir ao seu curso, percebe essa similaridade entre as modalidades, embora seja perceptível uma outra expectativa em relação à Licenciatura:

> Quando eu era aluno, não falo agora... como eu saí fazem “só” 13 anos da universidade, muita coisa deve ter avançado, com certeza. Mas, eu acho que o nosso curso tinha o nome de Licenciatura só de fachada, né? (Professor X)

O Formador γ, aponta outros caminhos, aprofundando reflexões sobre o papel da demonstração para o trabalho do Professor de Matemática, que para ele, não deve ser considerado apenas como um conjunto de conhecimentos sistematizados, mas, antes de tudo, uma forma de pensar.

> [...] a Matemática não é um conhecimento sistematizado, não deve ser considerada apenas como um conhecimento sistematizado, a Matemática deve ser considerada mais como uma forma de pensar. [...] E o pensamento matemático tem várias etapas! Talvez a última etapa de rigor no pensamento seja a demonstração. O professor deve atingir esse nível de argumentação. [...] Ter uma nova argumentação. O professor deve ser capaz disso, porque ele tem condições mentais de atingir esse nível.

> [...] Agora, depende de como os Professores Formadores ensinam essas coisas, porque, muitas vezes, vão para o campo das pesquisas... Enfim, não abordam, não enfatizam esse aspecto do pensamento matemático. Inclusive, esse pensamento matemático de demonstração se pode fazer com conteúdos razoavelmente elementares. Não tem que atingir um conteúdo avançado em Matemática para aprender a pensar matematicamente. Então, eu acho que o professor deve aprender demonstração! Deve aprender a demonstrar em situações elementares de conteúdos. Aprender a demonstrar não significa saber muito de Matemática e sim saber pensar matematicamente. [...] Um Educador Matemático é um Professor de Matemática. Um Professor de Matemática tem que saber raciocinar matematicamente, tem que saber pensar matematicamente. Porque a Matemática é uma forma de pensamento, não é saber mais Matemática, não é saber mais algoritmos, mais fórmulas. Tem que saber pensar matematicamente e esse pensar matematicamente é uma gama de formas de argumentações diferentes que, entre elas, está a demonstração, que é a última etapa, já falamos, mas que para um Matemático é a palavra final sobre o que é válido matematicamente. [...] Sou da opinião que o Professor de Matemática tem que saber [demonstrar]. Não com o rigor de um Matemático profissional, que vai utilizar para aplicar a Matemática em outro contexto, em situações mais avançadas, não! [...] já trabalhei com a Licenciatura em diversas oportunidades e diversas disciplinas. E sempre tento dar um enfoque que possa ser feito para ambas as situações, para bacharéis e para licenciados, porque o bacharel também precisa aprender a argumentar em sua ciência. Ele vai, claro, aprender a argumentar com conteúdos avançados, mas o licenciado deve aprender a argumentar com conteúdos elementares. Então a questão é a diferença de conteúdo, talvez. De nível de conteúdo, mas enquanto forma e raciocínio, ambos precisam da mesma coisa. [...] Repito, acho que o licenciado, de repente, deve fazer isso com conteúdos mais elementares, enquanto que o bacharel pode fazê-lo com conteúdos mais avançados, mas não há diferença no tipo de argumentação. [...] (Formador γ)

Um dos pontos a serem ressaltados na argumentação do Formador γ, é a necessidade de se considerar demonstrações ou argumentações sobre conteúdos mais elementares, focando mais o papel do pensar matematicamente que, necessariamente os conteúdos. Já para os professores, há uma tendência em considerar diferentes níveis de demonstração, como “comparar”, “mostrar” e “exemplificar”:

> Sobre as demonstrações, bom, quando fazia o curso universitário dizia: “Para que isso meu Deus!”. E hoje, como professor, mostrar o sentido daquela prática matemática no nosso dia-a-dia... claro, mostrar de alguma forma. Então você começa, por exemplo, demonstrando a distância entre dois pontos num plano cartesiano, mostrando no triângulo retângulo, no Teorema de Pitágoras, fazendo o posicionamento dos pontos nas coordenadas do ponto A e do ponto B e, a partir dali, os alunos começam a entender o porquê das fórmulas, o que seriam as propriedades que nós usamos, porque que as fórmulas existem em si. E alguns alunos ainda entram em conflito. Eu prefiro fazer o desenho e interpretá-lo, pois, basta mostrar alguns exemplos e eles já conseguem perceber que aquela fórmula tinha uma certa importância, e essa fórmula saiu do Teorema de Pitágoras. (Professor X)

> Então, a demonstração feita por um Matemático e por um Professor de Matemática é diferente. Acho que um Professor de Matemática usa mais comparações, então, a fala deve ter muita comparação para poder chegar na linguagem apropriada. [...] Então, quando dá certo, é mais uma "mostração" do que uma demonstração. (Professor Y)

