VIDYA, v. 34, n. 1, p. 209-232, jan./jun., 2014 - Santa Maria, 2013. **ISSN** 2176-4603

TRABALHAR ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: POSSIBILIDADES EM DOIS DIFERENTES CONTEXTOS

WORKING THROUGH PROBLEM SOLVING: POSSIBILITIES IN TWO DIFFERENT CONTEXTS

NORMA SUELY GOMES ALLEVATO*

RESUMO

O objetivo do presente artigo é analisar uma abordagem específica para a Resolução de Problemas em Educação Matemática, qual seja a Metodologia de Ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. É feita uma breve contextualização justificando sua adoção em função de demandas atuais para a Educação e de orientações oficiais e curriculares recentes. Considerada como uma metodologia de ensino, são apresentados seus fundamentos e as linhas gerais para sua implementação. Particularmente, são descritas e analisadas experiências realizadas em dois contextos: o da Educação de Jovens e Adultos (EJA) e o da Formação Inicial de Professores. As pesquisas desenvolvidas mostram interessantes possibilidades que tal metodologia oferece no sentido de incrementar a aprendizagem, melhorar os processos de ensino e promover o aprimoramento das práticas dos professores de Matemática.

Palavras-chave: Educação Matemática. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Educação de Jovens e Adultos. Formação de Professores.

ABSTRACT

The purpose of the present paper is to analyze a specific approach for Problem Solving in Mathematics Education, which is the Methodology of Mathematics Teaching-Learning-Evaluation through Problem Solving. A brief contextualization is made to justify its use according to the current requirements for Education and recent official and curricular guidelines. Considered as a teaching methodology, its fundaments and general lines are presented for its implemenation. In particular, experiments carried out in two contexts are described and analyzed: Youth and Adult Education (EJA) and Teacher Education. The developed researches show interesting possibilities such methodology offers in order to develop learning, improve teaching processes and favor the perfectioning of Mathematics teachers' practices.

Keywords: *Mathematics Education. Mathematics Teaching-Learning-Evaluation through Problem Solving. Youth and Adult Education. Teacher Education.*

* Doutora em Educação Matemática pela UNESP-Rio Claro/SP. Docente, pesquisadora e vice-coordenadora do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo/SP/Brasil. E-mail: normallev@gmail.com.br

INTRODUÇÃO

Durante o último século, ao lado e em função de um crescimento econômico sem precedentes, as sociedades presenciaram mudanças radicais nos objetivos da Educação formal e informal. As mudanças decorrem da configuração de novas demandas que a sociedade atual apresenta aos cidadãos e às instituições.

Os sistemas educativos devem dar resposta a múltiplos desafios, na perspectiva de um enriquecimento contínuo dos saberes e do exercício de uma cidadania adaptada às exigências do nosso tempo. (DELORS, 2004).

Sem prescindir da cultura geral, os indivíduos são chamados a especializar-se em determinadas áreas ou assuntos. A cultura geral permite ao cidadão comunicar-se, integrar-se e estabelecer relações cooperativas nesses contextos, mas a especialização torna-os capazes de enfrentar os problemas cada vez mais pontuais, específicos e complexos em determinados contextos.

Os sistemas de ensino devem atentar para a formação de pessoas que busquem, pela profundidade de seu conhecimento, contribuir para a satisfação das necessidades de formação de pessoas para a sociedade atual. Nesse sentido, aspectos como criatividade, habilidade para trabalhar em equipe, naturalidade no enfrentamento de novos problemas, autodidatismo, autonomia intelectual, entre outros, vêm sendo apontados.

Estamos em um tempo, portanto, em que trabalhar com Educação tornou-se um desafio e um convite à constante reorientação e renovação das práticas pedagógicas. A sociedade, as formas de vida e de trabalho, as instituições formais e informais, as relações humanas, enfim, tudo está em constante transformação. Assim, certamente, também o contexto educacional está mudando e exigindo dos educadores um contínuo movimento de busca por reconstrução de seu conhecimento e recriação de suas práticas.

Nos cursos de formação inicial ou continuada, professores têm sido constantemente orientados a direcionar suas ações, adotando práticas reflexivas, para que estimulem o trabalho em equipe e implementem a construção e desenvolvimento do ensino por projetos e pela resolução de problemas. Capacidade de adaptação a novas situações, persistência e criatividade no enfrentamento e busca de soluções para novos problemas são qualidades fundamentais que devem, tanto quanto possível, ser estimuladas e desenvolvidas com os alunos.

Porém, o fato é que o trabalho com Educação, atualmente, tem exigido uma postura tal de seus profissionais que todas as alternativas de práticas pedagógicas implementadas e as novas abordagens que se têm experimentado representam mais tentativas de acompanhar o dinamismo da sociedade atual, do que soluções ou encaminhamentos duradouros e definitivos.

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO

O relatório para a UNESCO, da Comissão Internacional sobre Educação para o século XXI (DELORS, 2004), analisa as tensões que deverão ser enfrentadas neste século. Muitas, já não novas, ainda constituem o cerne da problemática com que se defronta a Educação neste século. O conceito de Educação ao longo de toda a vida deve ser retomado e mantido, mas precisa ser reelaborado de modo a conciliar elementos coexistentes na sociedade atual, como os de tradição e modernidade, universalidade e individualidade, concorrência e cooperação, competição e igualdade de oportunidades.

Em seu livro, sugestivamente chamado “A Solução de Problemas - Aprender a resolver, resolver para aprender”, Pozo (1998) destaca que, entre as muitas indicações para realizar as mudanças educacionais que estão sendo recomendadas, uma das mais incisivas é a resolução de problemas. Ela tem sido fortemente recomendada nas orientações curriculares atuais, não só como objetivo parcial de diversas áreas dos Ensinos Fundamental e Médio, mas como um objetivo geral a ser alcançado ao final da Educação Básica. Destaque-se que este objetivo educacional só poderá ser atingido se a resolução de problemas tornar-se espontânea no cotidiano da escola, e

> [...] se for gerada no aluno a atitude de procurar respostas para suas próprias perguntas/problemas, se ele se habituar a questionar-se ao invés de receber somente respostas já elaboradas por outros, seja pelo livro-texto, pelo professor ou pela televisão. O verdadeiro objetivo final da aprendizagem da solução de problemas é fazer com que o aluno adquira o hábito de propor-se problemas e de resolvê-los como forma de aprender. (POZO, 1998, p. 15).

Os objetivos específicos, as formas de implementação pelo professor e as características da atividade realizada pelos alunos, durante o processo de resolução de problemas, atendem a especificidades relativas a cada uma das áreas de ensino. Dessa maneira, certamente, estas especificidades configuram diferenças entre a resolução de problemas em diferentes disciplinas curriculares. Percebe-se que, devido não somente à natureza dos conteúdos como à tradição educacional, em algumas áreas ela se faz mais fortemente presente. É o que observamos com relação às Ciências da Natureza, aos Estudos Sociais e, especialmente, à Matemática.

Por ser o principal foco deste texto, o conteúdo da próxima seção volta-se ao ensino nesta terceira área, ou seja, à Resolução de Problemas na Educação Matemática.

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

O termo “problema” é bastante presente no dia a dia de pessoas que trabalham com Matemática, ou com seu ensino e aprendizagem, entretanto nem sempre seu uso é acompanhado de um consciente posicionamento sobre o seu significado.

Em Allevato (2005) é desenvolvida uma discussão acerca dos vários significados que alguns estudos explicitam acerca do que é um problema. Para o que será discutido neste artigo, manifestamos nossa concordância com a afirmação de que um problema: “[...] é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em resolver” (ONUCHIC, 1999, p. 215). Essa definição vai ao encontro das concepções de Van de Walle (2009), segundo as quais um problema é considerado como “qualquer tarefa ou atividade para a qual os estudantes não têm regras ou métodos prescritos ou memorizados, nem há um sentimento por parte dos estudantes de que há um método ‘correto’ específico de solução.” (HIBERT, 1997 apud VAN DE WALLE, 2009, p. 57).

Ao analisar a literatura, observa-se, ainda, que há também diferentes posicionamentos sobre qual é o objetivo da resolução de problemas no ensino de Matemática (ALLEVATO, 2005).

O fato é que, embora os problemas sempre tenham ocupado um lugar de destaque no ensino e nos currículos de Matemática, sua finalidade e outros aspectos ligados a ela passaram por mudanças. Essas ocorreram, principalmente, para tentar acompanhar as diferentes visões sobre o porquê de se ensinar Matemática, em geral, e Resolução de Problemas, em particular.

George Polya (1944) colocou a prática de resolver problemas como inerente à natureza de qualquer atividade humana, além de considerá-la fundamental para o desenvolvimento da inteligência, que é um dos objetivos da Educação.

