VIDYA, v. 39, n. 1, p. 179-194, jan./jun., 2019 - Santa Maria, 2019. **ISSN** 2176-4603

ANÁLISE DOS ESQUEMAS EM AÇÃO DA GRANDEZA VOLUME NO ENSINO SUPERIOR

ASSESSMENT OF THE SCHEMES IN ACTION OF THE VOLUME QUANTITY IN HIGHER EDUCATION

FABIANE DE LIMA RIGHI*
MARIA CECILIA PEREIRA SANTAROSA**
CARMEN VIEIRA MATHIAS***

RESUMO

Neste trabalho, apresentam-se resultados de uma pesquisa exploratória que fez parte de uma dissertação de mestrado apresentada ao Curso de Pós-graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM). O objetivo foi analisar os esquemas em ação da grandeza volume no contexto da formação inicial de professores de Matemática por meio da elaboração e aplicação de um teste cujas situações articularam diferentes formas de representações para serem solucionadas. O público alvo foi composto por alunos da disciplina de Geometria Espacial do Curso de Matemática Licenciatura da referida universidade. Apoiado na Teoria dos Campos Conceituais, o teste apresentou situações de medida, de comparação e de produção, requerendo a articulação entre os quadros geométrico, numérico e das grandezas. Os resultados mostraram que os alunos têm dificuldades em: transformar unidades de medidas, compreender a independência da área e volume com a forma e suas medidas lineares. Também se verificou ênfase no quadro geométrico e numérico como obstáculo para a aprendizagem da grandeza volume, fato este que tem respaldo na forma como a unidade volume é estruturada, voltada ao cálculo dos principais sólidos geométricos e aplicação de fórmulas, sem relação com outras grandezas ou em diferentes situações.

Palavras-chave: Grandeza Volume. Formação Inicial de Professores de Matemática. Teoria dos Campos Conceituais.

ABSTRACT

This paper brings results of an exploratory research which is part of a master's degree dissertation presented to the Mathematics Education and Physics Teaching Postgraduate Course, from Universidade Federal de Santa Maria (UFSM) [Santa Maria State University]. The main goal was analyzing the schemes in action of the volume quantity in the initial formation context of mathematics teachers through the elaboration and application of a test whose situations articulated different forms of representations to be solved. The target audience was students from the Spatial Geometry subject attending the Mathematics Teacher's Degree Program from the above-mentioned university. Supported by Theory of Conceptual Fields, the test presented measurement, comparison and production situations, requiring the articulation among geometric, numerical and the quantity frames. The results pointed difficulties in: transforming measurement units, comprehension of the independence of the area and volume quantities related to the shape and their linear measurements. It was verified an emphasis in the geometric and numeric frames as an obstacle in the learning process of volume as a Quantity, which is supported by the way that the volume measurement is structured, directed only to calculation of the main geometric solids and formula application, without having any relation to other quantities or being presented in different situations.

Keywords: *Volume Quantity. Initial Formation of Mathematics Teachers. Theory of Conceptual Fields.*

* Mestre em Educação Matemática (UFSM). E-mail: lima_righi@hotmail.com. Orcid: https://orcid.org/0000-0002-0107-2415
** Doutor em Ensino de Física (UFRGS). Docente do Departamento de Matemática (UFSM). E-mail: maria-cecilia.santarosa@ufsm.br. Orcid: https://orcid.org/0000-0002-7656-9100
*** Doutor em Matemática (UFRGS). Docente do Departamento de Matemática (UFSM). E-mail: carmen@ufsm.br. Orcid: https://orcid.org/0000-0001-5667-159X

INTRODUÇÃO

Tendo em vista o momento histórico pelo qual passa a educação e a política no Brasil, onde o ensino nas escolas ainda ocorre de forma desigual, o que reflete diretamente nas salas de aula das universidades, faz-se necessário um olhar mais atento por parte dos pesquisadores em educação no intuito de corrigir discrepâncias e aprimorar o nível de formação dos futuros professores de Matemática. O momento não poderia ser mais adequado na medida em que se percebe uma intensa movimentação no cenário das políticas públicas voltadas para a educação, como a proposta da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), o “Novo Ensino Médio” e as reformas curriculares em curso nas universidades brasileiras.

Segundo o Art. 13 da Resolução do Conselho Nacional de Educação Conselho Pleno-CNE| CP, de 2 de julho de 2015, capítulo V, sobre a formação inicial do magistério da educação básica em nível superior: estrutura e currículo,

> os cursos de formação inicial de professores para a educação básica em nível superior, em cursos de licenciatura, organizados em áreas especializadas, por componente curricular ou por campo de conhecimento e/ou interdisciplinar, considerando-se a complexidade dos estudos que os englobam, bem como a formação para o exercício integrado e indissociável da docência na educação básica, estruturam-se por meio da garantia de base comum nacional das orientações curriculares (BRASIL, 2015b, p. 11).

Tendo em vista que a formação do licenciando contempla as atuais exigências, faz-se necessária uma investigação sobre os conhecimentos dos alunos, em especial sobre a grandeza volume, buscando evidenciar a compreensão do seu sentido e não apenas o uso de fórmulas. De acordo com Oliveira (2002), o uso exagerado de fórmulas para compreensão das grandezas geométricas, tem se mostrado ineficaz e gerador de entraves, como a omissão ou o uso inadequado de unidades. Essa afirmação leva à hipótese de que pode haver uso exagerado de fórmulas, ou então, se os alunos descrevem os teoremas e propriedades, mas não os compreendem, significa que eles aprendem e resolvem de forma mecânica. Situações-problema que exijam outros tipos de estratégias, envolvendo diferentes grandezas relacionadas à grandeza volume, como massa, densidade, área, tempo e outras, permitem um aprendizado mais amplo e interdisciplinar ao futuro professor.