Quanto ao papel das demonstrações para o trabalho do Professor de Matemática em sala de aula, com exceção do Formador γ, encontramos um distanciamento dos outros Formadores em relação a essa discussão:

> Eu acho que na formação dos professores... bom essa é uma opinião pessoal, minha, como que eles vão usar isso depois eu não sei. Eu não sei te dizer assim "como ensinar demonstração" ou "como é passar a demonstração pros alunos aqui da graduação, no curso de formação de professores de tal modo que eles possam fazer algo lá na frente". Isso eu não sei responder. (Formador α)

> Mas, assim, formas metodológicas de aplicação de demonstração, isso eu deixo para os Educadores Matemáticos. Eu sou bacharel. Não tenho experiência nenhuma no assunto. (Formador β)

Tal distanciamento dos Formadores com relação ao papel das demonstrações para o trabalho do Professor de Matemática em sala de aula, reflete-se, indiretamente, na percepção da Professora Z, quando afirma:

> As demonstrações em minha formação não contribuíram para eu utilizar em sala. [...] (Professora Z)

Já o Formador γ aponta caminhos:

> Mas para um estudante de Matemática, que vai aplicar em outra situação, para um aluno pequeno... enfim, para outros casos, não se precisa desse nível de rigor para aceitar. [...] Então a forma de pensar, ou seja, eu incluiria a demonstração em um conceito mais amplo: a argumentação matemática. (Formador γ)

Compreensões

O papel e os significados das definições e das demonstrações são uma das distinções importantes entre o que Moreira e David (2010) chamam de Matemática Acadêmica e Matemática Escolar[4]. Acreditamos que tal distinção é um dos pontos cruciais da relação entre Formadores de Professores e a sala de aula de Matemática. Observamos nas entrevistas o distanciamento entre Formadores e Professores que se revela na dicotomia entre Matemática do Matemático versus Matemática do Professor de Matemática, ou bacharelado versus licenciatura. Ainda que em ambos os campos de atuação, bacharelado e licenciatura, se faça necessário bem caracterizar os respectivos objetos, validar afirmações a eles

4 Os autores usam as expressões Matemática Científica e Matemática Acadêmica como sinônimas que se referem à Matemática como um "corpo científico de conhecimentos" (MOREIRA; DAVID, 2010, p. 20) produzido pela prática do Matemático, sendo caracterizada pela produção de conhecimentos de fronteira. Já a Matemática Escolar é aquela que se refere ao conjunto de saberes associados especificamente ao desenvolvimento do processo de educação escolar básica em Matemática. E esta, por sua vez, tem ligação direta com a prática do Professor de Matemática da Escola Básica.

referidas e explicar os motivos pelos quais determinados fatos são aceitos como verdadeiros enquanto que outros não, a “formulação das definições e das provas e o papel que desempenham em cada um dos contextos são, todavia, bastante diferentes.” (MOREIRA; DAVID, 2010, p. 23).

Na primeira, tem-se que devido à sua estrutura axiomática, todas as provas se desenvolvem com base nas definições e teoremas definidos previamente. Neste contexto exige-se que as definições sejam precisamente formuladas, pois ambiguidades na caracterização de um objeto matemático podem ocasionar contradições na teoria. Moreira e David (2010) apontam ainda que as demonstrações rigorosas e as definições formais são, na Matemática Acadêmica, elementos importantes tanto durante o processo de conformação, quanto no processo de apresentação sistematizada da teoria já elaborada. Conformação, segundo estes autores, é o momento em que a comunidade avalia e eventualmente aceita um novo resultado, garantindo assim, sua incorporação ao conjunto dos resultados que são tidos como válidos.

No contexto da Matemática Escolar, por sua vez, encontram-se dois elementos fundamentais que, segundo Moreira e David (2010) modificam significativamente o papel das definições e provas e que podem agregar aos argumentos do Formador γ: (1) A “validade” dos resultados matemáticos que serão debatidos no processo de escolarização básica já está garantida, em princípio, pela própria Matemática Acadêmica, portanto, não é colocada em dúvida; (2) A aprendizagem, ou seja, o desenvolvimento de uma prática pedagógica que objetive a compreensão do fato e a construção de justificativas que possibilitem ao aluno utilizá-lo de maneira conveniente e coerente na sua vida seja ela escolar ou extraescolar.

Moreira e David (2010) consideram que existe uma diferença significativa entre ordenar argumentos logicamente irrefutáveis que garantam a validade de um resultado a partir de definições, postulados e conceitos primitivos de uma teoria; e, no contexto escolar, promover o desenvolvimento de uma profunda convicção a respeito da validade desse resultado. Citam como exemplo, a demonstração, matematicamente correta, do fato de que não há número inteiro entre 0 e 1:

> [...] para a Matemática Escolar não faz nem sentido argumentar: qualquer tipo de argumentação teria que **pressupor a aceitação, sem provas, de afirmações mais complexas e menos evidentes do que a própria tese a ser provada.** No entanto, para a Matemática Acadêmica, a demonstração faz sentido: entre outros objetivos possíveis, ela **explicita para o futuro matemático em processo de formação essa espécie de “suspensão da certeza”** a que devem ser submetidos todos os enunciados - até um como esse, impensável de se colocar em dúvida dentro da cultura escolar - para que se processe rigorosamente esse tipo de organização lógica da Matemática Científica, que é axiomática. (MOREIRA; DAVID, 2010, p. 24, grifo nosso).

