VIDYA, v. 39, n. 1, p. 291-309, jan./jun., 2019 - Santa Maria, 2019. **ISSN** 2176-4603

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS COMO ALTERNATIVA DE COMUNICAÇÃO MATEMÁTICA EM SALA DE AULA

THE RESOLUTION OF GEOMETRIC PROBLEMS AS AN ALTERNATIVE OF MATHEMATICAL COMMUNICATION IN A CLASSROOM

KÁTIA MARIA MEDEIROS*
GILMARA GOMES MEIRA**

RESUMO

O presente artigo apresenta um recorte de aspectos discutidos em nossa pesquisa de dissertação de mestrado. Neste sentido, o objetivo foi analisar como alunos de uma turma de 3º Ano do Ensino Médio de uma escola pública estadual na Paraíba se comunicavam ao desenvolverem atividades com resolução de problemas geométricos fazendo uso do Tangram. A pesquisa foi um dos frutos de um projeto de pesquisa sobre formulação e resolução de problemas matemáticos pertencente ao Programa Observatório de Educação/CAPES e aconteceu a partir da proposta de atividades geométricas com a turma que, posteriormente, resultou em três estudos de caso, nos quais se analisa o respectivo desenvolvimento e comunicação na resolução dos problemas utilizando o Tangram. Aqui apresentamos os casos Júlia e Amanda em três episódios. Os resultados sugerem que, mesmo havendo certa fragilidade com relação ao conhecimento geométrico, o trabalho com resolução de problemas em grupos desperta o interesse, a comunicação matemática e a reflexão dos alunos.

Palavras-chave: Resolução de Problemas. Geometria. Comunicação matemática.

ABSTRACT

This article presents matters discussed in our dissertation research. In this regard, its aim was to analyse how students of a High School third year class from a state public school in Paraíba communicated when developing activities with resolution of geometric problems utilizing Tangram. The research was one fruit developed from a research project about problem posing and problem solving pertaining to the Programa Observatório de Educação/CAPES, and it took place from of the proposal of geometric activities with which subsequently resulted in three case studies in which it is analysed the respective development and communication in the resolution of problems using Tangram. We present here the cases Julia and Amanda in three episodes. The results suggests that, although having a certain fragility regarding the geometric knowledge, the work with problem solving in groups arouses the interest, the mathematical communication and the students reflection.

Keywords: *Problem Solving. Geometry. Mathematical Communication.*

* Doutora em Educação. Universidade Estadual da Paraíba. E-mail: kmedeirosuepb@gmail.com. Orcid: https://orcid.org/0000-0001-7474-6233
** Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Universidade Estadual da Paraíba. E-mail: gilmarameira@yahoo.com.br. Orcid: https://orcid.org/0000-0003-2867-1079

INTRODUÇÃO

Os desafios que a educação brasileira enfrenta, atualmente, exigem dos pesquisadores e educadores a busca de metodologias que possam despertar o interesse do aluno no processo de aprendizagem. Para tanto, é importante que o ensino esteja interligado com as necessidades do aluno. Nesse sentido, é fundamental utilizar alternativas metodológicas que possam contribuir para o desenvolvimento, criatividade e reflexão, a exemplo, da resolução de problemas. Mediante isso, Van de Walle (2009), salienta que, enquanto os alunos estão procurando relações, analisando padrões, descobrindo quais métodos funcionam e quais não funcionam, justificando resultados ou avaliando e desafiando os raciocínios dos outros, eles estão necessária e favoravelmente se engajando em um pensamento reflexivo sobre as ideias envolvidas.

Pensando no ensino de Matemática, particularmente de Geometria, percebemos que, apesar de tantas discussões acerca dessa temática em eventos ligados à Educação Matemática e pesquisas, conforme enfatiza Rêgo, Rêgo e Vieira (2012), o problema permanece e grande parte dos alunos ainda apresentam muitas dificuldades de raciocínio e visualização, sobretudo, quando pensamos na resolução de problemas, certamente em virtude da fragilidade de conhecimentos prévios dos conteúdos matemáticos e da falta de habilidade de trabalhar com situações novas. Dessa forma, os Princípios e Normas para Matemática Escolar do NCTM (2008), enfatizam que para acontecer a resolução de problemas com sucesso, é indispensável o conhecimento de conteúdos matemáticos, de estratégias de resolução de problemas, a capacidade de auto regulação, e uma predisposição para a colocação e resolução de problema. Nesses aspectos, concordando com Leivas (2012), é necessário que a aprendizagem de Matemática, em especial de Geometria, esteja centrada em um processo que envolva visualização e manuseio de materiais manipuláveis.

Ao tentar solucionar problemas, os alunos precisam criar estratégias, mobilizando conhecimentos adquiridos e a criticidade, pois é um momento em que raciocinam, dialogam, argumentam, mostram sua opinião e/ou entusiasmo frente ao que está sendo desenvolvido, sobretudo, quando há a interação social. No final do século XX, mais especificamente a partir dos anos de 1990 é que a metodologia de Resolução de Problemas começou a ganhar força nas aulas de Matemática, visto que o tecnicismo existente já não dava mais conta das demandas exigidas, onde os alunos precisam saber interpretar, desenvolver, criar e argumentar, e não ser um mero repetidor de técnicas.

Na metodologia de resolução de problemas os alunos não se envolvem apenas em um processo de regras e procedimentos, mas são inseridos em um meio que provoca reflexão, desenvolvimento autônomo e interação, sendo, portanto, uma forma de apresentarem características do seu pensar matemático. A resolução de problemas remete justamente a este fato, uma vez que o aluno se vê diante de uma situação até então desconhecida, mas que exige uma base de conhecimentos prévios que serão somados às novas estruturas intelectuais desenvolvidas. Nesse sentido, a base de conhecimentos prévios dará embasamento às novas estruturas cognitivas.

De acordo com D'Ambrósio (2008), pesquisas com o projeto Quasar[1] nos EUA, têm apontado que alunos que resolvem problemas conseguem melhores resultados em avaliações de porte nacional e até mesmo internacional. Para tal, é importante propor problemas que levem os alunos a pensar

1 O projeto Quasar , Quasar Project (Quantitative Understanding: Amplifying Student Achievement and Reasoning) foi um projeto desenvolvido nos Estados Unidos com o objetivo de melhorar o ensino de matemática para estudantes que frequentavam escolas (middleschools) de comunidades economicamente desfavorecidas, com ênfase no pensamento, no raciocínio, na resolução de problemas e na comunicação de ideias matemáticas. O projeto foi fomentado pela Fundação Ford (1990-1995), dirigido por Edward A. Silver, e teve como sede o Centro de Pesquisa em Aprendizagem e Desenvolvimento da Universidade de Pittsburg.(CYRINO & CIRINO DE JESUS, 2014)

e pôr em prática o pensar matemático, despertando inclusive a criatividade. Entretanto, é necessário um cuidado especial por parte do professor, que deve ter amplo conhecimento sobre como trabalhar a resolução de problemas, do contrário, toda a essência da proposta pode ser invalidada e o que é posto como problema pode tornar-se exercício, com pouco significado para os alunos.

Quando o ensino é centrado apenas em sua característica tradicional, as atitudes dos alunos são apresentadas de forma passiva perante a aprendizagem. De acordo com Medeiros e Santos (2007), o ensino tradicional inibe o espírito criativo do aluno. Para reverter isso, é necessário que haja uma reflexão mais crítica em relação ao modelo que está sendo desenvolvido em sala de aula. Dessa forma, possivelmente ocorrerão mudanças nas concepções e/ou atitudes tanto do professor, quanto dos alunos, que se sentirão autores de sua história.