Roldán (2003), em pesquisa que teve como sujeitos professores da rede básica, no México, constatou que a maioria deles não conseguia distinguir volume de capacidade, volume e peso e volume e área de um corpo. Portanto, considera-se relevante seu estudo dentro de um curso de graduação em Matemática, pois favorece ao licenciando a aquisição de diferentes significados para o conceito volume, proporcionando diferentes formas de abordagem no sistema de ensino e aprendizagem desse conceito, além de promover a formação interdisciplinar sugerida na legislação.

A concepção de volume como grandeza foi estudada por Oliveira (2002), o qual defende que, analogamente à área, deve-se considerar, no ensino, volume como uma grandeza.

> Assim, o volume de um sólido geométrico aparece como um objeto matemático distinto do sólido geométrico, pois, sólidos diferentes podem possuir o mesmo volume. Também se distingue do número que está associado a uma figura espacial quando se escolhe um sólido unitário para medi-la, pois mudar o sólido unitário

altera a medida de volume, mas o volume da figura permanece o mesmo (OLIVEIRA, 2002, p. 23).

No quadro 1, sintetiza-se o estudo de volumes segundo alguns dos documentos que norteiam a educação no Brasil.

Quadro 1 - Volume segundo os documentos oficiais.

Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL, 1998, p. 129)	Grandezas e Medidas: Para calcular áreas e volumes, o aluno terá contato com uma dimensão da medida que não é obtida por comparação direta, e sim pelo produto de medidas lineares. Para medir outras grandezas, utilizam-se procedimentos em que é preciso realizar uma operação física, não necessariamente geométrica, e que depende da natureza da grandeza envolvida (massa, densidade etc.).
Matriz Referência do Enem (BRASIL, 2012, p. 6)	Competência de área 3: Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e solução de problemas cotidianos. H10 - Identificar relações entre grandezas e unidades de medida. H12 - Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas. H14 - Avaliar proposta de intervenção na realidade utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas. Competência de área 4: Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade. H15 - Identificar a relação de dependência entre grandezas. H16 - Resolver situações-problema envolvendo variação entre grandezas. H17 - Analisar informações envolvendo variação de grandezas para construir argumentação. H18 - Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.
BNCC (BRASIL, 2016b, p. 567)	Grandezas e Medidas: Unidade curricular V (EM15MT05) - Resolver problemas envolvendo volume de sólidos geométricos. Destaca a importância que se façam conexões entre grandezas e medidas, explorando as relações entre outras grandezas.

Fonte: Brasil (1998; 2012; 2016b).

Também se considera que o estudo da unidade volume (BRASIL, 2016b), em cursos de Licenciatura em Matemática, deve adequar-se aos propósitos da Base Nacional Comum Curricular, cuja primeira tarefa de responsabilidade direta da União será a revisão da formação inicial e continuada dos professores para alinhá-las à base.

A experiência da primeira autora, adquirida com os projetos: “O Uso de Recursos Computacionais na Resolução de Problemas da OBMEP” (2014) e “Pré-Cálculo na Transição Ensino Médio/ Ensino Superior” (2015), assim como a pesquisa intitulada “Aprendizagem Significativa na Geometria Espacial Utilizando o GeoGebra” (RIGHI, 2016), motivaram a realização do presente trabalho de investigação, pois observou-se, nestes contextos, dificuldades relacionadas à aprendizagem de conteúdos de Geometria em alunos e professores da Educação Básica e alunos ingressantes da UFSM.

Nesta pesquisa, tem-se como objetivo investigar como se dá o processo de mobilização de esquemas-em-ação da grandeza volume por alunos em formação do curso de Matemática da UFSM. As questões foram propostas dentro da perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais, de Vergnaud (1990).

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Buscando compreender e analisar os conhecimentos implícitos nas condutas de resolução de problemas envolvendo situações diversas, optou-se pela Teoria dos Campos Conceituais, uma teoria psicológica cognitivista, elaborada por Vergnaud (1990), tomando como referência o próprio conteúdo do conhecimento, para estudo do “sujeito-em-situação”. Gérard Vergnaud destaca que, nas disciplinas científicas e tecnológicas, há pouco sentido dizer que um aluno compreendeu um conceito, mas pode-se dizer que é capaz de utilizar nesta ou naquela situação teoremas ou conceitos-em-ação.

As palavras-chave desta teoria são: campo conceitual, conceito, situação, esquema e invariante operatório (teoremas-em-ação ou conceitos-em-ação).

Um campo conceitual é composto e definido pelos *conceitos* nele contidos. Um *conceito*, por sua vez, não pode ser reduzido à sua definição, pois é por meio das situações e dos problemas a resolver que ele adquire sentido. Sendo assim, a constituição de um conceito dependeria de três dimensões do conhecimento, as quais estão inter-relacionadas:

C= {S, I, R}

Em que, de acordo com Moreira (2002):

S= é um conjunto de situações que dão sentido ao conceito, é a referência;

I= é um conjunto de invariantes operatórios, mecanismos utilizados pelo sujeito na resolução do problema (teoremas-em-ação e conceitos-em-ação), é o significado;

R= é um conjunto de representações simbólicas, utilizadas tanto para apresentação como para resolução do problema, é o significante;

Logo, um conceito é constituído por situações de referência, por invariantes operatórios e sistemas de representação simbólica. Diante de uma situação de comparação de volumes entre sólidos constituídos por cubinhos idênticos (situação), a estratégia eleita para o cálculo de volume, bem como os conceitos mobilizados para a resolução (invariantes operatórios), dependerá da compreensão do sólido como uma figura espacial tridimensional (a representação simbólica). Desse modo, observa-se a presença da tríade de Vergnaud para obtenção do conceito de volume de sólidos geométricos.