Os autores afirmam também que o julgamento da validade e a própria elaboração das argumentações, no caso da Matemática Escolar, passam por considerações de cunho didático-pedagógico bem como pelo desenvolvimento de formas de convencimento próprias da comunidade escolar. Acreditam que na Matemática Escolar a “prova dedutiva e rigorosa não é a única forma aceitável de demonstração.” (MOREIRA; DAVID, 2010, p. 27). Entendem que as justificativas mais “livres”, isto é, menos formais, podem levar a uma compreensão mais aprofundada das relações matemáticas que estão em discussão, colaborando, nesse sentido para sustentar a visão do Formador γ e dos professores. Citam como exemplo o uso de dobraduras em papel para a verificação de certos fatos da Geometria: justificativas assim são mais próximas aos alunos, podendo constituir argumentações mais convincentes, dentro da comunidade escolar, do que as demonstrações formais.

Categoria Três: as demonstrações e a sala de aula de Educação Básica

Nessa categoria os entrevistados explicitam suas ideias relativas ao papel da demonstração para o aluno de Educação Básica. O que esperam os Formadores sobre as ações dos futuros Professores em suas futuras práticas de sala de aula em relação ao tema e como os professores percebem suas ações de ensino em relação às demonstrações.

Para o Formador α, as demonstrações são vistas como uma forma de conhecimento que não pode ser negada aos estudantes, além de auxiliar a encontrar e entender resultados:

> [...] o ensino de Matemática tem várias funções. A pessoa tem que aprender a Matemática, por exemplo, para usar no dia-a-dia, é uma função dela. [...] mas ela tem outras funções e, se você não contar um pouquinho daquilo, se a pessoa não tiver a chance de ver uma demonstração, ver que a Matemática é "você raciocinando em cima", é conseguir tirar conclusões, chegar a uma fórmula. [...] eu acho que a demonstração num sentido mais amplo: de você entender os resultados. De fazer uma construção até chegar, que tenha justificativas. Pode ser aí, pode ser em Geometria. Têm vários momentos que você pode deduzir expressões, pode perguntar se isso vale ou não vale, por que essa fórmula vale quando b^2-4ac é positivo, o que acontece? [...] Então você não pode privar as pessoas de ter acesso a esse conhecimento. A escola não pode privar ninguém de ter né? [...] (Formador α)

Já para o Formador β, as demonstrações em sala de aula da Educação Básica não diferem do Ensino Superior e são vistas como ferramenta para generalização:

> Nível Médio, demonstrações... não sei se é de uma forma muito diferente do que é visto aqui, com utilizações de exemplos, né? Exemplos básicos, particulares e, depois, apresentação da teoria, de uma forma mais abstrata, para que as pessoas entendam que, por exemplo, você faz uma demonstração na qual você está tratando de um determinado tema. Primeiro em casos específicos e depois mostra que essa situação pode ser utilizada em um caso mais geral. (Formador β)

Tais visões ecoam na sala de aula de acordo com a percepção dos professores:

> Então você começa, por exemplo, demonstrando a distância entre dois pontos num plano cartesiano [...] e, a partir dali, os alunos começam a entender o porquê das fórmulas, o que seriam as propriedades que nós usamos, porque que as fórmulas existem em si. [...] Então eu tento fazer com que o aluno chegue à fórmula, e não fornecer essa fórmula. [...] E até no meio de uma demonstração a gente começa a ver o leque de opções que uma pessoa começa a criar quando ela sabe demonstrar: ela consegue pensar a Matemática, desenvolver a Matemática de uma forma mais hábil (Professor X)

> Quando eu uso demonstração em sala de aula é para provar mesmo, porque em muitos casos não tem algo que dê um sentido prático para o aluno. Quando tem, ótimo! E quando você não consegue? As vezes aquilo que você está falando é utilizado em coisas que ele ainda não viu, daí ele não entende, né? Então, resta a linguagem matemática para provar que realmente aquilo que se fala é aquilo que se ouve. (Professor Y)

> Quando você pede para um aluno pôr a fórmula geral lá: ele repete, repete, repete e chega à conclusão de que se aquele número for um número qualquer, é assim que ele resolve, para demonstração. [...] Eu acho que a demonstração é válida, como eu te falei, quando você faz, por exemplo: numa questão de potência você chegar à conclusão de porque aquela base se repete, [...] e depois em alguma questão lá que ele perceba e chegue à conclusão que essa é a fórmula; [...] É que ele chegue à conclusão de que realmente é aquilo. Como demonstração daí é válido, que o aluno vá fazendo e chegue a essa conclusão. Porque daí ele enxerga. Na hora que ele conclui ele entende, ele expõe. (Professora Z)