Algumas ferramentas teóricas (categorias, critérios de classificação, etc.) têm sido elaboradas na tentativa de possibilitar uma melhor compreensão e diferenciação do papel que os professores outorgam à resolução de problemas nas aulas de Matemática, a partir de suas concepções sobre o ensino. Contreras e Carrillo (1998) acreditam, inclusive, que, reciprocamente, é muito provável que esse papel defina, em grande medida, a concepção de ensino subjacente. Esses autores utilizam categorias bem definidas para caracterizar quatro tendências didáticas em resolução de problemas, não mutuamente exclusivas, que denominaram: tradicional, tecnológica, espontaneísta e investigativa, e referem-se aos objetivos da resolução de problemas para cada uma destas tendências:

- tradicional: assimilar e afiançar a teoria aplicando-a;
- tecnológica[1]: principalmente dotar a teoria de um significado pragmático; introduzir um tema, sondar conhecimentos prévios e, algumas vezes, levar ao entendimento da teoria;
- espontaneísta: adquirir conhecimentos e incitar atitudes positivas, para comprometer os alunos com seu processo de aprendizagem;
- investigativa: aprender heurísticas e analisar processos para a construção e formalização de conceitos.

Shimada (1997) também relaciona os tipos de problemas à abordagem de ensino subjacente. Aos problemas tradicionalmente utilizados, ou seja, àqueles que têm somente uma resposta correta e predeterminada, ele denomina problemas fechados. E propõe chamar de problemas abertos àqueles que têm várias respostas corretas ou vários métodos para obter a resposta. Estes últimos, segundo o autor, devem ser os primeiros a serem apresentados na abordagem de ensino que chama “abordagem aberta”, na qual o objetivo é fornecer oportunidade ao aluno de vivenciar experiências de ensino onde ele possa encontrar “algo novo” no processo.

Van de Walle (2009) considera que os problemas abertos devem ser utilizados quando o objetivo é realizar explorações matemáticas. Ele apresenta critérios segundo os quais os problemas são abertos quando: o processo é aberto (são explorados múltiplos caminhos para a solução), o final é aberto (há múltiplas respostas corretas a serem descobertas), a formulação de novos problemas é aberta (os alunos exploram novos problemas relacionados ao problema dado).

Van de Walle (2009) trata da resolução de problemas como estratégia de ensino. A partir desse ponto de vista, ele afirma que tarefas ou problemas podem e deveriam ser propostos para envolver os estudantes em atividades para pensar sobre e para desenvolver a Matemática importante que eles precisam aprender.

Existem, portanto, diferentes formas de abordar a resolução de problemas. Elas merecem maior aprofundamento e apresentam importantes implicações no ensino de Matemática. Em particular, a concepção da resolução de problemas como metodologia de ensino para o trabalho em sala de aula de Matemática é o fio condutor das experiências que serão relatadas e analisadas no presente trabalho. Desse modo, dedicaremos a ela a próxima seção.

1 Aqui, o termo tecnologia não está associado, conforme é usual, a recursos informáticos. Antes, refere-se a um conjunto de conhecimentos, especialmente princípios científicos, que se aplicam a um determinado ramo de atividade.

O ENSINO-APRENDIZAGEM-AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

A Resolução de Problemas na Educação Matemática passou por períodos bastante marcantes e que lhe conferiram perspectivas e posições diferenciadas, em função de movimentos de reformas curriculares e de orientação para o ensino de Matemática que ocorreram, especialmente, no século XX e neste início do século XXI. (ONUCHIC, 1999; ALLEVATO, 2005; ALLEVATO; ONUCHIC, 2009).

Especialmente a década de 1980, após o declínio da Matemática Moderna e alavancada por indicações de documentos e orientações norte-americanas elaboradas pelo National Council of Teachers of Mathematics e seus membros (NCTM, 1980; KRULIK; REYS, 1980[2]), a pesquisa e as orientações para o trabalho com Matemática em sala de aula voltaram-se para a Resolução de Problemas. Tornou-se vasta a literatura de pesquisa em Educação Matemática que tratava de Resolução de Problemas e pôde-se perceber, também, que o termo "resolução de problemas" era muito utilizado nos textos e livros texto de Matemática. Apesar disso, Schroeder e Lester (1989), apoiados nas ideias de Hatfield (1978), em seus estudos perceberam, no final daquela década, três formas de conceber a resolução de problemas: (1) ensinar **sobre** resolução de problemas, (2) ensinar **para** resolução de problemas, e (3) ensinar **via** resolução de problemas. (Grifos dos autores, p. 32).

A primeira dessas concepções corresponde a teorizar sobre resolução de problemas, de modo que ela deve ser mais um conteúdo a ser ensinado. O livro How to Solve it[3], de George Polya (1944), tornou-se referência no ensino sobre resolução de problemas. Esta obra pode ser considerada, talvez, o mais importante exemplo entre os trabalhos com teor essencialmente voltado a ensinar sobre resolução de problemas. Insere-se nessa concepção também o livro do ano do NCTM (KRULIK; REYS, 1980), com capítulos de vários estudiosos de destaque, à época, voltados a orientações e reflexões acerca da Resolução de Problemas no ensino de Matemática. Prevalecia a recomendação da adoção e domínio de estratégias, e muitos entenderam que esse domínio seria atingido pela repetição. O aluno era submetido a longas listas de problemas semelhantes uns aos outros, visando promover a fixação do caminho adotado para se chegar à solução. Se o aluno repetisse, nas avaliações, o que o professor havia feito, concluía-se que o aluno tinha aprendido (ONUCHIC, 1999; ALLEVATO, 2005).

A segunda concepção é a do ensino para a resolução de problemas, visão que considera a Matemática como utilitária de modo que, embora a aquisição de conhecimento matemático seja de primordial importância, o propósito principal do ensino é ser capaz de utilizá-lo. O professor concentra-se no modo como a Matemática que está sendo ensinada pode ser aplicada na resolução de problemas, e preocupa-se com a habilidade dos alunos de transferirem o que aprenderam num contexto para problemas em outros contextos, ou seja, ele ensina para a resolução de problemas.

Essa é, ainda atualmente, a concepção mais presente nas salas de aula e nos livros texto de Matemática, mas pode levar a configurar a resolução de problemas como uma atividade que os alunos só podem realizar após a introdução de um novo conceito, ou após o treino de alguma habilidade de cálculo ou algoritmo. Além disso, nessa visão, a Matemática frequentemente é ensinada separada de suas aplicações. Van de Walle (2009) dá a esse tipo de abordagem de ensino o nome de "paradigma do teach-then-solve", referindo-se à abordagem em que há uma nítida separação entre o que é ensinar Matemática e o que é resolver problemas, realizados nessa ordem.

Uma terceira possibilidade, o ensino via resolução de problemas, considera a resolução de problemas como um meio de ensinar Matemática, e caminhou para o que, recentemente, tem sido de-

2 Esta obra possui uma tradução em português intitulada A Resolução de Problemas na Matemática Escolar, São Paulo: Atual, 1997.
3 Esta obra possui uma tradução em português intitulada A Arte de Resolver Problemas. Rio de Janeiro: Interciência, 1994.

nominado ensino através da resolução de problemas. Esta abordagem ganhou força principalmente a partir dos anos 1990s, quando o NCTM desenvolveu um intenso trabalho, registrado em diversas de suas publicações (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011) com a finalidade de auxiliar os professores e destacar aspectos considerados essenciais para o ensino de Matemática. Naquela que foi o ponto de chegada desse trabalho e, possivelmente, a de maior impacto entre essas publicações, o Standards 2000 (NCTM, 2000), são indicados cinco Padrões de Procedimento para a Matemática Escolar, entre os quais o primeiro é Resolução de Problemas. E, assim considerada como um procedimento, a concepção que passa a ser explicitamente recomendada por essa organização é a do ensino de Matemática através da resolução de problemas. Posteriormente, dando continuidade a esse trabalho, o NCTM efetiva mais duas publicações integralmente nessa linha (LESTER JR, 2003; SCHOEN, 2003) e ganha adeptos que exercem relevante influência, especialmente no âmbito da pesquisa e da formação de professores, considerando aspectos voltados tanto para o ensino e para aprendizagem, como para a avaliação. (VAN DE WALLE, 2001[4]; CAI; LESTER, 2012)

Associado às ideias do construtivismo, o ensino através da resolução de problemas tem consonância com as palavras de Santos (2002):

> [...] a aquisição de novos conhecimentos está estreitamente ligada ao processo de interação entre o sujeito e o objeto de estudo; em matemática costumamos dizer que o aluno aprende pela resolução de problemas, e não escutando o professor relatar esse objeto em sua aula (p. 14).