Nesse sentido, entendemos que o fato de propor problemas pertinentes, segundo o interesse dos alunos, pode deixar o ensino de Matemática mais interessante, uma vez que o aluno sente-se mais envolvido e desafiado a resolver a situação proposta. Entretanto, isto não é uma tarefa simples, precisa de interesse e conhecimento por parte do professor para que ele possa motivar e orientar os alunos no desenvolvimento da tarefa. Assim, conhecer o aluno, bem como sua realidade, é muito positivo no sentido da elaboração das propostas a serem desenvolvidas em sala de aula, pois, para isso, o interesse do aluno é primordial.

Baseado nesses aspectos, desenvolvemos uma pesquisa de dissertação que enfatizou a comunicação a partir da resolução de problemas geométricos, pois queríamos saber como alunos de uma turma de 3º Ano do Ensino Médio se comunicavam ao desenvolverem atividades com resolução de problemas geométricos fazendo uso do Tangram de sete peças.

O trabalho em Díades, termo usado por César, Oliveira e Teles (2004) que significa duplas, é considerado de extrema importância, porque viabiliza uma mudança nas práticas pedagógicas, valorizando assim, uma participação mais ativa dos alunos no processo de apraproprìação do conhecimento. Assim, após as etapas iniciais, orientamos o desenvolvimento organizando a turma em Díades para resolverem os respectivos problemas subsidiados com o Tangram de sete peças.

Nas seções a seguir, apresentamos um aporte teórico acerca da Resolução de Problemas e Geometria, Comunicação e Interação, bem como, os caminhos metodológicos que nortearam a pesquisa. Além disso, apresentamos a descrição do desenvolvimento de duas alunas trabalhando em Díade em três Episódios. Por fim, destacamos algumas conclusões acerca dos resultados.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E GEOMETRIA: MOTIVAÇÃO PARA APRENDIZAGEM

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997) sugerem a inclusão de alternativas relativas a metodologias para o ensino de Geometria, mas não apontam muitas possibilidades para que isto ocorra. Então, na busca de opções, encontramos nas recreações geométricas, quando convenientemente planejadas, recursos pedagógicos enriquecedores e eficazes na construção do conhecimento. De acordo com Matos e Serrazina (1996), parece essencial que a Geometria seja uma das formas privilegiadas de adquirir uma intuição e orientação espacial crucial para o mundo moderno. No entanto, é de grande necessidade a existência de caminhos metodológicos que proporcionem meios para que os próprios alunos possam desenvolver seu conhecimento.

Boavida *et al.* (2008), ressaltam que em meio à atual situação é necessário que sejam propostas experiências diversas que possam permitir o desenvolvimento das capacidades de resolução de problemas e, assim, construir o conhecimento matemático ao longo da vida. Concomitante a isso os autores ressaltam que: “embora a aprendizagem da Matemática e, consequentemente, o trabalho na sala de aula, envolva necessariamente exercícios e atividades de memória e treino, ficaria, no entanto, incompleto, em todos os níveis, sem a resolução de problemas. (BOAVIDA *et al.*, 2008, p. 33).

Os alunos podem ser criativos, entretanto, necessita-se de um favorecimento de oportunidades para que essa criatividade seja despertada. D’Ambrósio (2008) nos diz que a modernidade em termos tecnológicos, favoreceu muito as oportunidades de aprendizagem, que vão muito além das que podem ser obtidas através do tradicional papel e lápis.

De acordo com Van de Walle (2009), quando os alunos estão frente a uma situação de solucionar problemas, a ideia não é de aplicar Matemática, mas de aprender Matemática com base em seus métodos de resolução. E isso se dá quando os alunos deparam-se com tarefas bem escolhidas. O autor salienta que, enquanto os alunos estão procurando relações, analisando padrões, descobrindo quais métodos funcionam e quais não funcionam, justificando resultados ou avaliando e desafiando os raciocínios dos outros, eles estão necessária e favoravelmente se engajando em um pensamento reflexivo sobre as ideias envolvidas.

O autor afirma que os problemas que são voltados para a aprendizagem matemática também devem possuir as seguintes características:

- Devem começar por onde os alunos estão, ou seja, eles devem ter as ideias apropriadas para solucionar o problema de tal forma que ainda continue desafiante e interessante;
- O aspecto problemático ou envolvente do problema deve estar relacionado à Matemática que os alunos ainda vão aprender, o que significa dar maior significado à Matemática envolvida e os métodos;
- A aprendizagem matemática deve requerer justificativas e explicações para as respostas e os métodos, uma vez que as justificativas devem ser uma parte integrante de suas soluções.

Quando se propõe um problema, o aluno é desafiado a pensar e raciocinar matematicamente e a busca de soluções muitas vezes leva a outros problemas, o que proporciona a comunicação, a interação e a interligação de ideias viabilizadas pelo diálogo. Segundo Boavida *et al.* (2008), a resolução de problemas incentiva a comunicação; fomenta o raciocínio e a justificação; permite estabelecer conexões entre vários temas matemáticos e até interligados a outras áreas curriculares; e apresenta a Matemática com um sentido mais útil na vida quotidiana. Dessa forma, o aluno passa por um processo no qual é levado a organizar suas ideias com base na situação proposta e no conhecimento prévio, seja este de natureza matemática ou prática.

Em relação ao plano organizado em quatro fases, descrito por Pólya (1995) no qual o aluno precisa compreender o problema; delinear um plano; desenvolver esse plano e, por fim, avaliar os resultados, os autores supracitados argumentam que nem sempre é simples distinguir a segunda da terceira fase, pois ao estabelecer o plano, este já começa a ser desenvolvido. Para tanto, consideram um modelo mais simplificado que apresenta as seguintes fases: ler e compreender o problema; fazer e executar um plano; e verificar a resposta. O processo de resolução de problemas não é algo específico de uma determinada fase ou ciclo, mas algo que deve fazer parte de toda aprendizagem matemática.

Van de Walle (2009) ressalta que a resolução de problemas no ensino tem grande valor em sala de aula, pois concentra a atenção dos alunos sobre as ideias e em dar sentido às mesmas; desenvolve nos alunos a convicção de que eles são capazes de fazer Matemática e de que a Matemática faz sentido; possibilita um ponto de partida para uma ampla gama de alunos; desenvolve o potencial matemático. No entanto, não há uma receita para se resolver um problema, um dos meios mais propícios é a persistência, motivação, organização e estruturação das ideias para apresentar de maneira clara o que se pensou a partir dos conhecimentos prévios.

Portanto, quando pensamos no ensino da Geometria, sobretudo, se faz necessário que o professor efetue a abordagem de cada conteúdo de forma mais próxima aos alunos, proporcionando meios nos quais desenvolvam o conhecimento de forma não rotineira, não linear ou convencional, conforme ressaltam Rêgo, Rêgo e Vieira (2012). Nesse sentido, se faz também necessário o desenvolvimento da resolução de problemas geométricos, uma vez que se trata de uma tarefa de caráter inovador, o que possivelmente possibilita uma concepção mais positiva com relação aos conceitos geométricos.

Com base nisso, uma alternativa interessante é que o professor, em seu planejamento, possa pensar em caminhos, nos quais sejam dadas maiores oportunidades para a comunicação fluir em sala de aula, pois na maior parte das vezes essa atitude cabe quase que de forma específica ao professor, enquanto o alunado é basicamente passivo. Um meio que possivelmente ameniza essa situação é o desenvolvimento de alternativas, nas quais os alunos participem ativamente das atividades, interagindo uns com os outros, podendo expressar seu pensamento por meio da comunicação oral viabilizada pela interação social.