O teste permitiu investigar quais conceitos-em-ação foram mobilizados pelos acadêmicos. Esses conceitos podem ser representados por meio de números, figuras, fórmulas, unidades de medida, entre outros, visando auxiliar em conjunto com os invariantes operatórios e as diversas situações apresentadas para a obtenção do conceito de volume como grandeza.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A fim de obter coerência com o objetivo proposto, nesta pesquisa, seguiram-se os pressupostos da pesquisa qualitativa, cuja análise deu-se por meio da descrição e interpretação dos dados. De acordo com Malheiros (2011), as pesquisas qualitativas partem do princípio de que a realidade não existe por si só, mas na interpretação que as pessoas fazem da realidade, cabendo ao pesquisador identificar as causas e consequências estabelecidas por meio dos dados coletados e a relação entre eles.

Quando há poucos conhecimentos acerca do tema a ser estudado, recomenda-se o estudo exploratório. Sendo assim, optou-se por esse tipo de abordagem, visto que existem poucos trabalhos desenvolvidos sobre esse assunto, especialmente em cursos de Licenciatura em Matemática.

O teste foi composto por oito questões envolvendo diferentes situações sobre volumes e aplicado aos quatorze alunos presentes, matriculados na disciplina de Geometria Espacial, turno noturno da referida universidade, no segundo semestre de 2017.

A análise das resoluções teve como referência a Análise Textual Discursiva (ATD) (MORAES; GALIAZZI, 2016), a qual se concretiza a partir de um conjunto de documentos denominado “corpus”.

Estes, segundo as autoras, representam as informações da pesquisa, em que devem ser selecionadas somente as informações relevantes.

Para analisar os esquemas em ação na aprendizagem conceitual da grandeza volume, pelos alunos envolvidos na pesquisa, levou-se em consideração a classificação em quadros dada ao conceito de área por Douady e Perrin-Glorian (1989): quadro numérico, quadro geométrico e quadro das grandezas. Assim como a adaptação desse quadro para o estudo de volumes, apresentado por Figueiredo (2013).

- O quadro numérico refere-se ao conjunto dos números reais não negativos;
- O quadro geométrico, para o conceito de área, é constituído pelas figuras que têm superfície no mundo físico, enquanto que, para o estudo de volumes, é constituído pelos objetos geométricos tridimensionais;
- O quadro das grandezas são as classes de equivalências das figuras planas de mesma área e pode ser representado pelo número e pela unidade de medida, por exemplo, 4, e no caso de volumes, as classes de equivalência dos sólidos geométricos de mesmo volume (16 cm^3, por exemplo)

Segundo Douady e Perrin-Glorian (1989) *apud* Figueiredo (2013), as concepções geométricas e numéricas relacionadas à área, por exemplo, são desenvolvidas de forma isolada pelos alunos, quando não é apreendida apenas uma delas.

Figueiredo (2013) levantou a seguinte hipótese:

> O aluno não estabelece uma distinção entre o sólido e o volume, ou seja, não consegue entender que sólidos distintos possam ter o mesmo volume, mobilizando uma concepção geométrica; bem como não estabelecem distinção entre o volume e suas medidas, obtidas em função da escolha de uma unidade de volume, manifestando uma concepção numérica, ou seja, o aluno considera volume como sendo um número abstrato, sem unidade e só os aspectos relevantes para o cálculo são considerados (FIGUEIREDO, 2013, p. 23).

Nesse sentido, adotou-se, nesta pesquisa, o esquema conceitual de quadros construídos por Douady e Perrin-Glorian (1989), considerando o conceito de volume como objetos do quadro das grandezas, os sólidos correspondem ao quadro geométrico, e os números reais positivos referentes às medidas das grandezas correspondem a objetos do quadro numérico. Como argumentos, tem-se que:

- do mesmo modo que ocorre nas áreas, sólidos diferentes podem ser equivalentes em relação ao volume (distingue-se sólido de volume);
- a mudança de unidade de volume provoca mudança na medida do volume (o número), mas não no volume enquanto grandeza;
- o par número/unidade é uma maneira de expressar o volume como grandeza.

QUESTÕES PROPOSTAS E ANÁLISE DAS RESPOSTAS

A seguir, serão apresentadas as questões com suas categorizações. Primeiramente, analisaram-se as representações externalizadas pelos alunos, de acordo com a classificação em quadros de Douady e Perrin-Glorian (1989). Na sequência, buscou-se analisar os esquemas em ação mobilizados pelos alunos, ou seja, as situações e os invariantes operatórios. Chama-se esquema "a forma estrutural da atividade", a organização invariante da atividade do aluno sobre uma classe de situações. Quanto aos invariantes operatórios (teorema-em-ação e conceito-em-ação), tendo em vista que o material analisado foi proposto na forma de teste, ou seja, não houve verbalização explícita por parte dos alunos de proposições e/ou teoremas, serão classificados como conceitos-em-ação.

A primeira questão foi inspirada em Figueiredo (2013), com a diferença que se optou por fornecer as duas massas de modelar para cada um dos alunos envolvidos na pesquisa. O objetivo, além do principal, que é investigar os esquemas em ação dos alunos em relação à grandeza volume, é também relacionar a grandeza volume com outras grandezas (massa, densidade), conceitos inter-relacionados com a Física e a Química, presentes nas provas do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e na BNCC.

Questão 1 - Você tem em mãos dois pedaços iguais de massa de modelar, com um deles, forme uma esfera e com o outro, uma pizza. Marque a alternativa que julgar correta e justifique sua resposta.

a) Os dois objetos formados têm o mesmo volume;
b) A esfera tem volume maior que a pizza;
c) A esfera tem volume menor que a pizza.

Essa questão não envolveu o quadro numérico, apenas o quadro das grandezas e, com ela, procurou-se investigar se os alunos relacionavam a grandeza volume com outras grandezas, como massa e densidade. A maioria dos alunos (nove), ao manipular as massas de modelar em formato de esfera e pizza, demonstrou, com suas respostas, compreender volume como uma grandeza, pois citaram massa e/ou densidade como justificativa, respondendo que os dois objetos têm o mesmo volume. Porém, em algumas respostas (cinco), independente da resposta estar correta ou não, ficou evidente a importância dada à forma geométrica, indicando que alguns alunos sentiam dificuldades em separar a grandeza volume do "formato" (quadro geométrico).