Ele nos apresenta o seguinte esquema:

Primeiro momento:		**Segundo momento:**		**Terceiro momento:**
Permite que o aluno invista seus	⇨	Permite que o aluno tome consciência da insuficiência desse conhecimento.	⇨	Permite que o aluno CONSTRUA

(SANTOS, 2002, p.15)

e explica que esse modelo consiste em colocar o aluno diante de um obstáculo que gerará um conflito, causado pela constatação de insuficiência e/ou de contradições entre antigos conhecimentos e a situação que lhe é apresentada, o problema. "Forçado" a criar mecanismos, será levado a construir conhecimento para resolver a situação, de modo que a responsabilidade pela aprendizagem é colocada em suas mãos.

Tais considerações nos conduzem à adoção da resolução de problemas como uma metodologia de ensino, no sentido de que

> [...] os problemas são propostos aos alunos antes de lhes ter sido apresentado formalmente o conteúdo matemático necessário ou mais apropriado à sua resolução que, de acordo com o programa da disciplina para a série atendida, é pretendido pelo professor. Dessa forma, o ensino-aprendizagem de um tópico matemático começa com um problema que expressa aspectos-chave desse tópico e técnicas matemá-

4 A tradução em Português, dessa obra, corresponde a VAN DE WALLE (2009).

ticas devem ser desenvolvidas na busca de respostas razoáveis ao problema dado. (ALLEVATO, ONUCHIC, 2009, p. 142).

Segundo Allevato e Onuchic (2009), nesse enfoque o ponto de partida das atividades matemáticas deixa de ser a definição e passa a ser o problema, chamado "problema gerador". A resolução de problemas como metodologia de ensino, denominada por elas Metodologia de Ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, constitui-se em uma abordagem mais completa e abrangente que as outras duas, uma vez que não exclui as demais concepções. Consideram que, quando o professor adota essa metodologia, os alunos podem aprender tanto sobre resolução de problemas, quanto aprendem Matemática para resolver novos problemas, enquanto aprendem Matemática através da resolução de problemas. Além disso, a avaliação, coerente com orientações recentes, é integrada aos processos de ensino e aprendizagem, permitindo detectar as dificuldades dos alunos e saná-las durante o processo, e reorientando as práticas de sala de aula, quando necessário.

Alguns autores têm sugerido formas de colocar em prática essa metodologia (KRULIK; RUDNICK, 2005; VAN DE WALLE, 2009). Allevato e Onuchic (2009) sugerem a seguinte sequência de passos: (1) Preparação do problema, (2) Leitura individual, (3) Leitura em conjunto, (4) Resolução do problema, (5) Observar e incentivar, (6) Registro das resoluções na lousa, (7) Plenária, (8) Busca do consenso e (9) Formalização do conteúdo.

O detalhamento do que significa e das ações que constituem cada uma dessas etapas por ser encontrado em Allevato e Onuchic (2009), assim como em diversos outros trabalhos das autoras, por isso não será feito novamente aqui. De qualquer modo, o leitor poderá perceber o desenvolvimento da metodologia segundo essas etapas nas seções a seguir, onde será relatada e analisada uma experiência desenvolvida no âmbito da Educação de Jovens e Adultos (EJA) e uma envolvendo a Formação de Professores.

O TRABALHO ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NA EJA

Os dados que serão apresentados e analisados nesta seção são parte da dissertação de mestrado de Ferreira (2011), que foi orientada pela autora deste artigo. A ideia central da investigação desenvolvida foi promover o Ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas através de um conjunto de problemas geradores elaborados a partir de situações vividas pelos alunos de Ferreira, alunos de EJA-Educação de Jovens e Adultos. Essa proposta veio dos próprios alunos que, em uma conversa muito franca com o professor-pesquisador, queixaram-se das dificuldades de aprender Matemática e manifestaram seu descontentamento por não conseguirem empregar a Matemática que aprendiam na escola para resolver seus problemas do cotidiano.

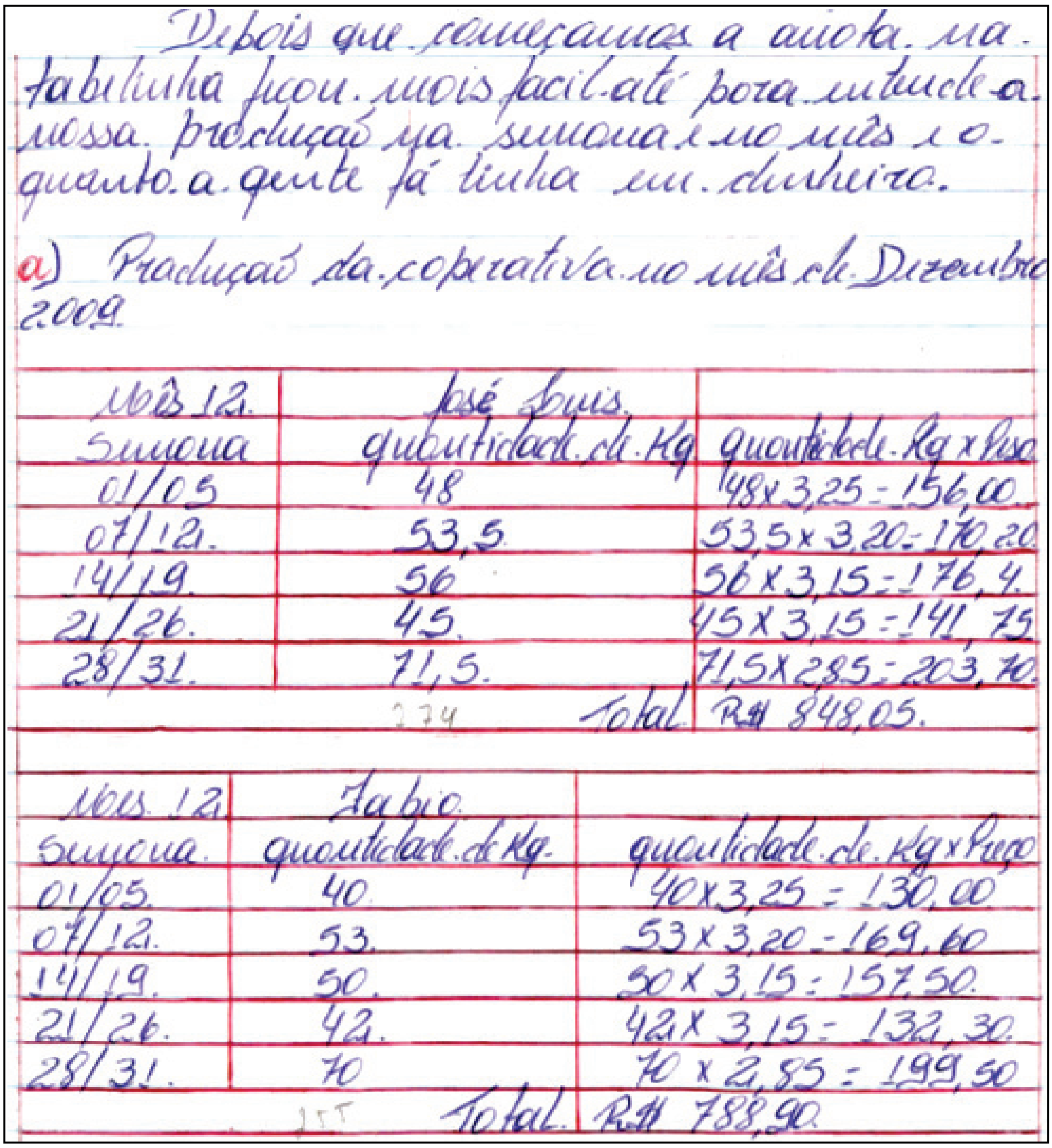
Ferreira entendeu e foi sensível aos sentimentos dos alunos, e assumiu o desafio de ajudá-los. Propôs que cada aluno redigisse um texto descrevendo alguma situação problemática de seu dia a dia, e que considerasse possível de ser resolvida por meio da Matemática. Os trabalhos entregues pelos alunos seriam analisados pelo professor no sentido de tentar identificar como a Matemática poderia ser aplicada a cada situação. O professor tinha o compromisso de abordar o tema "funções" com aqueles alunos, então decidiu partir desses problemas para trabalhar esse conteúdo.