O PODER DA COMUNICAÇÃO A PARTIR DA INTERAÇÃO ENTRE OS ALUNOS

A interação social tornou-se uma alternativa de relevante valia, visto que pode favorecer para um compartilhamento de saberes, e assim, a natureza das tarefas é determinante para uma integração mais propícia. O trabalho em Díades, citado por César, Oliveira e Teles (2004), quer dizer um trabalho desenvolvido em duplas na sala de aula, é considerado de extrema importância, porque viabiliza uma mudança nas práticas pedagógicas, valorizando assim, uma participação mais ativa dos alunos no processo de apropriação do conhecimento por meio da interação social.

Souza *et al.* (1995), defendem que o trabalho em grupo proporciona melhor aprendizagem, uma vez que há trocas de informação favorecendo a busca de interpretações na atividade, melhorando o desenvolvimento da linguagem e, consequentemente, proporcionando melhor reflexão acerca do seu desenvolvimento. Assim, o desenvolvimento da compreensão dos alunos se justifica a partir de suas ações e da forma como se expressam e escrevem sobre as ideias matemáticas na resolução de problemas.

De acordo com Fonseca (2009), a comunicação é um meio no qual há uma articulação, organização e consolidação do pensamento. Com base nisso, a autora esclarece que o compartilhar de ideias se dá de vários modos e pode ser oralmente ou por escrito, a partir de gestos, desenhos, objetos, e símbolos. Assim, numa aula de Matemática os alunos estão em constante comunicação, mesmo que essa não se dê de modo formal. Todas as experiências são válidas e, por essa razão, devem ser muito bem aproveitadas para, a partir dos processos de interação e ação, os alunos se adequarem a uma linguagem mais precisa do ponto de vista matemático. Para tanto, é muito importante que seja dada a oportunidade desta experiência ser desenvolvida desde as séries iniciais, já que é o início de tudo, onde a criança começa a abstrair e desenvolver seu poder cognitivo.

De acordo com Fonseca (2009), o partilhar de ideias em pequenos ou grandes grupos é muito importante dentro do processo de ensino e aprendizagem, pois todos ganham, seja a partir da apresentação de ideias adequadas e fundamentadas ou mesmo incipientes ou incorretas. Segundo a autora, isso acontece porque com a sua participação ativa na discussão, os alunos têm a oportunidade de melhorar, adequar, refinar e desenvolver a compreensão do seu próprio pensamento, integrando aspectos diferenciados que outros apresentaram.

Esse argumento fortalece o que aponta o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM 2000) ao defender que a comunicação em sala de aula deve incluir vários aspectos, tais como: partilhar o pensamento e as ideias, ouvir os outros, colocar questões, pedir esclarecimentos, explicar e justificar. De fato, esses fatores podem surgir por meio da interação social, comunicação e resolução de problemas na sala de aula de Matemática, levando os alunos a refletirem sobre seu desenvolvimento e argumentação, e o professor a avaliar de forma mais propícia por meio da observação direta, da comunicação, criatividade e diálogo dos alunos e entre os alunos.

Com o objetivo de realizar um bom trabalho, onde a meta seja a aprendizagem, a comunicação entre o professor e os alunos é de grande valia. Esta comunicação, seja oral ou escrita, revela muito sobre cada um deles e, conforme Pessoa (2010, p. 28), "a partir da comunicação o aluno explicita suas ideias matemáticas envolvidas nas experiências geométricas que são realizadas". Isto pode ser primordial até no modo de avaliar, pois aquilo que o aluno expressa é o que ele pode abstrair durante o trabalho que desenvolveu.

No momento da exploração de uma tarefa em sala de aula é possível fazer muitos questionamentos, provocando o diálogo dos alunos envolvidos, a experimentação e a manipulação podem dar lugar para o envolvimento dos alunos e percepção de propriedades e conceitos diversos nas figuras geométricas.

Segundo Bishop e Goffree (1986, p. 18), "possivelmente, os professores de Matemática deveriam considerar mais deliberadamente o uso e a exploração de atividades em pequenos grupos". Quando o assunto é a discussão em sala, os autores sublinham que a melhor forma para a ação, não são cadeiras separadas em filas e sim em uma forma na qual o professor e todos os alunos interajam conjuntamente. Latas (2012) também defende a ideia de interação em sala de aula, uma vez que essa dinâmica pode possibilitar o desenvolvimento da comunicação e consequentemente mais autonomia e confiança por parte dos alunos.

> A interação partilha de ideias e negociação de significados entre os alunos, inerentes às atividades geométricas em causa, podem constituir também um excelente meio para desenvolver a comunicação matemática, podendo assim desenvolver nos alunos capacidades de autonomia e confiança (LATAS, 2012, p. 9).

A comunicação entre os alunos e sua forma de linguagem no momento de desenvolvimento das tarefas ajuda a analisar mais positivamente sua interpretação e aprendizagem e consequentemente auxilia no processo de avaliação.

A apresentação de explicações por parte dos alunos não é trivial na realidade escolar que temos. Na maioria das vezes, os alunos apenas "dizem", apresentam o procedimento ou mesmo tentam explicar a partir da prática cotidiana ou de objetos. De acordo com Bishop e Goffree (1986), é um erro associar o "explicar" com o "dizer", pois deve haver justificativas pertinentes na resolução de problemas, com as quais os alunos possam se comunicar expressando o conhecimento matemático a partir de suas estratégias.

As explicações dos alunos, de acordo com Levenson, Tirosh e Tsamir (2009), podem ser classificadas por Matematicamente baseadas ou Praticamente baseadas. As explicações Matematicamente baseadas expostas por alunos do Ensino Básico, embora nem sempre apresentem a formalidade e o rigor matemático, são baseadas em aspectos puros da Matemática, ou seja, argumentações baseadas em definições ou propriedades matemáticas aprendidas anteriormente. Já as explicações Praticamente baseadas, como o próprio nome indica, remetem a explicações de cunho voltado para o contexto cotidiano, ou seja, são aquelas explicações informais e baseadas em recursos visuais ou manipuláveis.

De acordo com as autoras, as explicações Praticamente baseadas, podem acontecer quando os alunos fazem referência ao cotidiano ou mesmo, materiais manipuláveis para dar significados às expressões matemáticas. No entanto, quando se fundamentam apenas em definições, propriedades e raciocínios matemáticos, a autora defende que suas explicações são Matematicamente baseadas.

Yackel e Cobb (1996) salientam que a explicação, interpretada como um ato comunicativo tem o propósito de esclarecer aspectos do pensamento matemático que podem não estar claros para outras pessoas. De acordo com os autores, quando os alunos buscam dar sentido às explicações dadas pelos colegas, comparam soluções e fazem julgamentos sobre semelhanças e diferenças, há maiores oportunidades para aprendizagem. Dessa forma, segundos os autores, há explicações que descrevem procedimentos, outras que descrevem ações com objetos matemáticos e explicações como objetos de reflexão.

O diálogo que é, na maioria das vezes, o tipo de comunicação mais comum utilizada pelos alunos, quando estão envolvidos em um trabalho em grupo, se caracteriza pelo desejo de investigar mesmo quando não há respostas corretas para o que se investiga. Dessa forma, o diálogo proporciona a reflexão que é, muitas vezes, viabilizada pelos questionamentos ou mesmo incertezas. O fato de construir novas perspectivas frente à determinada situação é parte integrante do diálogo. Com isso, o diálogo é um processo que permeia a aprendizagem. Portanto, essas relações interpessoais são relações pessoais e de construção de conhecimento.