Da mesma forma que ocorreu na categoria anterior, percebe-se um distanciamento do trabalho dos Formadores em relação à sala de aula:

> Não sei se eu teria capacidade, mesmo com a consciência que eu tenho hoje, se eu teria a capacidade para ensinar para eles, ou pior, conseguir motivar um grupo a se interessar por esse assunto [demonstrações]. (Formador α)

> Mas, assim, formas metodológicas de aplicação de demonstração, isso eu deixo para os Educadores Matemáticos. Eu sou bacharel. Não tenho experiência nenhuma no assunto. Aí, você pergunta, como é que demonstrações poderiam ser aplicadas ali, né? Uma boa pergunta! [...] Não tenho como contribuir nesse aspecto, pela minha inexperiência no assunto. (Formador β)

Tal distanciamento é percebido pelos professores que re(criam) o que se entende por demonstrações em sala de aula atrelando-a a questões metodológicas, à origem do conhecimento matemático, a aplicabilidade e contextualização:

> E ela tem realmente essa importância de mostrar, fazer com que o aluno perceba a importância daquela equação, por exemplo. [...] como professor a gente começa a fazer, a querer explicar para os alunos. [...] Eu prefiro fazer o desenho e interpretá-lo, pois, basta mostrar alguns exemplos e eles já conseguem perceber que aquela fórmula tinha uma certa importância. [...] tenho [no currículo] muitas demonstrações para explicar o motivo pelo qual aquela fórmula que nós temos [existe]. As demonstrações, nas minhas aulas, servem para mostrar o "porquê das coisas", principalmente das fórmulas. Mostrar por que elas foram criadas. (Professor X)

> Trabalho bem pouco com demonstrações com meus alunos. Não por não conhecer, é que às vezes diante de uma situação tão adversa, você vê que não convém usar como recurso metodológico uma demonstração nas turmas que temos hoje. [...] Hoje, diante da realidade, funciona mais você tentar contextualizar o que você está falando do que demonstrar o que você está falando. [...] Eu tento contextualizar. Eu não demonstro usando palavras, não dá certo. Eu contextualizo, eu tento justificar aquilo. É pegar algo lá fora e tentar ajustar a modelos matemáticos. Modelagem Matemática. A Modelagem Matemática, assim, falando em linguagem, funciona mais do que você demonstrar para o aluno. (Professor Y)

> [...] Acho que é válido, mas para exigir só demonstração, acho que - pode ser que eu esteja enganada - mas acho mais difícil, o trabalho é mais difícil. Digamos assim que a gente pegasse uma turma de 1°ano como experimento. No 1º ano ele vai, desde o primeiro passo dele, ele vai fazer sempre demonstrações, demonstrações... Aí vai chegar um momento que ele faz sozinho, isso sem dúvida nenhuma. Agora tem um grupo muito grande de alunos que têm todas as dificuldades e que não vai conseguir chegar. Porque a grande dificuldade do professor é deixar uma turma mais ou menos nivelada, que todos entendam. O ideal é que todo mundo saia daquele conteúdo entendendo, pelo menos 50% daquilo. E eu acho que com a demonstração é muito difícil. (Professora Z)

Presente no discurso do Formador γ e no discurso do Professor X, o termo argumentação é utilizado com vistas a apontar caminhos para processos de pensamento que visem à descoberta e investigação:

> Não coloco de uma forma muito, assim, como é que eu posso dizer... Não utilizo aquela forma mais "burocrática" de colocar a demonstração, formalizada: "Vamos demonstrar que o triângulo tal é semelhante ao triângulo tal." [...] Utilizo de uma forma mais simples. Mostro uma argumentação para eles. [...] prefiro que eles cheguem à conclusão de, entende? E não passar a eles a informação. Fazer com que eles comecem a buscar. [...] Então, sempre fazer com que o aluno busque a ideia. (Professor X)

> [...] se você quer levar o tipo de raciocínio que se faz na escola, para o aluno aprender Matemática, ou para o professor ensinar a pensar sobre Matemática com o aluno, de repente ao invés de usar a palavra "demonstração" pode usar "argumentações matemáticas". [...] E, talvez, para esse nível escolar, o mais importante seja primeiro aprender outros tipos de argumentações. Por isso eu acho que o regimento que está sendo colocado, à nível escolar, onde se pode aprender a conjecturar, aprender a argumentar, aprender a refutar, essas coisas, são completamente válidas. É talvez o processo mais natural de aprender a argumentar. E sabendo argumentar, no geral, em todas as suas faces, o pessoal aprenderá depois a demonstrar, porque a demonstração é um tipo de argumentação que exige certas regras. Mas é uma consequência, a nível escolar acho que não vai ser o mais importante. [...] Sou da opinião que ninguém vai aprender Matemática aprendendo primeiro a demonstrar. Não se aprende Matemática, aprendendo a demonstrar, né? Tem que ir por etapas, e isso tem também a ver com a idade, obviamente! Uma criança pequena não tem a capacidade de fazer argumentações mais complexas do que aquelas primárias de conjecturar... essas situações são etapas etárias. Também tem os níveis de abstração, tudo isso está envolvido. [...] Então, eu acho que os alunos devem aprender, e eu insisto muito nisso, a pensar matematicamente. E nesse aprender a pensar matematicamente, significa aprender a argumentar de diversas formas sobre a Matemática, entre elas, a demonstração. [...] Esse pensar matematicamente tem muitas formas de pensamentos, de argumentações, de situações... e a demonstração é uma delas, e talvez a etapa final. (Formador γ)