Um aluno, motivado pelo interesse de controlar as contas e melhorar os ganhos em uma cooperativa de catadores de latinhas que ele havia constituído com alguns colegas, apresentou o seguinte texto que, por limitações de espaço, será apresentado parcialmente a seguir[5]:

Figura 1 - Primeira versão do problema da cooperativa - Parte 1

roupas e tenis. Como eu sou o chefe da casa,
tenho que trabalhar para manter a família
e bota comida na mesa, paga as contas
de agua e luz. Trabalho catando latinha
de Alumínio e revendendo para empresas que
compram alumínio em nossa região. Eu e
mais quatro companheiros catadores de lati-
nha, montamos uma pequena coperativa e
juntamos todos as latinhas para vender por que a
quantidade é maior e conseguimos um preço
mais alto e nosso lucro e maior. por que antes
a gente vendia separada e o preço era bem menor.
ai decidimos monta a coperativa pra ganhar
mais um pouquinho. Para conseguir juntar um
quilo de latinha preciso cata 74 latinha e cada
quilo a gente vende por R$ 3,20 na media um
mês pelo outro, por que já vendemos a R$ 3,50
a R$ 2,80 mais na media anual conseguimos
vende a R$ 3,20 por que a quantidade que junta-
-mos e boa. Depois de uma aula de matema-
tica que o professor deu sobre função onde ele
ensinou a montar tabelinha e função
sugeri aos meus companheiros da coperativa
uma tabela para gente marca a quantidade
de latinha de cada um e faze os acertos
depois da venda porque antes a gente marcava
em um caderno e quando a gente ia acerta
não entendia direito as nossa conta.

5 A apresentação de outros problemas trabalhados na pesquisa de Ferreira (2011) pode ser vista na própria dissertação do autor, um deles publicado também em Ferreira e Allevato (2013).



Depois que começamos a anota na tabelinha ficou mais facil até para entende a nossa produçaõ na semana e no mês e o quanto a gente já tinha em dinheiro.

a) Produçaõ da coperativa no mês de Dezembro 2009.

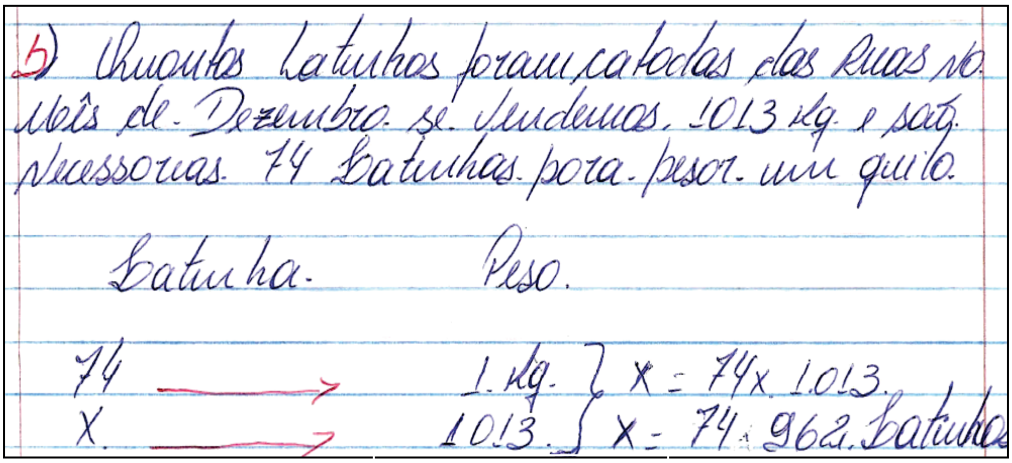
Mês 12.	José Luis.	
Semana	quantidade de Kg	quantidade Kg x Peso
01/05	48	48x3,25 = 156,00
07/12.	53,5	53,5x3,20 = 170,20
14/19	56	56x3,15 = 176,4.
21/26.	45.	45x3,15 = 141,75
28/31.	71,5.	71,5x285 = 203,70
	274 Total	R$ 848,05.

Mês 12	Fabio	
Semana.	quantidade de Kg.	quantidade de Kg x Preço
01/05.	40	40x3,25 = 130,00
07/12.	53.	53x3,20 = 169,60
14/19.	50.	50x3,15 = 157,50.
21/26.	42.	42x3,15 = 132,30
28/31.	70	70x2,85 = 199,50
	255 Total.	R$ 788,90

Fonte: Ferreira (2011).

Além do texto e dessas duas tabelas, o aluno apresentou outras duas tabelas referentes aos dados de mais dois colegas participantes da cooperativa e, então, registrou os seguintes cálculos:

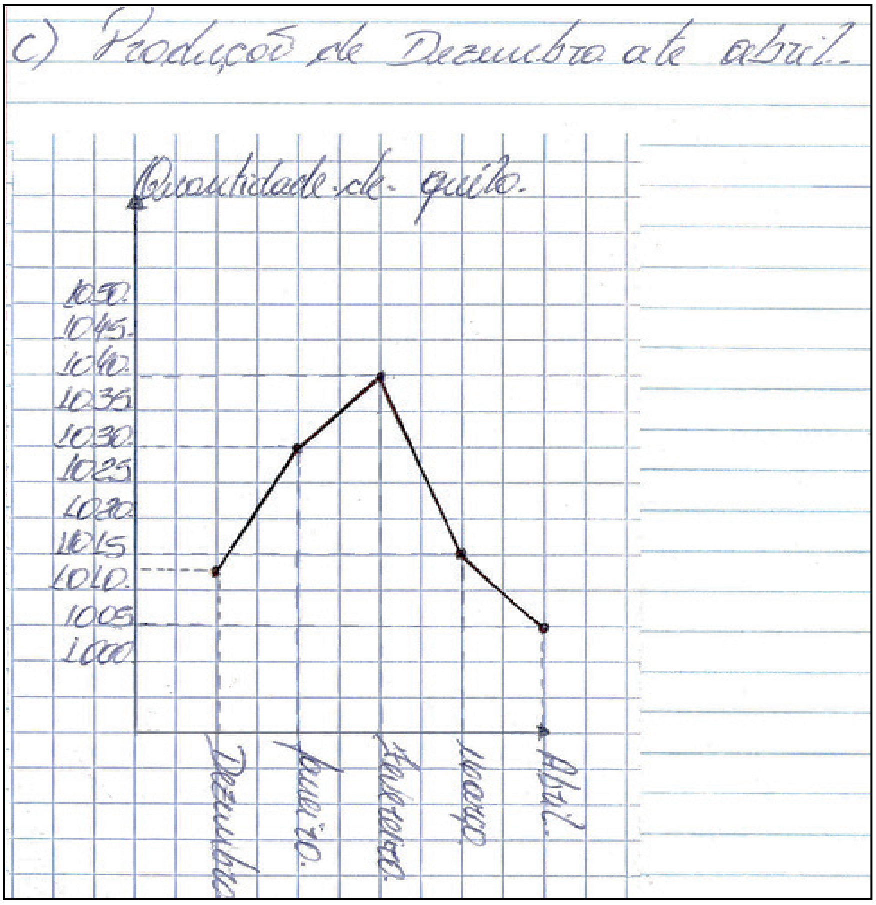
Figura 2 - Primeira versão do problema da cooperativa - Parte 2



Fonte: Ferreira (2011).

E também esboçou um gráfico:

Figura 3 - Primeira versão do problema da cooperativa - Parte 3



Fonte: Ferreira (2011).

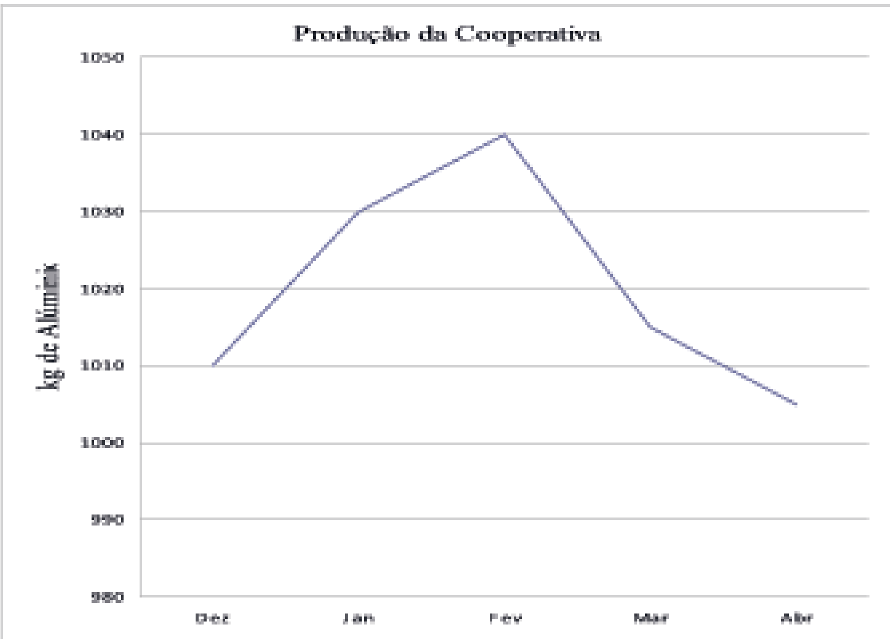
Nessa versão do trabalho, pode-se perceber a riqueza de detalhes que o aluno fornece sobre o valor do quilo das latinhas de alumínio no atacado e varejo, sobre a quantidade de latinhas necessárias para pesar um quilo e esboça o gráfico, em que se pode analisar a quantidade de quilos de latinhas coletadas ao longo dos meses. O problema possibilitou trabalhar com o ensino de funções através da resolução de problemas com tranquilidade e satisfação.