Mediante a proposta de análise da comunicação entre os alunos por meio da resolução de problemas geométricos, subsidiados pelo uso do Tangram de sete peças, apresentamos os procedimentos metodológicos que orientaram a pesquisa.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Com base nos aspectos elencados, desenvolvemos a partir do Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, a pesquisa de dissertação que enfatizou a Comunicação e a Resolução de Problemas geométricos em uma Turma de 3º Ano do Ensino Médio. Nessa pesquisa, o nosso objetivo foi verificar como alunos de uma Turma de 3º Ano do Ensino Médio se comunicavam ao desenvolverem atividades com resolução de problemas geométricos fazendo uso do Tangram de sete peças.

A pesquisa desenvolvida em conjunto com a proposta do *Projeto Investigando a Formulação e a Resolução de Problemas Matemáticos na Sala de Aula: Explorando Conexões entre Escola e Universidade,* do Programa Observatório de Educação/*CAPES, do qual fizemos parte,* se desenvolveu em três etapas - com a Turma toda, composta por 21 alunos numa faixa etária que variava entre 16 e 19 anos de idade, residentes, em sua maioria, na zona rural e que sempre estudaram em escolas públicas, trabalhando em Díades; com a turma toda trabalhando individualmente e; com as Díades selecionadas a partir do seu desenvolvimento.

A princípio nos comunicamos com a direção da escola e a professora regente da Turma para explicar sobre nossa proposta e pedir o consentimento para intervenção. Fomos muito bem aceitos por eles que, ao conhecerem a natureza do trabalho e a sua dinâmica, identificaram que seria algo muito importante para a escola e para os alunos e que em nada iria atrapalhar o desenvolvimento das propostas da professora regente da Turma em questão. Assim, inicialmente, conhecemos o perfil da

Turma, a partir de uma entrevista semiestruturada prestada pela professora, o que nos serviu de base para organizarmos as tarefas propostas.

A partir dessa primeira etapa, nas semanas seguintes, nos inserimos em sala de aula com a Turma. No primeiro contato propomos um questionário para todos os alunos, no qual eles deveriam se identificar (nome, idade, endereço), colocar seu ponto de vista em relação à disciplina de Matemática, falar sobre o conhecimento que tinham sobre o Tangram de sete peças e sobre suas preferências profissionais para a formação superior, já que eram alunos ao término do 3º Ano. Após essa parte, conversamos sobre a proposta de continuar a se inserir com eles durante algumas semanas com o objetivo de desenvolver algumas tarefas importantes para nós, enquanto pesquisadoras e, para eles enquanto alunos. A proposta foi muito bem aceita, pois se apresentaram motivados para encarar o que seria proposto.

A partir disso, nos próximos encontros, orientamos algumas tarefas nas quais os alunos se organizaram em Díades aleatórias em sala, pois os próprios escolhiam seus pares. Nessa etapa, propomos algumas atividades geométricas, inspiradas em Nasser e Sant'anna (2010) fazendo o uso de materiais manipuláveis (sólidos geométricos e figuras planas) para observarmos o conhecimento prévio que eles apresentavam acerca da Geometria.

Com base nessa etapa, identificamos que as Díades apresentaram muitas dificuldades na maior parte dos conceitos geométricos, em virtude disto, organizamos outra etapa a ser desenvolvida com os mesmos alunos, porém de forma individual, com objetivo de identificar como as atividades eram desenvolvidas por cada aluno. Assim, em três encontros com a Turma, aplicamos Testes van Hiele, que são um conjunto de alternativas e questões propostas por Nasser e Sant'anna (2010) que permitem a identificação do Nível de pensamento geométrico dos alunos com base no Modelo van Hiele, mais especificamente, dos três primeiros níveis, de acordo com um percentual de acertos elencado pelas autoras. Ao analisarmos o resultado desses testes, concluímos que a maioria da turma apresentou um desenvolvimento muito aquém do esperado para alunos que estão concluindo o Ensino Médio. Dessa forma, organizamos a última etapa da pesquisa com resolução de problemas geométricos, que aconteceu em quatro Episódios.

As pesquisas em Educação Matemática apontam a relevância da resolução de problemas, porém, para que a opção por trabalhar dessa maneira atinja os propósitos esperados, isto é, com compreensão, diversidade de estratégias para resolução e formalismo, é necessário ter o mínimo de conhecimento prévio e interpretação. Como a nossa proposta de pesquisa envolveu particularmente, a resolução de problemas geométricos, o uso de materiais manipuláveis e a comunicação entre os alunos, consideramos pertinente, baseado em nossos objetivos, analisar o desenvolvimento dos alunos que apresentaram melhor desempenho nos testes, pois entendemos que a comunicação entre ambos, na formação de Díades, seria mais relevante para responder à nossa investigação.

Foram propostos quatro problemas por nós formulados, sendo desenvolvido um a cada encontro, com duração de uma hora e meia, que chamamos de Episódios. Nesses encontros levávamos todo material necessário ao uso dos alunos para resolução dos problemas (Tangrans de sete peças, os problemas impressos e folhas para o registro das respostas também de forma escrita). Em todos os encontros citados, gravamos em áudio toda a comunicação e as estratégias utilizadas na resolução, as quais também foram apresentadas de forma escrita, deixando registrado na folha de resolução.

Enfatizamos, a partir do quadro teórico, a Resolução de Problemas, a relevância do ensino e aprendizagem da Geometria, alguns aspectos de Comunicação e interação social tendo em vista, particularmente, a comunicação oral e escrita dos alunos. Os dados foram coletados por meio da observação participante, áudio-gravações e registros da comunicação oral e escrita das Díades.

A seguir, apresentamos o desenvolvimento e comunicação entre as alunas identificadas pelos pseudônimos Júlia e Amanda, um dos três estudos de caso da dissertação, na resolução de problemas geométricos em três Episódios.

INSTRUMENTOS E CATEGORIAS DE ANÁLISE DE DADOS

Nos momentos em que as Díades apresentavam as estratégias para resolver os problemas, fazíamos a observação direta e registros com fotografias e anotações da forma como interagiam, como demonstravam compreender o problema, como dialogavam e reagiam à nossa proposta. No quadro 01, apresentamos a organização dos instrumentos de análise de dados e suas respectivas descrições.

Quadro 01 - Descrição dos Instrumentos de Análise de Dados.

Instrumentos de Análise de Dados	Descrição
Entrevista semiestruturada	Gravação em áudio com transcrição de forma íntegra.
Tarefas Propostas	Roteiros de atividades com materiais manipuláveis e problemas com registros das estratégias utilizadas pelas alunas nas atividades desenvolvidas.
Documentos	Gravação em áudio com as transcrições mais relevantes para pesquisa, anotações de fatos relevantes frente à comunicação dos alunos nas tarefas e fotografias no momento das atividades.

Fonte: Registros nossos.

Pensando na forma como, muitas vezes, acontece o ensino de Geometria em escolas públicas do nosso país, e as consequências refletidas na aprendizagem, tivemos como Categoria de Análise a Priori *o Nível de pensamento geométrico de alunos ao terminar o Ensino Médio.* No princípio da pesquisa empírica, o registro mais efetivo que tivemos foi o posicionamento posto pela professora regente na entrevista sobre a turma e metodologias utilizadas. Com isso, fizemos uma reflexão sobre sua prática com a turma e, a partir dessa reflexão, passamos a fazer o Planejamento das Atividades a serem desenvolvidas. Entretanto, ao darmos continuidade à nossa proposta foram emergindo outras categorias de análise, portanto, Categorias a Posteriori, que nomeamos por *Interação e diálogo, Comunicação por meio do pensamento geométrico* e *Estratégias na resolução dos problemas geométricos.* No quadro abaixo apresentamos de forma detalhada cada uma dessas categorias.

Quadro 02 - Descrição das Categorias de Análise.