Compreensões

No contexto escolar, ou na Matemática Escolar (MOREIRA; DAVID, 2010), a demonstração como é abordada em um curso universitário de Matemática, com rigor e uso de procedimentos lógicos e dedutivos, não é a única maneira aceitável de demonstração e, poderíamos acrescentar, pode inclusive ser a menos aceita pelo público a que se pretende atingir. Quando se trata do ensino de demonstrações, mais do que a demonstração em si, devemos pensar em outras "formas" de raciocinar matematicamente que "antecedem" a demonstração propriamente dita, como, por exemplo: investigação, argumentação e justificação. É importante acrescentar que tais afirmações encontram eco em documentos oficiais, como, por exemplo, em Brasil (1998, 2017).

Moreira e David (2010) alertam que as demonstrações do tipo "menos formais" não são isentas de questionamentos e de complicações dentro do trabalho pedagógico na Educação Básica. Algumas das dificuldades a serem contornadas seriam:

> - a possibilidade de estímulo a um relaxamento exagerado de modo a se fazer despercebida a utilização de circularidade lógica (algumas vezes mais evidente, outras vezes sutil) nos raciocínios empregados nas justificativas;
> - a possibilidade de promoção de uma compreensão equivocada do papel da necessidade da validação dos resultados e das sentenças matemáticas no contexto da educação escolar básica (numa direção que levada ao extremo, se traduziria nos seguintes termos: "basta eu acreditar para ser considerado verdadeiro");
> - a possibilidade de reforçar certas concepções inadequadas (misconceptions) do aluno, as quais podem eventualmente funcionar como obstáculo ao desenvolvimento do processo de aprendizagem da Matemática Escolar. (MOREIRA, DAVID; 2010, p. 27, grifo no original).

Salientamos que, argumentos como os acima, são, algumas das vezes, utilizados para sustentar um trabalho idêntico para bacharelandos e licenciandos. Em "nome do rigor", uma geração de professores se vê privado de discutir em seus cursos outras formas de raciocínio, o que contribui para o distanciamento do trabalho com o pensamento matemático na Matemática Escolar.

Ainda pensando nas demonstrações no âmbito da escola, tem-se o trabalho de Hanna (1990, p. 6) que distingue a demonstração formal da demonstração aceitável, ambas no contexto escolar:

Demonstração formal: é a demonstração como conceito teórico da lógica formal que pode ser considerado como ideal. A prática matemática apenas se aproxima neste contexto;

Demonstração aceitável: é aquela como conceito normativo que define o que é aceitável para Matemáticos profissionais;

O ensino da demonstração: a demonstração como atividade matemática escolar servindo para esclarecer ideias que valem a pena os alunos conhecerem.

Em se tratando do ensino de demonstrações em Matemática tem-se o estudo de Boavida (2001). Uma boa demonstração, segundo esta pesquisadora, é aquela que além de convencer, explica e faz avançar na compreensão de um problema, ideia ou resultado matemático. Afirma ainda que a atividade do aluno de produzir uma demonstração, bem como a sensibilidade ao seu interesse e a comunicação clara e correta das ideias matemáticas envolvidas, têm mais importância do que o formato final da demonstração.

Boavida (2001) relata que em Portugal, até pouco tempo, o ensino das demonstrações encontrava-se basicamente relacionado com o ensino de Geometria e de Aritmética. Iniciava-se tal ensino no 3º ano do ciclo básico[5], pois conforme as ideias de Piaget, seria o estágio em que os alunos atingem as operações formais. Quem fazia as demonstrações eram, em boa parte do tempo, os professores e aos alunos restava seguir as demonstrações apresentadas pelo professor ou as demonstrações exibidas nos livros, além de ser capaz de reproduzi-las quando necessário. As demonstrações reproduzidas pelos alunos serviam para provar o seu saber e não para validar enunciados matemáticos, já que estes já haviam sido validados. Isto é, a observação, experimentação e formulação de conjecturas eram inexistentes:

> Tudo se passava como se não houvesse gênese de demonstração, como se de repente, por volta dos treze anos, se revelasse aos alunos que só a demonstração, em Matemática, é portadora de certezas e se obrigassem a entrar num jogo novo de que tinham que aceitar as regras e onde os critérios de verdade e validade eram diferentes dos que tinham utilizado até aí. Era como se os alunos tivessem que se submeter a uma racionalidade nova virando as costas à realidade que até aí lhes tinha sido útil e lhes tinha permitido lidar com a Matemática. Assim sendo, não é de estranhar que para muitos a aprendizagem da demonstração tenha constituído (e continue a constituir) uma fonte importante de insucesso e uma atividade em que não encontravam grande sentido (BOAVIDA, 2001, p. 12).