Os alunos que erraram a questão enfatizaram o quadro geométrico ao citarem como justificativas os diferentes raios e alturas das figuras por eles modeladas. Conforme descrito no quadro 2.

Quadro 2 - Análise da Situação e Invariantes Operatórios - Questão 1.

Tipo de Situação	Conceitos-em-ação
Medida	- "Volume está ligado à quantidade de material, independe da forma." (4 alunos) - "O volume depende do raio. A pizza tem raio maior que a esfera, raio maior implica volume maior." (2 alunos) - "Os objetos têm massas iguais, portanto mesmo volume." (6 alunos) - "A pizza é plana, temos como medir apenas a área e não o volume." (1 aluno) - "Ambas as massas têm a mesma variação de altura quando colocadas em um balde com água." (1 aluno)

Fonte: construção do autor.

Entre os conceitos-em-ação descritos, seis alunos descreveram que "ambos os objetos têm massa igual e, portanto, mesmo volume", possivelmente mobilizando o teorema-em-ação correto: "sólidos de mesma massa e mesma densidade têm o mesmo volume". Por outro lado, houve alunos que consideraram volume ligado apenas à "quantidade" de material, porém, no contexto da situação proposta, o conceito-em-ação está errado, pois "quantidade" e "massa" não são sinônimos.

Outros dois alunos apresentaram conceitos-em-ação equivocados para a situação proposta ao relacionarem volume com o raio dos objetos formados. Enfatizaram o quadro geométrico e não compreenderam volume como grandeza. Do mesmo modo, o aluno que considerou a “pizza” formada por ele como plana, portanto sem volume, destacou o formato geométrico. O possível teorema-em-ação (errôneo) seria: “volume depende da forma da figura geométrica”.

A segunda questão foi retirada de Paraná (2004, p. 32). E, assim como na primeira questão, além do objetivo principal da pesquisa, também se pretendeu relacionar a grandeza volume com outras grandezas (temperatura, dilatação...) investigando os invariantes operatórios disponibilizados diante desse tipo de situação. Sendo assim, faz parte do quadro das grandezas, pois independe do objeto (quadro geométrico), e a questão não descreve nenhuma medida (quadro numérico).

Questão 2 - Um corpo esférico flutua em um líquido. Ocorrendo variação de temperatura apenas do corpo esférico: a parte emersa da esfera aumentará, não sofrerá alteração ou diminuirá de tamanho? Justifique.

A questão exigia apenas o conhecimento do quadro das grandezas, e nove alunos demonstraram relacionar a grandeza volume com as grandezas temperatura e dilatação, compreendendo volume como uma grandeza. Outros cinco alunos erraram a questão por não compreenderem a relação entre um sólido e a variação em sua temperatura, conforme os conceitos-em-ação descritos no quadro 3.

Quadro 3 - Análise da Situação e Invariante Operatório - Questão 2.

Tipo de Situação	Conceitos-em-ação
Comparação	- “Volume aumenta com o aumento da temperatura.” (3 alunos) - “Variação do volume depende das características do material.” (3 alunos) - “Objeto irá se dilatar com o aumento da temperatura e se compactar com seu resfriamento.” (1 aluno) - “A dilatação do material depende da intensidade da temperatura.” (3 alunos) - “O volume continuará o mesmo.” (2 alunos) - “Ocorrerá diminuição da parte emersa se a temperatura aumentar” (2 alunos).

Fonte: construção do autor.

A questão 2 classifica-se como uma situação de Comparação entre dois sólidos (antes e após o aquecimento). Verificou-se que dez alunos descreveram conceitos-em-ação considerados corretos, pois, apesar de não citarem diretamente a dilatação volumétrica, pelo menos um dos três fatores (o tipo de material, a variação da temperatura e o volume inicial) foi revelado. Outros quatro alunos apresentaram conceitos-em-ação equivocados conforme descrito no quadro 2.

A questão 3 encontra-se em Paiva (2009, p. 224) e classifica-se como uma situação de Medida e Transformação de Unidades que permite a articulação entre os quadros geométrico, numérico e das grandezas. Ao calcular o volume do recipiente cúbico, o aluno passa do quadro geométrico para o quadro numérico e, ao reconhecer o balde como unidade de medida, passará para o quadro das grandezas.

Questão 3 - Enche-se com água um recipiente cúbico de metal cuja aresta mede 120 cm. Para isso, usa-se um balde de 21600 . Então, o número de baldes necessário para encher o recipiente é? Podemos dizer que a quantidade de baldes que você encontrou pode ser considerada como o volume do recipiente? Justifique.

A referida questão exige a articulação dos três quadros, e doze alunos acertaram a resposta, quatro deles fizeram o uso do quadro numérico e geométrico, transformando a medida do volume de centímetros cúbicos para baldes, reconhecendo "balde" como unidade de medida, passando para o quadro das grandezas. Outros três alunos, apesar de responderem corretamente, deram ênfase ao uso de fórmulas geométricas (altura x largura x profundidade ou V= área da base x altura), ou seja, quadro geométrico e quadro numérico. Enquanto seis alunos utilizaram-se apenas do quadro numérico, prevalecendo este sobre os demais, visto que apenas cinco alunos passaram para o quadro das grandezas (Quadro 4).

Quadro 4 - Análise da Situação e Invariante Operatório - Questão 3.

Tipo de Situação	Conceitos-em-ação
Medida e transformação de unidades	- "O volume do balde é 1728.000 e não a quantidade de baldes." (1 aluno) - "Volume é altura x largura x profundidade, igual a 1728000e não a quantia de baldes." (2 alunos) - "Foi considerada a capacidade de 80 baldes e não o volume de 80 baldes, volume é diferente de capacidade." (1 aluno) - "Volume do cubo é dado em função da aresta, e balde não é unidade de medida." (2 alunos) - " O número de baldes preenche o volume do recipiente." (8 alunos)

Fonte: construção do autor.