Categorias de Análise	Descrição
Interação e diálogo	Nessa categoria enfatizamos como as Díades interagem entre si, e os diálogos apresentados com seu desenvolvimento na resolução dos problemas.
Comunicação a partir do Pensamento Geométrico	A partir das atividades planejadas com base no Modelo van Hiele (1ª etapa), e observações acerca do desenvolvimento das Díades, enfatizamos, nessa categoria, a forma como apresentaram o pensamento geométrico, por meio de suas expressões promulgada através da comunicação oral (Explicações e Diálogos) e escrita (Registros apresentados na folha de respostas).

Estratégias na resolução dos problemas geométricos	Aqui enfatizamos a forma como as Díades apresentaram suas estratégias para resolver os problemas propostos com base no Modelo van Hiele, através da comunicação escrita e oral (Explicações e Diálogos e Registros apresentados na folha de respostas). Dessa forma, destacamos: - O Nível de pensamento geométrico expresso a partir das estratégias utilizadas; - As expressões orais e escritas apresentadas por cada Díade na resolução dos problemas, seus diálogos ou explicações; - A resolução de problemas por meio de materiais manipuláveis, especificamente fazendo uso do Tangram.

Fonte: Registros nossos.

O CASO JÚLIA E AMANDA EM TRÊS EPISÓDIOS

As alunas identificadas pelos pseudônimos Júlia e Amanda, têm 17 anos de idade, sempre estudaram em escolas públicas do município de Cabaceiras no estado da Paraíba, onde habitavam. Elas disseram considerar a Matemática "*um pouco difícil*", porém se envolveram significativamente em cada uma das atividades desenvolvidas. Propomos quatro problemas por nós formulados e a cada um nomeamos de Episódios 1 (um), 2 (dois), 3 (três), e 4 (quatro). Cada um desses problemas foi desenvolvido em dupla e analisamos que as estudantes Júlia e Amanda se comunicaram espontaneamente de acordo com o grau de conhecimento que apresentavam. Aqui apresentamos o desenvolvimento da dupla nos três primeiros episódios.

O USO DO TANGRAM PARA O RECONHECIMENTO DE POLÍGONOS E CONGRUÊNCIA: EPISÓDIO 1 - "AS PEÇAS DO TANGRAM: O QUE DISSE MÁRIO?"

Com esse primeiro Episódio - "*As peças do Tangram: o que disse Mário?*", o nosso principal objetivo foi identificar como as alunas compreendiam a respectiva definição e conceito de polígonos e congruência. Começamos com esse problema por considerarmos mais básico para relacionar o contexto do que era pedido ao material (Tangram), já que a resolução de problemas dessa natureza não era uma prática tão comum no cotidiano da turma. Dessa forma, a situação apresentada foi a seguinte:

> A professora de Matemática levou para sua aula um Tangram feito em madeira, sem explicar o nome de cada peça que o formava. Mônica já tinha visto e estudado um pouco com o material manipulável em sua antiga escola. Assim, ela propôs que seu colega Mário falasse o nome dos polígonos que formam o Tangram. Mário, se sentindo desafiado, insistiu em responder detalhadamente. Se Mário respondeu corretamente, quais foram suas respostas? Que peças Mário apontou como congruentes, por quê?

Júlia e Amanda começaram interpretando, dando indícios de que conseguiam resolver com facilidade, como podemos observar com base em suas afirmações:

Júlia: *A pergunta diz assim: A professora de Matemática levou para sua aula um Tangram feito em madeira, sem explicar o nome de cada peça que o formava. Mônica já tinha visto e estudado um pouco com o material manipulável em sua antiga escola. Assim, ela propôs que seu colega Mário falasse o nome dos polígonos que formam o Tangram. Mário, se sentindo desafiado, insistiu em responder detalhadamente. Se Mário respondeu corretamente, quais foram suas respostas? Que peças Mário apontou como congruentes, por quê?*

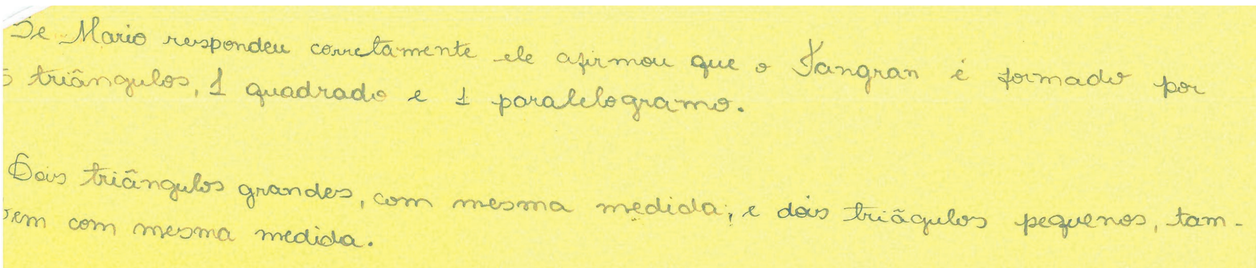
Amanda: *Então para a primeira pergunta, podemos colocar que são 5 triângulos, 1 quadrado e 1 paralelogramos. Não é?*
Júlia: É*, essa é fácil! Eu coloco (escrever na folha de resolução) se Mário respondeu corretamente ele afirmou que o Tangram é formado por essas peças, né?*
Amanda: *Isso!*

A partir da interpretação do problema pelas alunas, elas dialogaram parecendo compreender a ideia de polígonos quando nomearam corretamente as peças do Tangram a partir de sua forma. Em relação à segunda pergunta do problema, Júlia apresentou de imediato sua resposta, dizendo ser *"os triângulos grandes e os pequenos"* e, a partir de tal resposta, Amanda questionou se são congruentes por apresentarem a mesma medida, e Júlia confirmou que *sim,* como podemos observar nesse diálogo:

Júlia: *E a segunda?Que peças Mário apontou como congruentes, por quê?...Os triângulos grandes e os pequenos!*
Amanda: É porque tem a mesma medida?!
Júlia: *Sim. A gente coloca: dois triângulos grandes com a mesma medida e dois triângulos pequenos também com a mesma medida.*
Amanda: *S*ó isso, né?
Júlia: É, acho que é!

Observamos que as alunas apresentaram as respostas de uma forma bem objetiva. No entanto, reconheceram os polígonos que formam o Tangram, ao mesmo tempo, parecendo ter noções do conceito de congruência, ao dizer que os triângulos são congruentes por terem a mesma medida (forma e medidas). Nesse sentido, Júlia e Amanda, ao se comunicarem oralmente, comparavam as peças e, com base no conhecimento prévio que tinham sobre congruência, expuseram suas respostas também de forma escrita, conforme apresentadas na Figura 01 abaixo:

Figura 01 - Resposta apresentada pelas alunas Júlia e Amanda.


Se Mario respondeu corretamente ele afirmou que o Tangran é formado por
5 triângulos, 1 quadrado e 1 paralelogramo.

Dois triângulos grandes, com mesma medida; e dois triâgulos pequenos, tam-
bem com mesma medida.

Fonte: nota das alunas.

Conforme nossa proposta nesse Episódio, analisamos que Júlia e Amanda conseguiram compreender a ideia de polígonos, quando disseram que os polígonos são "*triângulos, quadrado e paralelogramo*". Em relação ao conceito de congruência, as alunas entenderam que os polígonos congruentes são os triângulos (grandes e pequenos) por ter a mesma medida. Analisamos que as alunas, mesmo não apresentando uma definição detalhada e formal em relação ao conceito de congruência, parecem compreender a ideia, apresentando uma resposta coerente.