Boavida (2001) garante que ainda é possível encontrar traços dessa herança nas práticas escolares, apesar das orientações curriculares atuais procurarem questionar tal situação e apontarem caminhos diferentes para o ensino e aprendizagem da demonstração. Também no Brasil, conforme se pode apreender da fala de Professores e Formadores, as práticas escolares relacionadas ao ensino e aprendizagem de demonstrações estão fortemente ligadas à reprodução de conceitos apontados em livros didáticos e não, como sugerem documentos oficiais para o Ensino Básico, na observação, experimentação e formulação de conjecturas.

Boavida (2001) acredita que a aprendizagem da demonstração é um percurso. Para ela, a construção, pelos alunos, de uma ideia cada vez mais correta do que é uma demonstração, desenvolve-se ao longo dos anos de escolaridade, de modo que restringir a aprendizagem de demonstrações apenas aos anos finais do Ensino Básico, por considerar que os alunos mais velhos já atingiram a maturidade lógica necessária para compreender: definições abstratas, distinguir hipótese de tese, axioma, teorema e corolário, e ainda distinguir condições suficientes de necessárias, não parece ser o caminho mais adequado para que os alunos possam aprender a demonstrar e sintam a necessidade e gosto por tal atividade.

ALGUNS CAMINHOS

Na ocasião da finalização desse artigo, foi publicado o trabalho da Educadora Matemática Cynthia Anhalt e do Matemático Ricardo Cortez intitulado *Mathematics Education as a Mathematician's Research Area*: *an invitation for collaboration* na revista N*otices* da American Mathematical Society (ANHALT; CORTEZ, 2018). Ao lado da chamada principal, a frase: o clima atual da área

5 O ciclo básico de ensino em Portugal é dividido em três ciclos: o 1º ciclo vai do 1º ao 4º ano; o 2º ciclo inclui 5º e 6º ano; e, o 3º ciclo que compreende do 7º ao 9º ano.

de pesquisa em Educação Matemática é colaborativo. A intenção de tal artigo é mostrar que Educação Matemática e Matemática podem ser campos com conhecimentos complementares sobre determinados objetos, que, na situação era o ensino de modelagem para alunos e professores. Compreende-se como salutares aproximações nesse sentido e observa-se nesse estudo que o distanciamento de educadores matemáticos e matemáticos apenas resulta no distanciamento de importantes discussões em sala de aula.

Para que tais aproximações se viabilizem há uma proeminente necessidade de diálogo. O diálogo entre Matemática Acadêmica e Matemática Escolar, requer uma constante negociação de significados, de usos, de finalidades e, por que não, de abusos e de extrapolações. Se a Matemática Acadêmica, opera dentro de um sistema lógico, pois atende a determinados propósitos, há necessidade de se perceber que a Matemática Escolar, opera dentro de outro sistema, pois atende a outros propósitos. Ao não conceber isso, Formadores de Professores, afastam a possibilidade da utilização de raciocínios que, embora informais, são absolutamente úteis para o trabalho, inclusive de Matemáticos profissionais.

Na Matemática Acadêmica a demonstração assume o papel principal de Validação de um conhecimento. Já na Matemática Escolar, sobretudo porque, como aponta Moreira e David (2010), os conhecimentos já estão previamente validados, a demonstração deve ser vista como possibilidade de explicar o resultado em questão. Além disso, como tem enfatizado De Villiers (2012), o papel de descoberta, pode trazer outras motivações aos alunos, desde os anos iniciais. Mas, para isso, outros verbos devem ser incorporados aos cursos de formação de professores e serem tão naturais quanto demonstrar: conjecturar, argumentar, experimentar. Verbos que, somados, auxiliam os alunos a raciocinar matematicamente, aspecto fundamental da Matemática Escolar.

Tendências em Educação Matemática, como a Investigação Matemática em Sala de aula (PONTE *et al.*, 2004) nos auxiliam nesse encaminhamento em todas as áreas da Matemática Escolar: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística. Além dessa, na área de Tecnologias e Educação Matemática encontram-se experiências envolvendo a Geometria Dinâmica, que tem se mostrado um campo publicações em nível acadêmico, mas ainda pouco incorporado nas práticas de sala de aula. A Geometria Dinâmica auxilia os alunos em um processo de (re)descoberta, de forma autêntica. Tal re(descoberta) não é, de forma alguma, intrínseca ao trabalho com Geometria Dinâmica, há necessidade de um encaminhamento adequado, como sugerimos a seguir.