Classifica-se como uma situação de medida que exigiu que os alunos calculassem o volume de um recipiente cúbico e o transformassem em unidade de medida não usual (número de baldes). Todos os alunos calcularam corretamente o volume do recipiente cúbico, indicando domínio do conceito-em-ação referente ao cálculo do volume do cubo. Apenas oito alunos concordaram, porém não justificaram que os volumes em centímetros cúbicos e o número de baldes tratavam-se do mesmo volume, possivelmente indicando o teorema-em-ação: "o volume como grandeza independe do número, o número pode mudar e o volume continuar o mesmo".

Outros seis alunos descreveram conceitos-em-ação que evidenciaram:

- Volume relacionado às dimensões (altura, comprimento e largura) de sólidos;
- Volume diferente de capacidade, portanto cm^3 diferente de número de baldes;
- Volume depende da aresta do cubo.

Conforme analisado anteriormente nas representações desses alunos, a ênfase no quadro geométrico e numérico indica que a maioria apresenta dificuldades em compreender volume como grandeza.

A questão 4 foi adaptada de Brasil (2016a).

Questão 4 - Uma indústria de perfumes embala seus produtos, atualmente, em frascos esféricos de raio R, com volume dado por $\frac{4}{3}\pi R^3$. Observou-se que haverá redução de custos se forem utilizados frascos cilíndricos com raio da base $\frac{R}{3}$, cujo volume será dado por $\pi\left(\frac{R}{3}\right)^2 * h$ sendo h a altura da nova embalagem. Para que seja mantida a mesma capacidade do frasco esférico:

a) A altura do frasco cilíndrico (em termos de R) deverá ser igual a:
b) O que você entende por volume e capacidade?

Essa questão permitia ao aluno igualar dois sólidos de formatos diferentes (esférico e cilíndrico), mas com a mesma capacidade. Todos acertaram a resposta do item a, que exigia apenas o cálculo numérico, visto que eram fornecidas as fórmulas, e quatro alunos apresentaram o desenho das figuras. Já no item b, houve equívocos relacionados ao significado de volume e capacidade, indicando que alguns alunos não mobilizavam a ideia de independência do volume (quadro das grandezas) em relação ao objeto (quadro geométrico). A análise do item b, referente aos invariantes operatórios é apresentada no quadro 5.

Quadro 5 - Análise da Situação e Invariante Operatório - Questão 4.

Tipo de Situações	Conceitos-em-ação
Comparação	- "Volume é o recipiente, capacidade é o quanto cabe dentro do recipiente." (2 alunos) - "Ambos têm o mesmo significado." (2 alunos) - "Volume é a quantidade de massa que cabe no recipiente, capacidade é o local onde vai a masas." (2 alunos) - "Volume é a parte de fora mais parte de dentro, capacidade é o que cabe dentro." (2 alunos) - "Se o sólido for maciço, o volume é igual à capacidade." (1 aluno) - "Volume é a densidade do material dividido pela massa, capacidade é armazenar o volume." (1 aluno) - "Volume é o valor máximo que se pode encher um objeto." (1 aluno) - "Volume é o espaço ocupado, capacidade é o quanto consegue preencher."(2 alunos)

Fonte: construção do autor.

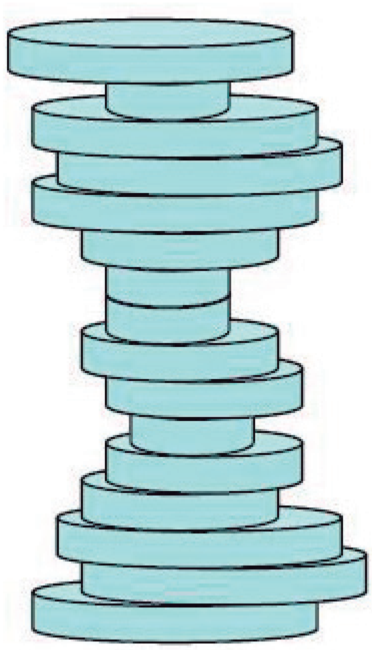
Classifica-se como uma situação de Comparação entre sólidos diferentes (esfera e cilindro) com volumes iguais. Como o enunciado forneceu as fórmulas de volume destes sólidos, não foram citados conceitos-em-ação referentes ao cálculo numérico (item a).

No entanto, no item b, perguntava-se o que o aluno entendia por volume e capacidade. Surgiram diferentes conceitos-em-ação (que foram descritos anteriormente no quadro 4). Nessa situação, dois alunos responderam que ambos têm o mesmo significado, sugerindo o teorema-em-ação: "o volume de um sólido geométrico é o mesmo que o volume interno deste sólido", três alunos não responderam, enquanto nove alunos não compreenderam volume e capacidade como uma única grandeza, conforme os conceitos-em-ação descritos anteriormente no referido quadro.

Observa-se que, quando se menciona capacidade, geralmente refere-se àquilo que o objeto consegue transportar, e, normalmente, essa noção é usada para líquidos. Por exemplo, a quantidade de líquido (ou areia) que uma garrafa consegue transportar é uma indicação da sua capacidade. Logo, é igual ao volume interno de um recipiente, pois assume a forma desse recipiente. Segundo Oliveira (2002), no *contexto matemático*, a capacidade é volume, pois os sólidos estudados têm espessura ínfima.

Na questão 5, que se teve como referência Anwandter-Cuellar (2008), trata-se de uma situação de Produção que permite observar se o aluno mobiliza a ideia de independência do volume (quadro das grandezas) em relação ao objeto (quadro geométrico).

Questão 5 - O empilhamento abaixo foi construído a partir de cilindros de 2 cm^3, 4 cm^3, 8 cm^3, respectivamente. Construa sólidos com 1/3 do volume deste empilhamento. Saiba que os cilindros têm a mesma altura, mas apresentam variação de raios.