O USO DO TANGRAM NA FORMAÇÃO DE POLÍGONOS USUAIS: EPISÓDIO 2 - "DESVENDANDO AS CURIOSIDADES DE CATARINA"

No segundo Episódio que chamamos de Episódio 2: *"Desvendando as curiosidades de Catarina"*, a proposta se deu com objetivo de compreender como as alunas faziam representações geométricas de polígonos usando apenas três peças do Tangram e com isso, como elas apresentaram suas justificativas por meio da comunicação oral e escrita. O problema proposto foi o seguinte:

> Depois que a professora de Matemática apresentou o Tangram para a turma, contextualizando sua história e alguns conceitos específicos deste quebra-cabeça, Catarina, por curiosidade, quis construir, usando apenas o quadrado e dois triângulos pequenos, alguns polígonos usuais. Quais são as possibilidades de construção de Catarina? Como é possível essas construções?

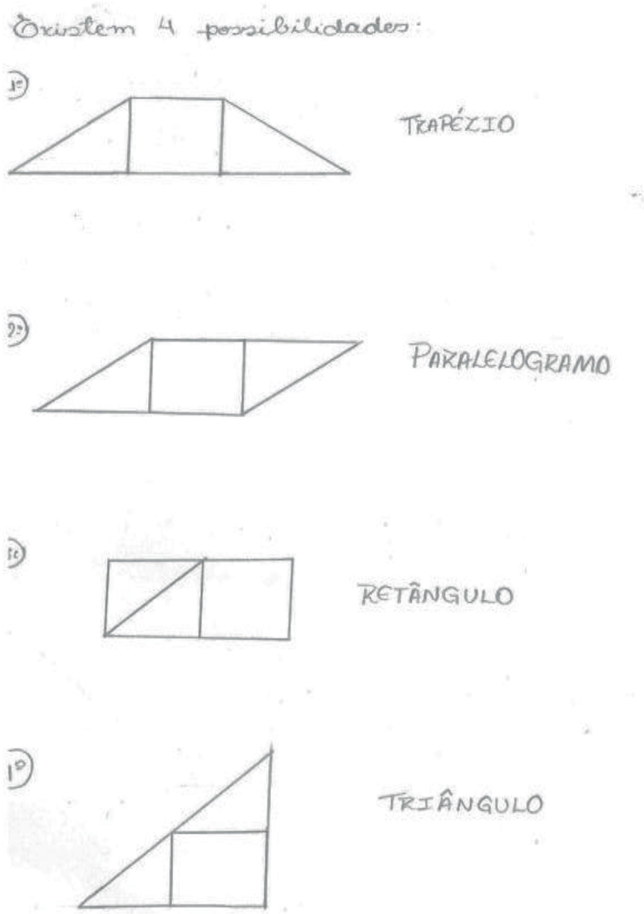
Notamos que as alunas partiram de tentativas para encontrar possíveis possibilidades de formar polígonos. Observamos que Júlia e Amanda, após separarem as peças, se comunicaram oralmente na tentativa de formar as figuras e, com isso, fizeram as representações também de forma escrita, desenhando os polígonos formados.

Júlia: *O problema pede as possibilidades e como podemos fazer, né isso?*
Amanda: *Sim, vamos ver!*
Júlia: *Só podemos usar o quadrado e dois triângulos.*
Amanda: *Aqui eu posso formar um trapézio, olha!*
Júlia: *Tem mais possibilidades, peraí!*
Júlia: *Um paralelogramo também. Vai notando!*
Amanda: *Olha, colocando desse jeito dá pra formar um retângulo e assim, um triângulo (Usando apenas duas peças)*.
Júlia: *Vamos desenhar as formas então!*
Amanda: *Colocamos junto das formas: trapézio, paralelogramo, retângulo e triângulo*.

Na tentativa de solucionar o problema, Amanda usou o quadrado e dois triângulos, conforme indicado e, a partir de tais peças, apontou como possibilidade a formação do trapézio. Também manuseando as peças, Júlia encontrou outras possibilidades como *paralelogramo, retângulo e triângulo,* porém não apresentou nenhuma propriedade referente ou justificativa e se baseou apenas no apelo visual, representado em forma de desenho, na folha resposta, como apresentado na Figura 02 abaixo.

O processo de resolução e explicação do desenvolvimento das estratégias na resolução de problemas, seja oral ou escrita, é muito importante, pois é uma forma de o professor compreender o modo como o aluno interpreta e soluciona, bem como, entender seu Nível de compreensão geométrica. Nesse aspecto, o Modelo van Hiele nos faz compreender esse Nível de pensamento geométrico, desde o reconhecimento de formas até a construção de provas geométricas formais.

Figura 02 - Representação da formação de polígonos por Júlia e Amanda.



Fonte: nota das alunas.

Nessa proposta de resolução de problemas subsidiada pelo uso de materiais manipuláveis, concordamos com Matos e Serrazina (1996), quando asseguram a ideia de que o uso de materiais manipuláveis se faz muito importante, uma vez que possibilita uma interpretação mais significativa.

Portanto, nesse Episódio analisamos a forma como Júlia e Amanda apresentaram sua compreensão geométrica acerca dos polígonos. Para o desenvolvimento da resolução do problema, as alunas usaram as três peças juntas (quadrado e os 2 triângulos pequenos) e, posteriormente, usaram apenas os dois triângulos para formação de outros polígonos, conforme citaram, o quadrado e o triângulo. Dessa forma, as alunas buscaram as possibilidades a partir do manuseio das peças e apresentaram uma sucinta comunicação oral e buscavam apresentar respostas imediatas.

CONTEXTUALIZAÇÃO DO CÁLCULO DE ÁREAS USANDO DUAS PEÇAS DO TANGRAM: EPISÓDIO 03 - "CÁLCULO DE ÁREAS: OS CÁLCULOS DE PEDRINHO"

Nesse Episódio o nosso objetivo foi identificar como as alunas desenvolviam seu raciocínio baseando-se na ideia de área de figuras planas e relações entre figuras. Assim, propomos o problema seguinte:

Se Pedrinho tomou como unidade de medida no cálculo das áreas das demais figuras, apenas o triângulo pequeno e o quadrado (peças juntas), como ele denotou a área do triângulo médio, do paralelogramo e do quadrado original (quadrado formado pelas sete peças do Tangram)?

Elas iniciaram lendo o problema e fazendo interpretações. Fizeram referência à área do paralelogramo e apresentaram a fórmula para o cálculo da área do triângulo e do quadrado:

Júlia: *Nesse caso, a gente precisa saber de início que a área do triângulo é base vezes altura dividido por dois e que a área do quadrado é lado vezes lado.*
Amanda: *então vamos ver como faz!*
Júlia: Ó, vê aqui: no paralelogramo podemos usar o triângulo pequeno e a metade da área do quadrado que é a mesma coisa que a medida do triângulo pequeno.
Amanda: *Eh, então a gente pode botar assim: para calcular a área do paralelogramo usamos o triângulo pequeno e a metade da área do quadrado que corresponde à mesma medida do triângulo pequeno, e colocamos duas vezes b vezes h dividido por dois.*

Com a comunicação oral das alunas, pudemos perceber que elas apresentavam certo domínio do conceito de área, quando Júlia fez a interpretação e elaborou o plano de resolução por meio do conhecimento prévio, que é necessário na resolução - áreas do triângulo e do quadrado, com isso elas apresentaram suas explicações a partir do raciocínio matemático, ou seja, usaram explicações Matematicamente baseadas. Além disso, Júlia e Amanda fizeram relações entre as áreas e, sobrepondo as peças, chegaram à conclusão de que, para calcular a área do paralelogramo, se faz necessário usar o triângulo pequeno e a metade da área do quadrado que corresponde à mesma medida do triângulo pequeno. Nesse sentido, tomando por referência a descrição acerca das explicações praticamente baseadas por Levenson, Tirosh e Tsamir (2009), identificamos, por meio da comunicação oral entre as alunas, que esse tipo de explicação foi por elas utilizado no desenvolvimento do problema.