Um dos autores desse trabalho, professor de uma disciplina da grade curricular de Licenciatura, que toma como tema demonstrações em Geometria com o uso da Geometria Dinâmica, utiliza como sequência fornecer um enunciado para que os alunos elaborem o respectivo teorema. Vejamos o caso do Teorema de Varignon[6] e os desdobramentos ocorridos.

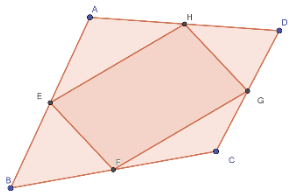
Aos alunos é dado o seguinte encaminhamento:

Construa um quadrilátero qualquer ABCD. Seja E, F, G e H, os pontos médios dos lados AB, BC, CD e DA, respectivamente. Qual a característica do quadrilátero EFGH? Enuncie em forma de teorema e justifique.

A construção da figura resulta na seguinte:

6 Teorema demonstrado pelo Matemático Pierre Varignon, que estabelece que a figura definida pelos pontos médios de qualquer quadrilátero é sempre um paralelogramo.

Figura 2 - Construção do Teorema de Varignon.

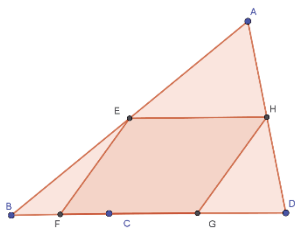


Fonte: os autores.

Espera-se que os alunos enunciem o teorema da seguinte maneira: Seja ABCD um quadrilátero qualquer e E, F, G e H, os pontos médios dos lados AB, BC, CD e DA, respectivamente. O quadrilátero EFGH é um paralelogramo. E o demonstrem utilizando relações de semelhança de triângulos. Tal demonstração, de modo geral, é precedida pela construção de uma diagonal de ABCD, no software de Geometria Dinâmica. Tendo em vista a possibilidade de se arrastar os vértices, visualiza-se com certa facilidade, que tal diagonal é paralela a lados opostos de EFGH, o que leva à utilização da semelhança de triângulos e a consequente finalização da demonstração.

Ocorre que quando os alunos tentam demonstrar teoremas utilizando-se de ferramentas de Geometria Dinâmica, é comum que considerem figuras em posições limites, como, por exemplo, transformar o quadrilátero em um triângulo, como o da figura:

Figura 3 - Construção de "particularização do Teorema de Varignon".



Fonte: os autores.

Não é incomum que, ao se depararem com a figura acima, os alunos enunciem outro teorema: Dado um triângulo qualquer ABD e E e H pontos médios de AB e AD, respectivamente. Seja C um ponto qualquer da base BD e F e G, os pontos médios de BC e CD, EFGH é um paralelogramo. A criação de corolários em que EFGH é um retângulo ou um quadrado surgem também de forma natural.

Percebe-se que atividades como essa podem suprir os anseios de Matemáticos e Educadores Matemáticos. Pois dizem respeito a dar a conhecer o *modus operandis* do trabalho do Matemático com seus termos e a correção da linguagem bem como estimulam a descoberta e o pensamento matemático.

Concordamos com (BOAVIDA, 2001, p. 13) que talvez o papel fundamental da demonstração é o de "promover a compreensão". O formato final de uma demonstração, para a pesquisadora, deve subordinar-se às possibilidades de compreensão e ser adequado ao nível de escolaridade e contexto de ensino. Mas ressaltamos que, também para ela, é importante que as demonstrações constituam um instrumento para fazer Matemática e não um objeto matemático a ser estudado. Afirma ainda que a demonstração ganha sentido e relevância quando os alunos sentem necessidade de fazê-la. A Geometria Dinâmica e as Investigações Matemáticas de modo geral, possuem grande potencial nesse sentido.

Segundo Boavida (2001), ao se falar sobre o ensino de demonstração, somos conduzidos a outras atividades matemáticas intimamente relacionadas com a atividade de demonstrar, tais como: **explorar**, **investigar**, **conjecturar** e argumentar. Juntamente com Pietropaolo (2005) aponta que tais atividades, diferentemente do que acontecia há alguns anos, são valorizadas nos currículos de Matemática de vários países. Por outro lado, pudemos perceber nessa pesquisa que tais verbos ainda estão distantes do discurso de Professores e Formadores.