Ferreira reuniu-se com o aluno, com o intuito de esclarecer aspectos referentes ao problema apresentado por ele. Aos poucos foi apresentando ideias, debatendo, conversando e discutindo o que realmente ele queria saber em seu problema, e quais eram as suas dúvidas. As ideias foram aparecendo e o problema foi reescrito:

Figura 4 - Segunda versão do problema da cooperativa.

Luiz, Fabio, Ayrton e Miguel trabalham catando latinhas de alumínio em condomínios, clubes, residências e estádios de futebol e etc. Juntos montaram uma pequena cooperativa para a comercialização das latinhas de alumínio, coletadas por eles ao longo de cada semana. Para conseguir um quilo de latinha, são necessárias 74 unidades, recebendo, em média, R$ 3,20 por quilo vendido. Se no mês de dezembro, Luiz comercializou 274 kg, Fabio 225 kg, Ayrton 256 kg e Miguel 228 kg, calcule:

a) Qual o faturamento da cooperativa no mês de dezembro?
b) Quantas latinhas foram retiradas das ruas durante o mês de dezembro?
c) Escreva a fórmula que relaciona o faturamento **f** em reais de cada trabalhador à quantidade de quilos **kg** comercializada por ele, durante o mês, em função do preço **p** estabelecido para a venda.
d) Sendo a f(x)=3,20x uma função polinomial do 1º grau **f (x) = a x + b**, determine os valores de **a e b**.
e) O gráfico abaixo apresenta a produção dos catadores de latinhas da cooperativa, de Dezembro de 2009 a Abril de 2010.



De acordo com as informações apresentadas no gráfico, responda:

I. O que aconteceu com a quantidade de quilos de alumínio de Dezembro a Abril?
II. Há algum intervalo no gráfico onde a produção é constante? Se sim, qual?

Fonte: Ferreira (2011).

Ao finalizar essa versão, o aluno ficou muito satisfeito:

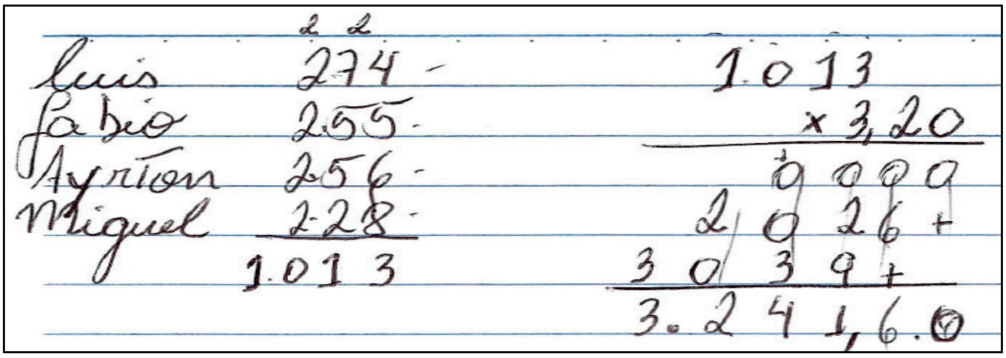
- *Och! Mas está igualzinho ao que nós acabamos de fazer agora?! Tem umas palavras mais bonitas, mas está igual, por que têm as mesmas informações, pessoas, e quer saber a mesma coisa, professor.*

Os alunos se alvoroçaram em sala de aula ao ver o problema criado pelo colega. Alguns manifestaram que também gostariam de refazer seus trabalhos; não queriam apresentar um problema escrito "de qualquer jeito", também queriam aprimorar seu problema. Desse modo, esse trabalho serviu de estímulo aos demais alunos que, também, quiseram vivenciar esse processo.

Algumas cópias do problema reescrito foram distribuídas entre os alunos, que formaram duplas para resolver o problema, utilizando seus conhecimentos prévios e suas estratégias próprias. Um fato relevante foi que os colegas solicitaram que autor do problema não fizesse parte de nenhum grupo, uma vez que ele já tinha conhecimento da resolução do problema, e os alunos queriam resolvê-lo por eles mesmos e tentar chegar às respostas corretas; e assim foi feito.

Na primeira questão (qual o faturamento da cooperativa), apesar de algumas perguntas sobre o que fazer, e considerando que o professor-pesquisador não forneceu informações a respeito do problema, todos se saíram bem. Foi salientado que não existia uma única maneira de resolver o problema corretamente. Uma das resoluções apresentadas foi:

Figura 5 - Resolução do item (a)



Fonte - Ferreira (2011).

Nessa resolução, os alunos somaram as quantidades de quilos coletados por cada um dos sócios e, em seguida, multiplicaram pelo preço pago por cada quilo de latinha de alumínio, ou seja, fizeram uso de operações básicas.

Na questão (b) (Quantas latinhas foram retiradas das ruas durante o mês de dezembro?) ocorreu uma diversidade de resoluções apresentadas; alguns alunos fizeram uso da regra de três simples e outros usaram tabelas do tipo:

Figuta 6 - Resolução do item (b).

Nome	Quantidade de Kg	Kg x 74	Total de unidades
Luis	274	274 x 74	20.276
Fabio	255	255 x 74	18.870
Ayrton	256	256 x 74	18.944
Miguel	228	228 x 74	16.872
		TOTAL	74.962

Fonte: Ferreira (2011).

Ao serem questionados sobre a razão para a construção da tabela, os alunos responderam que com ela ficaria mais fácil realizar a verificação e a interpretação dos dados, e que ela seria útil nas questões seguintes.

O professor-pesquisador perguntou ao grupo quais relações eles percebiam entre os números fornecidos no problema. Um aluno afirmou que o número 74 estava sempre presente, em "todas as multiplicações", por ser a quantidade de latinhas necessárias para pesar um quilo. Outros alunos concordaram, concluindo que o número 74 era uma constante naquele caso. Um outro aluno disse que constante é alguma coisa que aparece várias vezes em determinadas situações e que, naquele caso, era o 74, sendo ele independente em relação à quantidade de quilos coletados, mas determinante no resultado final da operação.

O professor também questionou sobre o tipo de número que poderia representar a quantidade de quilos de latinhas. Os alunos logo responderam que poderia ser igual a zero, porém jamais poderia ser menor que zero, uma vez que a quantidade de quilos não pode ser negativa. Esses aspectos estão ligados ao campo de definição, ao domínio da função. Foi possível perceber que os alunos possuíam um conhecimento "parcial" sobre o conteúdo de funções, mas desconheciam os aspectos matemáticos formais, a representação matemática e a expressão das leis de formação das funções.

Por estarem no início das atividades, o professor julgou apropriado aguardar as resoluções inicialmente apresentadas para os outros itens do problema e, posteriormente, rediscutir a situação introduzindo essa simbologia matemática.

Após várias reflexões e participações dos alunos, a turma conduziu as discussões ao item (c) do problema (Escreva a fórmula que relaciona o faturamento f em reais de cada trabalhador à quantidade de quilos kg comercializada por ele, durante o mês, em função do preço p estabelecido para a venda). Nessa questão, os alunos apresentaram maior dificuldade em estabelecer as relações e, mesmo após várias tentativas e orientações de realizarem uma releitura, destacando cada informação, alguns alunos não conseguiram desenvolver a fórmula solicitada. Alguns apresentaram a resolução em linguagem natural: "o faturamento do mês é igual ao total de quilos multiplicado por R$3,20; ou o faturamento é igual a R$ 3,20 vezes a quantidade de quilos vendidos no mês".

O professor solicitou que fossem à lousa e registrassem suas ideias para compartilhar com os demais colegas o que haviam feito. Uma dupla apresentou a função da seguinte maneira:

f(x) = t .3,20

sendo f o faturamento; 3,20 o valor pago por quilos; e t o total de quilos coletados.