Os alunos deveriam construir sólidos com um terço do volume da pilha de cilindros apresentada, mobilizando a relação de independência do volume em relação ao objeto. Ao utilizarem um instrumento de medida diferente do convencional (os próprios cilindros), mostrariam compreender a independência do volume (quadro das grandezas) com o sólido (quadro geométrico).

Oito alunos realizaram o primeiro cálculo corretamente, calcularam $\frac{1}{3}$ de 84 cm^3, porém, ao formarem novas combinações de com os cilindros da pilha, desenharam um cubo de 28 cm^3. Pode ter ocorrido erro de interpretação do enunciado ou os alunos apresentam o cubo como referência para calcular volumes, haja visto que na escola e universidade o cubo é a unidade padrão utilizada. Portanto, esses alunos evidenciaram apenas o quadro geométrico e o quadro numérico (Quadro 6).

Quadro 6 - Análise da Situação e Invariante Operatório - Questão 5.

Tipo de Situação	Conceitos-em-ação
Produção e medida	$V = \frac{\pi * R^2 * h}{3}$ Fórmulas do paralelepípedo e do cubo.

Fonte: construção do autor.

Nessa situação de produção e medida, os alunos deveriam construir sólidos diferentes do exposto, com um terço do seu volume, porém deveriam utilizar como unidade de medida os próprios cilindros. Observa-se que apenas dois alunos utilizaram os próprios cilindros como instrumento de medida, indicando possivelmente o teorema-em-ação: "existe independência entre o volume e a forma do sólido".

Os demais alunos descreveram conceitos-em-ação, indicando conhecimentos sobre as fórmulas do paralelepípedo e do cubo, pois não construíram os sólidos utilizando os cilindros conforme a questão exigia. Como não utilizaram os próprios cilindros e/ou não souberam o que fazer com os restantes, possivelmente esses alunos não compreenderam a independência da grandeza volume com a figura geométrica, ou então estavam acostumados a trabalhar cálculos de volume utilizando o cubo, pois é dessa forma que o conceito volume é introduzido aos alunos na escola básica.

A questão 6 foi adaptada a partir de um livro didático (IEZZI, 2010, p. 441). Retirou-se a figura da escada da questão original e alterou-se o formato do degrau, passando de um prisma de base triangular para um paralelepípedo retângulo.

Questão 6 - Uma escada de concreto maciço é formada por seis blocos idênticos em forma de paralelepípedo retângulo. A altura da escada é de 60 cm, seu comprimento é de 90 cm e sua largura é 1 m. Quantos litros de concreto foram utilizados na construção da escada?

Essa questão exigia domínio do quadro geométrico para visualizar os seis paralelepípedos que formavam os degraus da escada, o quadro numérico para realizar os cálculos, e o quadro das grandezas para compreender a transformação de unidades de volume em unidades de capacidade (Quadro 7).

Três alunos desenharam a escada com as medidas corretas e realizaram os cálculos corretamente; dois deles arredondaram a resposta para 360 litros e o outro não lembrava como transformar centímetros cúbicos em litros, deixando a resposta na primeira unidade de medida. Destes três, apenas um aluno encontrou o valor exato do volume em centímetros cúbicos, porém não lembrava como transformá-lo em litros.

Os demais alunos apresentaram dificuldades de visualização para desenhar as medidas dos degraus da escada (quadro geométrico), o que pode ter levado ao erro no processo de transformação de medidas de volume em capacidade (quadro numérico).

Quadro 7 - Análise da Situação e Invariante Operatório - Questão 6.

Tipo de Situação	Conceitos-em-ação
Medida e transformação de unidades	- $1m^3 = 1000l$ -$0{,}36m^3 = 360l$ - $1l = 10cm^3$ -$360000cm^3 = 360000l$ -$3600cm^3 = 3{,}6m^3 = 3{,}6l$

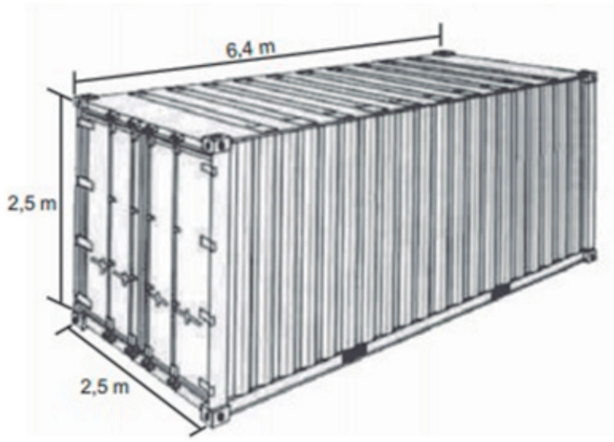
Fonte: construção do autor.

Classifica-se como uma situação de Medida e Transformação de unidades, em que apenas três alunos apresentaram o conceito-em-ação correto relacionado à transformação da unidade metros cúbicos para litros (ou $0{,}36m^3 = 360l$).

Os demais alunos apresentaram conceitos-em-ação errados, referentes a transformações de unidades. Dois alunos apresentaram cálculos de comprimento e área em vez de volume.

A seguir, apresenta-se a questão 7, a qual se trata de uma adaptação de Brasil (2015a).

Questão 7 - Uma carga de contêineres, idênticos ao modelo apresentado na figura 1, deverá ser descarregada no porto de uma cidade. Para isso, uma área retangular de 10 m por 32 m foi cedida para o empilhamento desses contêineres (figura abaixo).



As normas do porto em questão exigem que os contêineres devam ser empilhados de forma a não sobrarem espaços, nem ultrapassarem a área delimitada. Após o empilhamento total da carga e atendendo à norma do porto:

a) qual a altura mínima (em contêineres) a ser atingida pela pilha de 100 contêineres?

b) escreva o comprimento, a largura e a altura (em números de contêineres).

c) existe diferença em escrever o volume em m^3 ou em números de contêineres? Justifique sua resposta.