Atrelado à comunicação oral, subsidiada pela manipulação das peças do Tangram, Júlia e Amanda, apresentaram suas explicações de forma Praticamente baseadas e Matematicamente baseadas na discussão de como resolver74 o problema, por meio do cálculo das áreas das figuras indicadas (quadrado e triângulos) e sobrepondo-as às demais peças que formam o Tangram.

Júlia: *Agora para calcular a área do triângulo médio usamos o mesmo raciocínio.*
Amanda: *Também duas vezes base vezes altura dividido por dois. Assim!*
Amanda: *Por fim, pra gente saber a área do quadrado original, olhamos pras peças e vemos que usamos a área do quadrado quatro vezes e a área do triângulo pequeno oito vezes.*
Amanda: *Então, vamos colocar aqui a fórmula: 4 vezes L vezes L mais 8 vezes b vezes h dividido por 2. Né assim?*
Júlia: *Isso!*

Percebemos que para mostrar a área do triângulo médio e, posteriormente, a área completa do quadrado formado pelas sete peças do Tangram, elas usaram o mesmo procedimento, apresentando também suas explicações de forma escrita, conforme apresentado na figura seguinte.

Figura 03 - Comunicação escrita apresentada por Júlia e Amanda no Episódio *“Cálculos de áreas: os cálculos de Pedrinho”*

Área do triângulo = $\frac{b.h}{2}$ Área do quadrado = $l.l$

Para calcular a área do paralelogramo usamos o triângulo pequeno e a metade da área do quadrado que corresponde a mesma medida da área do triângulo pequeno.
Então a fórmula deve ser: $2 \times \frac{b.h}{2}$

Para calcular a área do triângulo médio usamos o mesmo raciocínio do calculo da área do paralelogramo, onde devemos usar $2 \times \frac{b.h}{2}$.

Para calcular a área do quadrado original usamos a área do quadrado quatro vezes, e a área do triângulo oito vezes, representando assim a seguinte fórmula:

AQO = $4 \times l.l + 8 \times \frac{b.h}{2}$

Fonte: registro das alunas.

As alunas concluíram que essas relações levaram ao uso da área do quadrado quatro vezes e da área do triângulo pequeno oito vezes, o que equivale à área total do Tangram (quadrado formado pelas sete peças), expresso também a partir da comunicação escrita, expressa na figura acima.

A relação por meio da comparação entre as áreas foi uma estratégia por elas utilizada nesse Episódio, com isso, associaram a área do quadrado à metade da área do triângulo por meio da sobreposição de figuras e esse mesmo procedimento se repetiu para os demais cálculos, concluindo que o quadrado formado pelas sete peças tem área equivalente a quatro quadrados e oito triângulos pequenos.

Portanto, observamos, com base no desenvolvimento e comunicação oral entre Júlia e Amanda que, ao interpretar o problema, consideraram a necessidade do cálculo de algumas áreas específicas e, para isso, apresentaram como alternativas a fórmula do cálculo das áreas do quadrado e do triângulo. Dessa forma, pudemos verificar por meio das observações e da comunicação oral e escrita desses alunos, no decorrer das etapas da pesquisa, que apresentaram uma interação satisfatória, fazendo uso do Tangram, se comunicavam oralmente na discussão da tarefa proposta e na busca de soluções, porém, muitas vezes, apenas dialogavam e não conseguiam explicar, em virtude de desconhecer alguns dos conceitos geométricos envolvidos nos problemas em questão.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

No Episódio 1, no qual o quebra-cabeças Tangram foi utilizado para o reconhecimento de polígonos e congruência, Júlia e Amanda se comunicam interpretando adequadamente o enunciado do problema. Deste modo, reconheceram os polígonos que formam o Tangram e parecem compreender o conceito de congruência de polígonos. Contudo, não deixam isto formalizado em sua comunicação. Tal lacuna na formalização do conceito de congruência de polígonos pode ser consequência de um ensino de Geometria precário, desde os Anos Iniciais. A esta altura da escolarização das referidas alunas, elas deviam estar dominando, também formalmente, a definição e o conceito de congruência de polígonos, o que não ocorreu.

Sobre o desvendamento das curiosidades de Catarina, no Episódio 2, a compreensão de como Júlia e Amanda faziam as representações geométricas dos polígonos e as justificativam oralmente, foi o foco. A construção de um Tangram apenas com dois quadrados e dois triângulos, se constituiu num desafio, que trouxe novas respostas, através das representações do trapézio, do paralelogramo, do retângulo e do triângulo. Por outro lado, as alunas não apresentaram explicações sobre as propriedades dos polígonos, o que mostra que ainda estão no nível de visualização do Modelo de Van Hiele e, mais uma vez, muito aquém do esperado para as suas faixas etárias e ano escolar.

A contextualização do cálculo de áreas, que encontramos no Episódio 3, utilizando duas peças do Tangram, o triângulo pequeno e o quadrado, identificamos a formalização, através das fórmulas da área do triângulo e do quadrado. O mesmo ocorrendo quando explicaram o cálculo da área do paralelogramo. Este aspecto sugere que as alunas compreenderam as fórmulas destas figuras geométricas planas.

Portanto, em suas comunicações orais, podemos identificar uma ausência de formalização para as propriedades dos polígonos, o que seria necessário para o avanço no nível de pensamento geométrico das alunas e, no terceiro episódio, a formalização apareceu com a enunciação das fórmulas, mas foi complementada e enriquecida com as comparações entre as figuras, o que sugere maior capacidade cognitiva das alunas, na resolução deste problema.

CONCLUSÃO

No decorrer de todas as etapas, identificamos que as alunas interagiram significativamente, de acordo com o objetivo de cada problema proposto, se interessaram perante o desenvolvimento e, consequentemente, se comunicaram oralmente em busca de solução. Fatos como esses, reafirma o que aponta César, Oliveira e Teles acerca do planejamento do trabalho desenvolvido em Díades, sendo estes, fatores muito pertinentes no processo de ensino e aprendizagem. Porém, o maior desafio encontrado em cada etapa, foi a estruturação das ideias que remetiam às estratégias de resolução, uma vez que se evidenciava a carência de conhecimentos prévios de Geometria. Esta foi uma limitação na pesquisa. Nesse sentido, a motivação das alunas, desde o início da pesquisa, foi crucial para vencer os medos e apresentarem o desenvolvimento perante suas possibilidades e limitações relacionadas ao conhecimento geométrico. Mediante isso, concordamos com os argumentos de Brown e Walter (2005), quando afirmam que além de conhecimento é também necessária coragem para que todos possam encontrar desafios significativos.

Na última etapa, com a proposta de resolução de problemas geométricos, percebemos que as explicações praticamente baseadas, foram usadas com uma frequência maior pelas alunas, pois suas explicações centravam-se, na maioria das vezes, naquilo que podiam relacionar a algo impregnado ao contexto cotidiano que vivenciam. As explicações matematicamente baseadas só foram identificadas no Episódio 3. Identificamos esse tipo de explicação, quando Júlia e Amanda se basearam no conhecimento matemático que tinham, em relação ao cálculo de áreas, para explicar seu desenvolvimento. Também, analisamos, por meio da comunicação oral entre as alunas, que a co-elaboração por consentimento (GILLY, FRAISSE & ROUX, 1988) foi o tipo de co-elaboração mais utilizado, pois, na maioria das vezes, as respostas apresentadas por uma delas era aceita como verdade para as duas.