Questionados sobre o significado do x, não souberam responder de imediato. Entrando na discussão, o segundo grupo sugeriu a seguinte expressão:

f(x) = 3,20 x x

Também esse grupo foi questionado, agora sobre o porquê de "dois x" após o 3,20. Eles responderam que era "3,20 vezes o x". Os demais alunos foram provocados e convidados a opinar, e apontaram que não estava correto, pois no caso de x vezes x, o produto seria x^2. Após essas reflexões, todos chegaram ao consenso de que a forma "mais adequada ou a melhor forma" era: "Se y = f(x) e f(x) = 3,20. x, sendo y o faturamento mensal e x a quantidade de quilos vendidos, então, y = 3,20. x".

Tendo realizado essa etapa, o professor pesquisador aproveitou a oportunidade e propôs a seguinte questão, para ajudar na compreensão e análise do fenômeno e da função estudada:

Considerando a função do 1° grau **y = 3,20.x,** complete as tabelas:

a)

x	y = 3,20 x
200	
250	
300	
500	

b)

x	y = 3,20 x
	320
	480
	1120
	1280

A tabela (**a**) os alunos preencheram sem maiores dificuldades. Mas na tabela (**b**) não conseguiam perceber que os valores apresentados já representavam o produto da quantidade de quilos pelo valor unitário, por quilo. Manifestaram-se as dificuldades dos alunos em realizar a operação inversa da operação realizada na tabela (**a**). Uns queriam substituir novamente os valores de **x** e encontrar o valor de **y**, enquanto outros "alertavam" o professor de que "alguma coisa estava errada, pois foram colocados os valores na segunda coluna". Com alguns questionamentos por parte do professor, os alunos perceberam o que devia ser feito e resolveram em seus cadernos, bem como apresentaram suas resoluções na lousa, compartilhando com os demais alunos e fornecendo-lhes as explicações de acordo com suas compreensões.

Tendo realizado mais essa etapa, o professor seguiu para a questão (d):

d) Sendo a f(x)=3,20x uma função polinomial do 1º grau **f (x) = a x + b**, determine os valores de **a** e **b**.

A maior dificuldade se deu em relação ao valor de b. Para alguns alunos, o b representava o próximo mês; para outros representava a quantidade de quilos de latinha do próximo mês. Ferreira solicitou que os alunos pensassem na situação descrita pela função, e, com calma, discutissem entre eles. Após algumas indagações, acabaram por perceber que o b era 0. Como ainda existiam dúvidas, foi feito o registro na lousa para uma melhor visualização e compreensão. Refletindo sobre a função do 1º grau em geral, todos entenderam que se poderia chegar aos valores $b = 0$ ou $b \neq 0$, na função afim.

Diante da constatação das dificuldades apresentadas, Ferreira forneceu, também, algumas explicações, seguidas de exemplos, de outras funções denominadas função do 1° grau (ou função afim) e, particularmente, de função linear.

Os trabalhos foram encaminhados, então, para questão(e):

I. O que aconteceu com a quantidade de quilos de alumínio de dezembro a abril?

Nesse item, os alunos não tiveram dificuldades. A intenção era que percebessem o crescimento da função até fevereiro, e o decrescimento em seguida. Entretanto, em sua maioria, os alunos preferiram destacar o comportamento do gráfico mês a mês.

II. Há algum intervalo no gráfico onde a produção é constante? Se sim, qual?

Alguns alunos tiveram dificuldades na interpretação do termo "produção constante", respondendo de forma bastante confusa e imprecisa: "Quando a reta está crescendo em relação a x e y é uma constante crescente; e se está indo para baixo, também em relação a x e y, ela é uma constante decrescente." Agora, "quando a reta está subindo em relação ao x, o y é constante; o mesmo se faz quando está descendo". Diante disso, Ferreira solicitou que um aluno pegasse um dicionário e procurasse pelo termo "constante". Ele encontrou os seguintes sinônimos: que não muda, inalterável, invariável, fixo, permanente, contínuo. Feita a pesquisa e compartilhada com os demais alunos, solicitou que observassem o comportamento do gráfico. Uma vez realizada a releitura do gráfico, os alunos chegaram a respostas mais variadas, mas corretas.

III. Qual o ponto máximo e mínimo apresentado?

Esta questão foi fácil para os alunos, uma vez que no estudo da questão anterior, alguns ressaltaram o valor máximo e o valor mínimo nas vendas de latinhas da cooperativa.

Foi notória a evolução dos alunos ao longo da resolução de todos os itens do problema, no que diz respeito tanto à representação simbólica matemática, como às compreensões do significado da Matemática na situação estudada.

Nesses protocolos, presenciamos o registro da expressão da função que representa o faturamento atingido com a venda das latinhas, "mesclando" notação simbólica com a escrita corrente, e mostrando um movimento – realizado por esses alunos – de transição gradual e espontânea, de padrões mais familiares (linguagem corrente) para os menos familiares (linguagem simbólica matemática).

A interpretação do gráfico, que permite construir compreensões a respeito da variação na quantidade de quilos de latinha coletados, foi subsidiada pelos resultados obtidos algebricamente.

O TRABALHO ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES

Nesta seção, o objetivo é apresentar uma pesquisa que foi desenvolvida no âmbito da formação inicial de professores, fundamentada na Metodologia de Ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

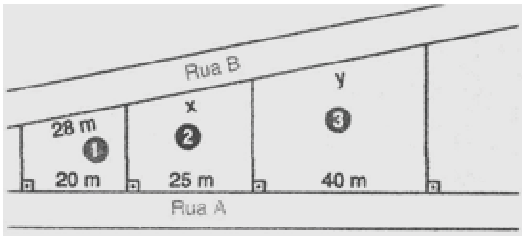
A pesquisa de Costa (2012) teve como objetivo geral investigar como (futuros) professores de Matemática, em formação inicial, exploram o conceito de proporcionalidade através da Resolução de Problemas. Foi realizada com estudantes do curso de Licenciatura em Matemática, de uma universidade pública no Estado do Maranhão. Os dados foram construídos por questionários e, especialmente, em encontros semanais em que foram realizadas leituras e discussões sobre resolução de problemas e sobre o ensino de proporcionalidade, além de atividades práticas de resolução de problemas envolvendo esse conteúdo.

No encontro em que os dados a seguir foram construídos, o objetivo específico era verificar como (futuros) professores em formação inicial aplicam o conceito de proporcionalidade (propriedade fundamental das proporções) para calcular o valor de termos desconhecidos em problemas que envolvem o Teorema de Tales e, com isso, construir novos conhecimentos matemáticos.

Um dos problemas propostos foi o seguinte:

Figura 7 - Problema proposto

A planta abaixo mostra as medidas de três lotes que têm frente para a rua A e para a rua B. As divisas laterais são perpendiculares à rua A. Quais são as medidas de x e y indicadas na figura?



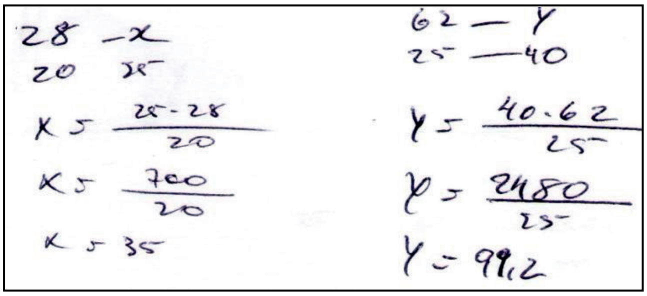
Fonte: Andrini; Vasconcellos (2006).

Para que os (futuros) professores pudessem ter uma melhor compreensão da metodologia, foi sugerido que utilizassem as etapas sugeridas por Allevato e Onuchic (2009). Primeiramente, foi preparado o problema de acordo com o conteúdo a ser explorado (etapa 1), ou seja, a proporcionalidade e o Teorema de Tales. Os alunos fizeram uma leitura individual (etapa 2), tentando compreender o enunciado, levantar dúvidas e se preparar para a resolução. Então foi feita uma leitura coletiva (etapa 3), para esclarecer eventuais dúvidas. Em seguida, cada participante tentou resolver o problema individualmente, embora essa etapa geralmente seja realizada em grupo (etapa 4). Optou-se por esse método para que se pudesse observar melhor (etapa 5) as atitudes de cada aluno. Após terem solucionado o problema como sabiam e puderam, cada aluno fez o registro na lousa das resoluções e soluções encontradas (etapa 6) e, em seguida, foi realizada uma plenária (etapa 7), buscando um consenso em relação às soluções (etapa 8). Finalmente, o pesquisador fez a formalização do conteúdo abordado no problema (etapa 9), registrando na lousa uma apresentação organizada e estruturada em linguagem matemática do conceito de proporcionalidade, e abordando o método que os participantes utilizaram para solucionar o problema: a regra de três.