A questão original solicitava a altura mínima a ser atingida pela pilha de 100 contêineres, quando empilhada na área delimitada, porém em metros. No entanto percebeu-se a necessidade de alterar a pergunta original e solicitar a resposta em números de contêineres com o intuito de verificar se os alunos compreendem que a unidade de volume não precisa ser a usual, ou seja, que “a grandeza volume independe da unidade escolhida”. Esse é um dos conceitos em ação que o aluno deverá mobilizar para resolver a questão.

A questão exigia a articulação entre os quadros geométrico e numérico, pois era preciso produzir um sólido com dimensões diferentes do inicial e, ao alterar as unidades de medida para número de contêineres, passariam a compreender que a mudança na unidade de medida não alteraria o volume, compreendendo volume como grandeza. Cinco alunos contemplaram os três quadros ao reconstruírem a nova pilha de contêineres com outro formato, realizando os cálculos corretamente e respondendo ao item c. Isso justifica que, para esses alunos, não havia diferença em escrever a unidade em metros cúbicos ou contêineres, evidenciando a compreensão de volume como grandeza.

Oito alunos conseguiram construir nova pilha de contêineres, porém com as mesmas unidades iniciais, o que pode evidenciar a não aceitação de que o volume possa ter unidades não usuais, isto é, a não compreensão da grandeza volume (Quadro 8).

Quadro 8 - Análise da Situação e Invariante Operatório - Questão 7.

Tipo de Situação	Conceitos em ação
Produção e Transformação de Unidades	- "Não há diferença se tiver medida para transformação." (2 alunos) - "A unidade de volume é m^3" (4 alunos) - Não há diferença em dizer m^3 ou número de contêiners." (5 alunos)

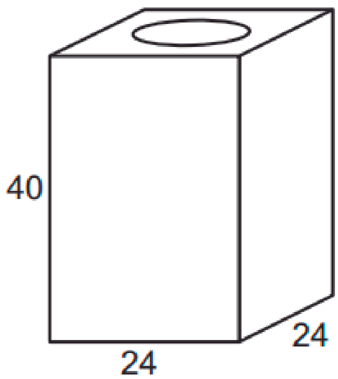
Fonte: construção do autor.

Em geral, os alunos apresentaram conceitos-em-ação relacionados ao cálculo de áreas retangulares, produzindo o novo sólido com formato diferente do original, primeiramente calculando a quantidade de contêineres necessária para cobrir a área destinada à armazenagem (10 m por 32 m). Cinco alunos concordaram que não havia diferença quanto a responder em metros cúbicos ou em número de contêineres, demonstrando compreenderem volume como grandeza e, possivelmente, assimilando o seguinte teorema-em-ação: "existe independência do volume com a forma do sólido e com a unidade de medida".

Três alunos descreveram conceitos-em-ação favoráveis à dependência das unidades de medidas tradicionais para o cálculo de volumes. Do mesmo modo, outros dois alunos consideraram essencial que houvesse uma "medida" para transformação, ou seja, uma medida do sistema internacional. Outros três alunos deixaram a questão em branco. Portanto, considera-se que houve dificuldade por parte da maioria em aceitar unidades não usuais, que é parte do processo de compreensão de volume como grandeza.

A última questão (BRASIL, 2016a) classifica-se como situação de Produção de sólido com volume igual a um sólido dado, ou seja, o aluno deve produzir uma nova lata de tinta aumentando a base da primeira em 25% e reduzindo o valor da altura desta, de modo que seus volumes permaneçam iguais.

Questão 8 - Uma lata de tinta, com a forma de um paralelepípedo retangular reto, tem as dimensões em centímetros dadas de acordo com a figura. Produza uma nova lata, com o mesmo formato e volume, de tal modo que as dimensões de sua base sejam 25% maiores que as da lata atual.



Para obter a altura da nova lata, a altura da lata atual deve ser reduzida em:

a) 14,4% b) 20,0% c) 32,0% d) 36,0% e) 64,0%

Nessa questão, três alunos relacionaram corretamente o quadro geométrico, numérico e das grandezas, identificando a lata de tinta como paralelepípedo retângulo, realizando os cálculos necessários para produzir uma nova lata com dimensões diferentes e mesmo volume, verificando que sólidos diferentes podem ter volumes iguais, passando para o quadro das grandezas. Oito alunos apresentaram erros relacionados ao quadro numérico e dificuldades de interpretação, pois a questão pedia o valor da “redução” na altura da primeira lata. Destes, seis alunos não subtraíram as respectivas alturas para então calcular a redução e responder à pergunta inicial. Classifica-se como Situação de Produção de sólido com volume igual a um sólido dado (Quadro 9).

Quadro 9 - Análise da Situação e Invariante Operatório - Questão 8.

Tipo de Situação	Conceitos-em-ação
Produção	Fórmulas do Paralelepípedo e porcentagem.

Fonte: construção do autor.

Verificou-se que os três alunos que acertaram a questão compreendiam a concepção de volume relacionado com sua tridimensionalidade, pois calcularam as dimensões da base da nova lata e, consequentemente, a nova altura, de modo que seus volumes permanecessem iguais. Utilizaram cálculos de porcentagem individualmente para cada dimensão da nova lata e, por meio do princípio multiplicativo, verificaram que os volumes continuavam iguais.

Dos nove alunos que erraram a questão, seis apresentaram erro de interpretação e/ou erro numérico. Enquanto outros dois alunos adotaram concepção linear de volume, mobilizando o teorema-em-ação errado de que o volume de um sólido se altera na mesma proporção que seu comprimento, ou então, que, se a área da base aumentar 25%, então cada aresta também deveria aumentar 25%.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, procurou-se investigar quais esquemas-em-ação, relacionados à grandeza volume, são externalizados por licenciandos do curso de Matemática da Universidade Federal de Santa Maria, por meio de teste envolvendo diferentes tipos de situações. As situações problema foram selecionadas, pois requerem a articulação entre diferentes formas de representação matemática para serem solucionadas, permitindo, dessa forma, verificar de que maneira os alunos distinguem e articulam conhecimentos oriundos dos quadros: geométrico, numérico e das grandezas.