Em cada caso, analisamos que as alunas se esforçavam em buscar resoluções coerentes, mas o maior obstáculo para encontrá-las estava na fragilidade de conhecimentos prévios. Percebemos que elas liam e buscavam interpretar o problema juntas, porém por desconhecer conceitos básicos da Geometria, davam respostas relativamente simples, apresentando pouca criticidade frente ao que buscavam. Certamente, esse fato é consequência da cultura de respostas únicas e imediatas para questões ligadas à Matemática, onde poucas vezes se cobra o uso de justificativas mediante ao que se desenvolve no contexto do seu ensino. Aspectos como esses, nos fizeram refletir ainda mais acerca da qualidade do ensino de Geometria no Brasil, que deveria acontecer de forma adequada, propiciando a criticidade dos alunos, de modo que possam argumentar, levantar hipóteses e, a partir disso, construir o conhecimento ao qual deve estar agregado com as diversas áreas da própria Matemática, sobretudo, na resolução de problemas, o que também está de acordo com os argumentos de Rêgo, Rêgo e Vieira (2012) ao tratar sobre a forma como deve acontecer o ensino da Geometria.

A sala de aula é um campo muito rico para investigações, por ser o centro das observações, fatos e acontecimentos, por essa razão, deve ser muito bem aproveitado para um desabrochar de pesquisas pertinentes no campo da Educação Matemática. Nessa pesquisa, identificamos uma série de questões acerca do conhecimento geométrico dos alunos que concluem o Ensino Médio, o que nos trouxe muitas reflexões e questionamentos que poderão ser respondidas futuramente em outros estudos.

Alguns desses questionamentos foram: Que alternativas são viáveis para modificar o fato de os alunos estarem concluindo o Ensino Médio ainda no Nível de Reconhecimento? Essa é uma realidade constante em outras regiões e instituições de Ensino Público no Brasil? Será que a aproximação de diálogos entre Universidade e Escola, com cursos de formação continuada para os professores e Projetos de Pesquisa que envolvam os alunos, seria uma alternativa que os fizesse evoluir em relação ao conhecimento da Geometria?

Entendemos que propor atividades matemáticas as quais despertem o interesse e a curiosidade dos alunos, bem como o trabalho em pequenos grupos, é de grande valia, pois, dessa forma, eles são provocados a pensar mais, refletir e se comunicar, o que sem dúvidas, é muito positivo dentro do processo de ensino e aprendizagem. Com essa pesquisa, identificamos que a resolução de problemas proporciona maior interação, pois os alunos trabalhando em Díades ou mesmo em pequenos grupos, se deparam com uma situação na qual interpretam, buscam estratégias e desenvolvem de acordo com o conhecimento prévio que apresentam. No entanto, a falta desses conhecimentos prévios limita o respectivo desenvolvimento, e se constituiu em limitação em nossa pesquisa.

Portanto, atualmente é indispensável a proposta de resolução de problemas em sala de aula, pois além de incentivar a comunicação, proporciona maior reflexão matemática viabilizada pela troca de informação e interpretação. Concordamos com César, Oliveira e Teles (2004) quando ressaltam que pode o docente promover avanços bem significativos aos alunos, quando oferece novas oportunidades. Por essa razão, é que se faz tão importante a prática de propor problemas significativos nas aulas de Matemática desde os Anos Iniciais, o que pode favorecer na construção do conhecimento matemático ao longo da vida.

REFERÊNCIAS

BISHOP, A. J.; GOFFREE, F. **Perspectives on Mathematics Education (Cap. 8)**. *Org.* B. Christiansen, A. G. Howson e M. Otte e publicado pela editora D. Reidel, em 1986. Tradução: José Manuel Varandas, Hélia Oliveira e João Pedro da Ponte. [S.l.:s.n.].

BOAVIDA, A.; PAIVA, A. L.; CEBOLA, G.; PIMENTEL T. **Resolução de Problemas em Matemática**. In: A experiência matemática no ensino básico. Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular. Lisboa: [s.n.], 2008.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. Brasília, 1997.

BROWN, S.; WALTER. M. **The art of problem posing**. 3ª ed. New York: Routledge, 2005.

CÉSAR, M.; OLIVEIRA, A.; TELES, L. Sharing learning about geometry: peer work in maths classes. In J. Giménez, G.E. FitzSimons, & C. Hahn (Eds.), **A challenge for mathematics education:** toreconcilecommonlities and differences - *CIEAEM54* (p. 339-343). Barcelona: Graó, 2004.

D' AMBRÓSIO, B. A Evolução da Resolução de Problemas no Currículo Matemático. In: SEMINÁRIO EM RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS, I., 2008, São Paulo. **Anais...** São Paulo: UNESP, 2008.

FONSECA, L. Comunicação Matemática na sala de aula - Episódios do 1º ciclo do Ensino Básico. **Educação e Matemática**, nº 103, ESE/IP de Viana do Castelo. Portugal: [s.n.], 2009.

GILLY, M.; FRAISSE, J.; ROUX, J. **Resolucion de problemes en dyades et progrescognitifs chez des enfants de 11 à 13 ans:** dynamiques interactives et socio-cognitives. In: A.-N. PERRET-CLERMONT & NICOLET (Eds.), Interagir et connaître: Enjeux et régulations sociales dans le développement cognitif. Friboug: Del Val, 1988. p. 73-92.

LATAS, J. Despertar o pensamento geométrico com a hierarquização de quadriláteros. **Educação e Matemática:** Revista da Associação de Professores de Matemática. Lisboa, 2012. p. 7-11.

LEIVAS, J. C. P. Percepção e coordenação visual e motora no desenvolvimento do pensamento geométrico. **Educação e Matemática:** Revista da Associação de Professores de Matemática. Lisboa, p. 27-32, 2012.

LEVENSON, Esther. TIROSH, Dina. TSAMIR, Pessia. Mathematically-based and practically-based explanation: which do students preffer? In Tzekaki, M. Kaldrimidou, M. & Sakonids, H. (Eds.), **Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education**, Thessaloniki, Greece: PME, v. 2, p. 305-312, 2009.

MATOS, J. M., & SERRAZINA, M. L. **Didáctica da Matemática**. Lisboa: Universidade Aberta, 1996.

MEDEIROS, K. M.; SANTOS, J. B. Uma Experiência Didática com a Formulação de Problemas Matemáticos. **ZETETIKE:** Cempem - FE - Unicamp, v. 15, n. 28, jul./dez. 2007.

National Council of Teachers of Mathematics. **Principles and Standards for School Mathematics.** Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2000.

NASSER, L.; SANT'ANNA, N. **Geometria Segundo a Teoria de Van Hiele***.* 2 ed. Rev. Rio de Janeiro: IM/UFRJ, 2010.

PESSOA, Paula. Novo Programa de Matemática - Inovações de práticas e aprendizagens. **Educação e Matemática:** Revista da Associação de Professores de Matemática, Ed. 109, 2010.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

RÊGO, R. G. do; RÊGO, R. M. do; VIEIRA, K. M. **Laboratório de ensino de Geometria**. Campinas, SP: Autores associados, 2012.

SOUZA, E. R.; DINIZ, M. I. S. V.; PAULO, R. M.; OCHI, F. H. **A Matemática das sete peças do Tangram**. IME-USP. São Paulo: [s.n.], 1995

VAN de WALLE, J. A. **Matemática no Ensino Fundamental:** formação de professores e aplicação em sala de aula. Tradução: Paulo Henrique Colonese. 6. Ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

YACKEL, E.; COBB, P. Socio mathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. **Journal for Research in Mathematics Education**, 27(4), 458-477, (Traduzido em português de Portugal), 1996. 133

RECEBIDO EM: 10 out. 2018
CONCLUÍDO EM: 13 jun. 2019