Foi possível observar que o enunciado ficou claro e que os (futuros) professores tiveram facilidade em resolver o problema e, durante as discussões na plenária, que os participantes utilizaram a regra de três para solucionar o problema. Nenhum dos participantes fez menção ao Teorema de Tales (retas paralelas cortadas por transversais formam segmentos correspondentes proporcionais), embora ele possua diversas aplicações no cotidiano e em outras áreas, que evidenciam sua importância. Com base na planta apresentada no problema, solicitamos aos alunos que calculassem as medidas dos lados x e y. Podemos perceber que os segmentos paralelos que separam os lotes 1, 2 e 3 são cortados pelas ruas transversais A e B. Portanto, a planta "satisfaz" a relação de Tales e, sendo assim, poderia ter sido utilizada no problema.

Embora alguns participantes tivessem conseguido perceber a proporcionalidade existente no problema, não relacionaram esse fato ao chamado Teorema de Tales. Alguns (futuros) professores mostraram, entretanto, que conhecem o resultado, mas não com o nome de Teorema de Tales. Outros, ainda, não tinham clareza sobre o próprio conceito de proporcionalidade, conforme se observa nas resoluções apresentadas[6]:

Figura 8 - Resolução apresentada por ADR3

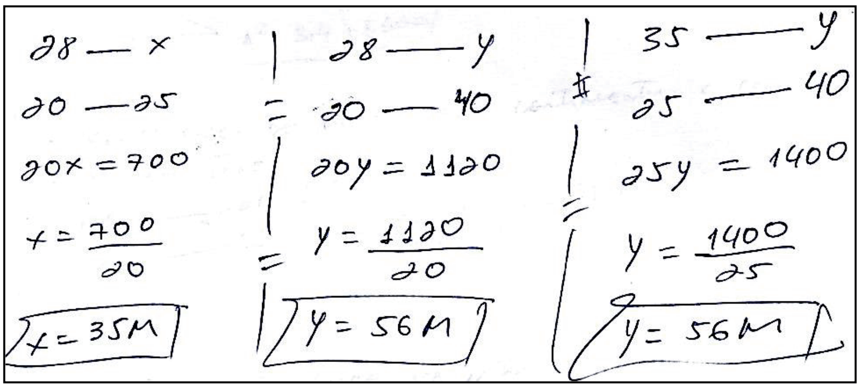


Fonte: Costa (2012).

O aluno ADR3 considerou que, de fato, esse foi um problema para ele, pois teve dificuldades para encontrar a solução. Ele não considerou a definição de proporcionalidade, ou seja, não registrou a igualdade das duas razões, conforme afirmou em conversa com o pesquisador para esclarecimento de sua resolução. Foi "direto" para a regra de três e a solução encontrada para o termo desconhecido (y) não foi correta.

Mais uma resolução apresentada foi:

Figura 9 - Resolução apresentada por ADR5



Fonte: Costa (2012).

6 Para preservar a identidade desses (futuros) professores, são utilizados pseudônimos: ADR1, ADR2, ADR3..., para identificá-los.

Após a resolução, ADR5 afirmou que o problema foi de fácil interpretação, e que utilizou o conceito de proporcionalidade e a regra de três para identificar e resolver o problema. Mas a resolução apresentada por este aluno mostra que ele também não registrou o conceito de proporcionalidade. Certamente o conceito como igualdade entre duas razões não estava presente em suas mentes e os (futuros) professores não o escreveram; esse aluno também foi direto para regra de três para encontrar os valores desconhecidos. Sabe-se que o conceito de proporcionalidade é considerado, por alguns estudantes como “sinônimo” de regra de três, sinal de confusão entre o conceito e o procedimento de resolução. Também, o protocolo da figura 9 mostra que ADR5 procurou confirmar a solução encontrada para “y” de duas maneiras, o que leva a crer que ele não tinha certeza e buscou uma confirmação quanto ao valor encontrado de imediato.

A seguir é apresentada a resolução dos alunos ADR4 e ADR1:

Figura 10 - Resolução apresentada por ADR4

$$\frac{28}{20} \times \frac{x}{25}$$
$$20x = 28 \times 25$$
$$20x = 700$$
$$x = \frac{700}{20}$$
$$x = 35$$

$$\frac{35}{25} \quad \frac{y}{40}$$
$$25y = 1400$$
$$y = \frac{1400}{25}$$
$$y = 64$$

Fonte: Costa (2012).

Figura 11 - Resolução apresentada por ADR1

$$z \Rightarrow 1 \Rightarrow z = 28M$$
$$x \Rightarrow 2 \Rightarrow x = 35m$$
$$y \Rightarrow 3 \Rightarrow y = 56m$$
$$z + x + y =$$
$$\frac{z}{20} = \frac{x}{25}$$
$$\frac{28}{20} = \frac{x}{25}$$
$$20x = 700$$
$$x = \frac{700}{20}$$
$$\boxed{x = 35M}$$

$$\frac{x}{25} = \frac{y}{40}$$
$$\frac{35}{25} = \frac{y}{40}$$
$$25y = 1400$$
$$y = \frac{1400}{25}$$
$$\boxed{y = 56M}$$

Fonte: Costa (2012).

ADR4 afirmou que para ele não foi um problema, pois foi muito fácil encontrar a solução. No entanto, ele não encontrou a solução correta para o valor do termo desconhecido denominado de “y”, devido a um erro de cálculo. Vale ressaltar que em sua resolução fez uma indicação de produto cruzado, que é o procedimento para resolver uma regra de três. No entanto, ele não utilizou o sinal de igualdade nem na primeira, nem na segunda coluna, sugerindo que não pensou na igualdade entre duas razões, ou seja, no conceito de proporcionalidade, apesar de ter comentando que fez esse registro.

Observa-se, portanto, que os licenciandos têm a regra de três como procedimento padrão para resolução de problemas de proporcionalidade, provavelmente porque no ensino básico esse conceito lhes seja apresentado realmente priorizando a regra de três como meio para solucionar esse tipo de problema.

Em particular, com relação ao estudo de proporcionalidade, de fato as soluções de muitos problemas envolvendo medidas, geometria, álgebra, probabilidade e estatística, entre outros, exigem o conhecimento e a familiaridade com números racionais e proporções. Porém, o que percebemos nas situações escolares é que, não raro, os alunos conduzem suas estratégias de resolução baseadas principalmente nos dados numéricos que o problema apresenta, não levando em consideração os dados relacionais necessários para a compreensão da situação e resolução correta.

Ao final da atividade, durante a plenária, esses aspectos foram abordados: foi (re)construído o conceito de proporcionalidade, discutindo quando duas grandezas são de fato proporcionais; as estratégias ou formas de resolução (regra de três, divisões sucessivas, montagem de tabelas) e a relação existente entre a proporcionalidade e o Teorema de Tales.

Após trabalhar alguns encontros com os (futuros) professores vivenciando e discutindo a Metodologia de Ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, foram registradas algumas manifestações dos (futuros) professores:

ADR3 disse que no início teve dificuldade em entender a metodologia, pois teve sua educação baseada no ensino tradicional. O professor “explicava e depois dava uma lista de exercícios”, ou seja, o inverso do que estavam vivenciando nesta experiência. Acredita que é possível aplicá-la em sala de aula, pois se trata de uma metodologia, que valoriza o conhecimento acumulado pelos alunos e os desafia a solucionar problemas sem a pressão de terem, de imediato, que resolver corretamente.

ADR5 relatou que, apesar de no início das discussões ter achado que seria difícil, pôde perceber com a prática da resolução dos problemas que a metodologia não é tão difícil de ser desenvolvida. Achou que até facilita para o professor desenvolver suas aulas, pois incentiva o aluno a resolver e solucionar o problema.

Para ADR6, com essa metodologia o professor deixa de lado o ensino tradicional, enraizado no ensino de Matemática, em que o professor ensina e o aluno repete o que o professor diz e, assim, “aprende”. Com a Resolução de Problemas, os alunos se sentem motivados e, consequentemente, mais interessados pela aprendizagem.

Essas manifestações dos (futuros) professores fazem uma síntese dos aspectos essenciais da Metodologia de Ensino-aprendizagem-avaliação através da Resolução de Problemas; ademais, eles acreditam que é possível desenvolver os conteúdos matemáticos utilizando-a, inclusive desde os anos iniciais. Portanto, os licenciandos mudaram sua forma de pensar, principalmente após vivenciarem a metodologia, percebendo a possibilidade de utilizá-la nas aulas de Matemática.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

As discussões aqui desenvolvidas tiveram a intenção de promover reflexões acerca de como a Metodologia de Ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas pode favorecer a construção de conhecimento matemático pelos alunos.