O trabalho que o aluno desenvolve nas fases de exploração e teste de uma conjectura é, frequentemente, motivador para a produção da demonstração dessa conjectura e, neste contexto, Boavida (2001, p. 14) aponta que o grande desafio para o professor é o de aproveitar tal entusiasmo. Não se trata de tornar a atividade de formulação de conjecturas subordinada à possibilidade de demonstração, pode acontecer do aluno formular uma conjectura que ele não seja capaz de demonstrar com os conhecimentos matemáticos que possui no momento. No entanto, trata-se de um importante passo para desenvolver o pensamento matemático, além de proporcionar aos alunos um maior aprofundamento da compreensão sobre o trabalho dos Matemáticos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esse estudo teve como objetivo tecer compreensões sobre as percepções do Professor de Matemática da Educação Básica e do Formador de Professores de Matemática sobre as demonstrações e seu ensino. Os dados constituídos foram submetidos à Análise de Conteúdo, possibilitando a emersão de três categorias: a demonstração e o trabalho do Matemático; a demonstração e a formação e atuação do Professor de Matemática; e, a demonstração e a sala de aula de Educação Básica.

A análise empreendida evidenciou distanciamentos entre a formação e a atuação dos professores e a redução das funções da demonstração. O diálogo entre os dados constituídos e a literatura serviram de suporte para a apresentação de caminhos para a superação da dicotomia formação/atuação encontrada. Compreendemos que a direção a ser tomada não está na adesão ou conformação das ideias de uma comunidade pela outra, mas no diálogo e na ampliação das funções da demonstração, na incorporação de outros termos e de experiências legítimas de "pensar matematicamente" na formação de professores.

Espera-se que os resultados aqui encontrados possam servir de motivação a estudos sobre o ensino de demonstrações e seus termos correlatos, tanto no âmbito da formação de professores quanto no da Educação Básica. Na mesma direção de Anhalt e Cortez (2018), compreendemos que se esses estudos envolverem Matemáticos e Educadores Matemáticos, o estreitamento do distanciamento aqui relatado pode ser ainda mais visível e maiores os benefícios para os futuros professores e, futuramente, seus alunos.

REFERÊNCIAS

ANHALT, C. O.; CORTEZ, R. **Mathematics Education as a Mathematician's Research Area:** an invitation for collaboration. Notices da American Mathematical Society. v. 65, No 8. Setembro de 2018.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. Tradução: RETO, L. A.; PINHEIRO, A. São Paulo: Edições 70, 2011.

BOAVIDA, A. M. R. Um olhar sobre o ensino da demonstração em Matemática. **Educação e Matemática**. Lisboa, n. 63, p. 11-15, maio/junho 2001.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática (5ª a 8ª séries). 148 p. Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em: https://bit.ly/2JrweUk. Acesso em: março 2019.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. Resolução CNE/CP nº 01/2002, de 18 de fevereiro de 2002. **Institui as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores de Educação Básica, em nível superior, curso de licenciatura, de graduação plena**. Diário Oficial da República Federativa do Brasil, Brasília, DF, fev. 2002. Disponível em: https://bit.ly/2gPm8PY. Acesso em: março 2019.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. Resolução CNE/CP nº 02/2015, de 1 de julho de 2015. **Define as Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação inicial em nível superior (cursos de licenciatura, cursos de formação pedagógica para graduados e cursos de segunda licenciatura) e para a formação continuada.** Diário Oficial da República Federativa do Brasil, Brasília, DF, fev. 2015. Disponível em: https://bit.ly/2HHTkR7. Acesso em: março 2019.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília: MEC, SEB, 2017.

DE VILLIERS, M. An illustration of the explanatory and discovery functions of proof. **Pythagoras**, v. 33, n. 3. November, 2012.

DE VILLIERS, M. Papel e funções da demonstração no trabalho com o Sketchpad. Tradução de: VELOSO, E. **Educação e Matemática**, Lisboa, n. 62, p. 31-36, março/abril 2001.

GARNICA, A. V. M. **Fascínio da técnica, declínio da crítica: um estudo sobre a prova rigorosa na formação do professor de Matemática**. 258 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, 1995.

GOUVÊA, F. A. T. **Aprendendo e ensinando geometria com a demonstração: uma contribuição para prática pedagógica do professor de matemática do ensino fundamental**. São Paulo, 1998. Dissertação (Mestrado em Educação) - Setor de Educação, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

HANNA, G. Some pedagogical aspects of proof. **Interchange**, v. 21, n. 1, p. 6-13, 1990.

HANNA, G.; JAHNKE, H. N. Proof and proving. **International Handbook of Mathematics Education**. Holanda: Academic Publishers, pp. 877-908, 1996.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. **A formação matemática do professor: licenciatura e prática docente**. Belo Horizonte: Autêntica, 2010. (Tendências em Educação Matemática, 11).

PIETROPAOLO, R. C. **(Re) Significar a demonstração nos currículos da educação básica e da formação de professores da educação básica**. Tese de Doutorado. PUC - São Paulo, 2005.

PONTE, J. P. ; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na sala de aula.** São Paulo: Editora Autêntica, 2004.

THURSTON, W. P. On proof and progress in mathematics. **Bulletin of the American Mathematical Society.** Volume 30, n. 2, abr. 1994, p. 161-177.

RECEBIDO EM: 10 jan. 2019
CONCLUÍDO EM: 18 mar 2019