Evidenciou-se ênfase no quadro geométrico e/ou numérico, resultando em maior dificuldade na compreensão da grandeza volume por parte dos alunos. Também se destacam dificuldades para calcular volume com medidas não usuais, assim como transformações de medidas de volume em medidas de capacidade. O aluno, ao utilizar suas representações para cada situação, externalizou deficiências de aprendizagem oriundas tanto da escola como da universidade.

Ao mobilizarem seus esquemas para a aprendizagem da grandeza volume, houve alunos que apresentaram dificuldades em compreender a independência da grandeza volume com o seu formato, evidenciando ênfase no quadro geométrico e/ou quadro numérico, fato este que tem respaldo na forma como a unidade volume é estruturada na universidade, de forma axiomática e voltada para o cálculo dos principais sólido geométricos. Já quanto à relação da grandeza volume com grandezas físicas e/ou químicas, considera-se que o grupo de alunos, em sua maioria, apresentou conceitos-em-ação corretos, relacionando volume e temperatura; volume e massa e/ou densidade.

Considera-se que o estudo de diferentes significados para o conceito volume é relevante em cursos de licenciatura, para que haja compreensão do seu sentido, desvinculando o uso exclusivo de fórmulas para sólidos geométricos. Observa-se que foi oportunizada aos discentes a visualização dos conceitos com situações vivenciadas no cotidiano. Acredita-se que as questões selecionadas foram satisfatórias nesse sentido, pois trataram-se de exemplos que continham elementos como: escada, contêiner, baldes, massa de modelar, pizza etc. Tais situações, mesmo sem recursos manipuláveis, podem ser trabalhadas com a vivência dos alunos. Nesse sentido, os licenciandos puderam sair do paradigma de estudar os conceitos destacados apenas com sólidos, sem nenhuma função e trazer a ideia de que "Matemática está em tudo".

O valor desta pesquisa vai ao encontro das mudanças que se espera no cenário educacional do Brasil, aliando a teoria à prática profissional, por meio da divulgação de pesquisas em ensino de matemática desenvolvido nas academias. A aplicabilidade do ensino, fundamentado em teorias de aprendizagem são de extrema importância, especialmente na formação inicial, de forma a haver um consenso no "ensinar a ensinar". De fato, a universidade necessita formar professores cada vez mais aptos para atuar em diferentes cenários, em que as políticas públicas (ou a falta destas) mudam de governo em governo e interferem diretamente na qualidade da educação no Brasil.

REFERÊNCIAS

ANWANDTER-CUELLAR, N. **Etude de conceptions d'elèves à propos du concept de volume**. Mémoire de master - 2 HPDS (Histoire Philosophie et Didactique des Sciences) - Université Montpellier 2, 2008.

BALTAR, P. Enseignemente et apprentissage de la notion d'aire de surface planes: une étude de l1aquisition des relations entre les longueurs et les aires au college. 1996, 352p. Tese (Doutorado em Didática da Matemática). Université Joseph Fourier, Grenoble, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Matriz de Referência para o Enem** 2012. Brasília: INEP/MEC. Disponível em: https://bit.ly/2wlUaKN. Acesso em: 14 ago. 2017.

______. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Banco de dados Enem- Prova 2015**. Brasília INEP/MEC. 2015 a. Disponível em: http://portal.inep.gov.br/provasegabaritosenem. Acesso em: 9 set. 2017.

______. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Banco de dados Enem- Prova 2016**. Brasília INEP/MEC. 2016 a. Disponível em: http://portal.inep.gov.br/provasegabaritosenem. Acesso em: 9 set. 2017.

______. Ministério da Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2016b. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acesso em: 10 maio 2017.

______. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Conselho Pleno. **Resolução nº 2/2015**. Define as Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação inicial em nível superior (cursos de licenciatura, cursos de formação pedagógica para graduados e cursos de segunda licenciatura) e para a formação continuada. Brasília, DF: CNE, 2015b.

DOUADY, R; PERRIN-GLORIAN, M. J. Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. **Educational Studies in Mathematics**. v. 20, n. 4, p. 387-424, 1989

FIGUEIREDO, A. P. **Resoluções de problemas sobre a grandeza volume por alunos do ensino médio**: um estudo sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais. 2013.182 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE, 2013.

IEZZI, G. *et al.* **Matemática volume único**: Atual, 2010, 687p.

MALHEIROS, B. T. **Metodologia da Pesquisa em Educação**. 2. ed. Rio de janeiro: LCT, 2011.

MOREIRA, M. A. A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área. **Investigações em ensino de ciências**, v. 7, n. 1, p. 7-29, 2002. Disponível em: https://bit.ly/2KA8yMv. Acesso em: 22 fev. 2017.

MORAES, R; GALIAZZI, M. C. **Análise Textual Discursiva**. Ijuí: Unijuí, 2016.

PARANÁ, D. N. da S.; **Física**: termologia, óptica e ondulatória. 6. ed. São Paulo: **Ática,** 2004. 2 v.

PAIVA, M. **Matemática Ensino Médio**. São Paulo: Moderna, 2009.

ROLDÁN, M. S. Algunos objetos mentales relacionados com El concepto volumen de maestros de primaria. México. **Revista Mexicana de investigación educativa**. [online]. 2003. vol. 8, n. 018. p. 447-478. ISSN 1405-6666. Disponível em: https://bit.ly/2z2fV96. Acesso em: 25 fev. 2017.

RIGHI, F.L. **Aprendizagem Significativa na Geometria Espacial utilizando o GeoGebra.** 2016. 69f. Monografia (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de Santa Maria, RS. 2016.

VERGNAUD, G. **La théorie des champs conceptuels.** Recherches en Didactique des Mathématiques - RDM, v. 10, n. 2, 3. p. 133-170, Grenoble, 1990.

RECEBIDO EM: 26 set. 2018
CONCLUÍDO EM: 07 jun. 2019