Os dados, apresentados e analisados brevemente, construídos no contexto da Educação de Jovens e Adultos (EJA), referem-se a uma parte da pesquisa de Ferreira (2011), que implementou essa metodologia com o intuito de abordar o conteúdo de funções. Os estudantes não tinham sido introduzidos a esse conteúdo, antes da experiência. A partir do trabalho desenvolvido com o Problema da Cooperativa, o professor-pesquisador abordou vários conteúdos ligados ao estudo de funções: conceito de função; variáveis dependentes, independentes e coeficientes de funções; conceito e significado dos elementos constituintes das funções polinomiais do primeiro grau (coeficiente angular e linear); monotonicidade, representação e interpretação de gráficos dessas funções, entre outros elementos. Assim, os alunos construíram conhecimentos quantitativa e qualitativamente bastante relevantes e significativos. Especialmente, o conhecimento construído fez sentido àqueles alunos, tendo sido trabalhado a partir e através de um problema gerador (o Problema da Cooperativa) que, neste caso, foi elaborado pelos próprios alunos, motivados por inquietações trazidas do seu cotidiano, muito embora nem sempre tenha que ser assim; ou seja, os problemas podem ser trazidos à aula pelo professor e, ainda assim, possibilitar um trabalho interessante.

Com relação à pesquisa desenvolvida por Costa (2012), os licenciandos perceberam que a Metodologia de Ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas contradiz o que é usualmente proposto em sala de aula, em que primeiramente o professor explica o conteúdo, para que os alunos possam, em seguida, reproduzi-lo, não considerando que os estudantes são capazes de pensar, interpretar e chegar às suas próprias conclusões. Além disso, eles perceberam maneiras de saírem dessa condição de “aprendizado”, libertando-se da forma “mecânica” de ensinar e aprender, buscando novas maneiras de construir conhecimento e, consequentemente, o aprendizado, uma vez que estarão ou já estão atuando como professores. Entenderam que as atividades são centradas nos problemas, sendo estes o ponto de partida para o ensino, a aprendizagem e a avaliação da aprendizagem de um determinado conteúdo. A comunicação, a reflexão e o diálogo com e entre os (futuros) professores foram essenciais, tanto para uma melhor compreensão sobre proporcionalidade como da Metodologia através da Resolução de Problemas, colocando-a no leque de opções para suas (futuras) práticas docentes.

Outras experiências e pesquisas envolvendo a Metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas têm sido realizadas em vários níveis de ensino e envolvendo os mais diversos conteúdos. Entre as mais recentes, apontamos as de Abdelmalack (2011), Rossi (2012) e Bastos (2013), no Ensino Superior; as de Terto (2008), Merichelli (2010) e Santos (2011) no Ensino Médio; a de Prado (2010), no Ensino Fundamental.

Permitam essas pesquisas que os professores sintam que há possibilidades reais de implementar essa metodologia de ensino em suas aulas de Matemática, oferecendo aos seus alunos a oportunidade de vivenciar experiências em que possam resolver “verdadeiros” problemas e aprender Matemática enquanto resolvem problemas.

REFERÊNCIAS

ABDELMALACK, A. **O ensino-aprendizagem-avaliação da derivada para o curso de Engenharia através da resolução de problemas**. 2011. 172f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). Universidade Cruzeiro do Sul. São Paulo, 2011.

ALLEVATO, N. S. G. Resolução de Problemas. In: _____. **Associando o Computador à Resolução de Problemas Fechados**: Análise de uma Experiência. 2005. 370 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2005.

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensinando Matemática na Sala de Aula através da Resolução de Problemas. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, n. 55, p. 1-19. 2009. Disponível em: <http://www.ufrrj.br/SEER/index.php/gepem/article/view/54/87>. Acesso em: 11 jan 2014.

ANDRINI, A; VASCONCELLOS, M. J. **Novo Praticando Matemática**, v. 4, 1 ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2006.

BASTOS, A. S. A. M. **Análise de Erros Matemáticos na Resolução de Problemas aplicados à Física Elétrica**. 2013. 199 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2013.

CAI, J; LESTER, F. Por que o Ensino com Resolução de Problemas é Importante para a Aprendizagem do Aluno? In: **Boletim GEPEM**. Trad. BASTOS, A. S. A. M. e ALLEVATO, N. S. G., Rio de Janeiro, n. 60, p. 241-254, 2012. Disponível em: <http://www.ufrrj.br/SEER/index.php?journal=gepem&page=article&op=view&path%5B%5D=837>. Acesso em: 11 jan. 2014.

CONTRERAS, L. C.; CARRILLO, J. Diversas concepciones sobre resolución de problemas en el aula. **Educación Matemática**, v.10, n.1, p.26-37. 1998.

COSTA, M. S. **Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Proporcionalidade através da Resolução de Problemas**: uma experiência na formação inicial de (futuros) professores de Matemática. 2012. 286 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2012.

DELORS, J. **Educação**: um tesouro a descobrir. Relatório para a UNESCO da Comissão Internacional sobre Educação para o século XXI. 9. ed. São Paulo: Cortez; Brasília, DF: MEC; UNESCO, 2004. 288 p.

FERREIRA, R. B. **O ensino de funções através da resolução de problemas na Educação de Jovens e Adultos**. 2011. 143f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2011.

FERREIRA, R. B.; ALLEVATO, N. S. G. Leitura e escrita na aprendizagem matemática através da Resolução de Problemas. In: NACARATO, A. M.; LOPES, C. E. (Org.). **Indagações, reflexões e práticas em leituras e escritas na Educação Matemática.** Campinas: Mercado de Letras, 2013, p. 107-126.

HATIFIELD, L. L. Heuristical emphasis in the instrution of mathematical problem solving: Rationales and research. In: HATIFIELD, L. L.; BRADBARD, D. A. (Org.) **Mathematical Problem Solving**: papers from a research workshop. Colombus: ERIC, 1978.

KRULIK, S.; REYS, R. E. **Problem Solving in School Mathematics.** Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1980.

KRULIK, S.; RUDNICK, J. A. **Problem-Driven Math**: Applying the Mathematics Beyond Solutions. Chicago, IL: Wright Group/McGrawHill, 2005.

LESTER JR, F. K. (ed.). **Teaching Mathematics through Problem Solving**: Prekindergarten-Grade 6. Reston/VA: NCTM, 2003.

MERICHELLI, M. A. J. **O ensino de logaritmos através da resolução de problemas**. 2010. 162. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Cruzeiro do Sul. São Paulo, 2010.

NCTM. **An Agenda for Action**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1980.

______. **Principles and Standards for School Mathematics.** Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2000.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. **Pesquisa em Educação Matemática**. São Paulo: Editora UNESP, 1999. cap.12, p.199-220.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema**. Boletim de Educação Matemática. UNESP. Rio Claro, v. 25, p. 73-98, 2011.

_______. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Org.). **Educação Matemática** - pesquisa em movimento. 4. ed. São Paulo: Cortez, 2012. p. 232-252.

POLYA, G. **How to Solve It**. Princeton: Princeton University Press, 1944.

POZO, J. I. **A Solução de Problemas** - Aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: Editora Artmed, 1998. 177p.

PRADO, M. A. **O ensino-aprendizagem-avaliação de geometria através da resolução de problemas**. 2010. 185 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Cruzeiro do Sul. São Paulo, 2010.

ROSSI, M. I. **Aprendizagem das aplicações das integrais indefinidas em equações diferenciais através da resolução de problemas**. 2012, 142 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Cruzeiro do Sul. São Paulo, 2012.

SANTOS, R. H. **Uma abordagem do ensino da análise combinatória sob a ótica da resolução de problemas**. 2011. 231f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Cruzeiro do Sul. São Paulo, 2011.

SHIMADA, S. The Significance of an Open-Ended Approach. In: BECKER, J.P.; SHIMADA, S. (Ed.). **The Open-Ended Approach**: A New Proposal for Teaching Mathematics. Reston: NCTM, 1997. p.1-9.

SCHOEN, H. L. (ed.). **Teaching Mathematics through Problem Solving**: grades 6-12. Reston/VA: NCTM, 2003.

SCHROEDER, T. L.; LESTER JR, F. K. Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving. In: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (Ed.). **New Directions for Elementary School Mathematics**. Reston: NCTM, 1989. p.31-42.

TERTO, L. L. **Funções quadráticas nos livros didáticos sob ótica da resolução de problemas**. 2008. 243f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo. 2008.

VAN DE WALLE, J. A. **Elementary and Middle School Mathematics**. New York: Longman, ed.4, 2001.

_______. Ensinando pela Resolução de Problemas. In: ______. **Matemática no ensino fundamental**: formação de professores e aplicação em sala de aula. Trad. Paulo Henrique Colonese. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009. p. 57-81.

RECEBIDO: 01.03.2014.

CONCLUÍDO: 01.04.2014.