VIDYA, v. 38, n. 1, p. 237-256, jan./jun., 2018 - Santa Maria, 2018. **ISSN** 2176-4603

COMPREENDENDO OS NÚMEROS COMPLEXOS POR MEIO DE UMA ESTRATÉGIA DIDÁTICA PARA PROMOVER A APRENDIZAGEM ATIVA

UNDERSTANDING COMPLEX NUMBERS BY MEANS OF A DIDACTIC STRATEGY TO PROMOTE ACTIVE LEARNING

CASSIANO SCOTT PUHL*
ISOLDA GIANNI DE LIMA**

RESUMO

Este artigo apresenta uma estratégia didática inspirada no *Peer Instruction,* um método de aprendizagem por pares proposto por Eric Mazur. A proposta foi planejada para uma turma de terceiro ano do Ensino Médio, e aplicada com o objetivo de possibilitar a compreensão de conceitos relacionados aos números complexos e suas operações básicas. Para isso, consideram-se ações de pensamento dos estudantes em atividades de discussão e interação em grupo. Os princípios da aprendizagem ativa fundamentaram a criação desta estratégia, na qual o estudante é o principal sujeito: participativo, dialoga com colegas e usa conhecimentos prévios em processos reflexivos para a compreensão de novos saberes. Durante a aplicação, criou-se um ambiente favorável à reflexão e ao compartilhamento de conhecimentos entre os estudantes e desses com o professor, cujo papel foi o de intervir sempre que foi requisitado ou considerado necessário. Os resultados obtidos com a prática superaram as expectativas iniciais, conforme dados oriundos de observações e de registros e relatos de estudantes, que demonstraram o alcance dos objetivos de aprendizagem. Além da aprendizagem ativa de números complexos, a estratégia também contribuiu para o desenvolvimento de habilidades como argumentação, criticidade e questionamento reflexivo.

Palavras-chave: Números Complexos. Aprendizagem Ativa. *Peer Instruction*. Ensino Médio.

ABSTRACT

This article presents an active learning strategy inspired by the Peer Instruction, which is a learning method developed by Eric Mazur. The strategy was proposed for high school senior students, aiming at developing understanding in mathematic concepts and in basic operations with complex numbers. Said strategy considers students' mental structures and proposes activities that involve them in group discussions and interactions. Principles of active learning also grounded its creation, in which the student interacts as an active subject, dialogues with classmates and uses their mental structures for the comprehension of new concepts. When applied, the strategy provided a reflective environment and exchanges of knowledge, mainly in interactions between students, and with the teacher, whenever their intervention was necessary. The results of the experiment exceeded initial expectations, as evidenced by observations, records and reports of students, demonstrating the achievement of the learning objectives.

Keywords: *Complex Numbers. Active Learning. Peer Instruction. High School.*

* Doutorando do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul. c.s.puhl@hotmail.com.
** Doutorado em Informática na Educação. Universidade de Caxias do Sul. iglima1@gmail.com.

INTRODUÇÃO

O sistema educacional brasileiro tem sido submetido a constantes modificações, que buscam reverter os altos índices de reprovação e de evasão nas escolas da educação básica (GLOBO, 2017). Uma das recomendações que se encontra em, praticamente, todas as publicações que abordam a formação continuada e que consta em destaque na Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017) aos professores, enquanto colaboradores indispensáveis nesse processo, é a de substituir, sempre que possível, práticas de ensino tradicional que visam à memorização e reprodução de modelos, por alternativas que favoreçam a aprendizagem ativa.

Nesse sentido, a valorização dos esquemas mentais dos estudantes, proposta pelas teorias construtivistas, é uma condição a ser considera como uma possibilidade de construção de novos conhecimentos. Essas teorias consideram que cada estudante traz consigo uma bagagem cultural e conhecimentos prévios, os quais constituem sua estrutura mental e influenciam na sua aprendizagem. O desenvolvimento da aprendizagem não ocorre, portanto, segundo concepções empiristas[1] ou inatistas[2], que orientam práticas tradicionais, mas por meio da interação do estudante com os conceitos estudados - com os objetos de aprendizagem, segundo Becker (2015), o que caracteriza uma abordagem interacionista, na qual o estudante é sujeito ativo no processo de aprendizagem.

Observa-se, todavia, ainda um predomínio das concepções empiristas e inatistas na educação, o que faz necessário pensar como o ambiente escolar pode colaborar para a significação, e não repetição, de conhecimentos. Enquanto o ambiente educacional não se adapta à concepção de aprendizagem como construção de conhecimento, a educação perde sentido para muitos estudantes, que, ao se considerarem incapazes para o que a escola lhes requer, algumas vezes reprovam e, em casos comuns, ainda mais desestimulados, desistem dos estudos.

A Matemática, como outras disciplinas, é muitas vezes ministrada sob um caráter meramente instrutivo, que leva à aprendizagem mecânica e dificulta a compreensão dos conhecimentos. Além disso, muitos conteúdos "clássicos" de matemática básica, devido à restrição da carga horária no currículo escolar, não são mais abordados ou o são apenas superficialmente. Batista (2004), Mello e Santos (2005), Pereira (2016) e Costa (2016) afirmam, por exemplo, que o estudo de números complexos, o que neste trabalho interessa especialmente, dificilmente é proposto no Ensino Médio; e, conforme apontam Nobre (2013), Junior (2016) e Avelar (2016), quando o assunto é abordado, geralmente não é compreendido pelos estudantes. O resultado da falta de conhecimento sobre os números complexos reflete-se na Educação Superior (COELHO, 2013), e mostra seus efeitos principalmente em cursos de Engenharia (PUHL; LIMA, 2014), que necessitam deste conhecimento para a resolução de problemas em disciplinas cujo foco seja, por exemplo, a eletricidade.

Diante desse cenário, propõe-se uma estratégia didática para promover a aprendizagem ativa sobre os conceitos e operações básicas[3] com números complexos, voltada aos estudantes do Ensino Médio. Nesta estratégia, utilizam-se conhecimentos prévios, como esquemas mentais sobre unidade imaginária, já desenvolvidos em uma etapa anterior, para assimilar e acomodar conceitos e

---

[1] "[...] uma concepção empirista funda-se na crença de que o recém-nascido - a rigor, recém-concebido - nada traz em termos de conhecimento; tudo o que ele terá de cognitivo vem do meio externo por mérito da pressão que esse meio exerce sobre o sujeito; ou, simplesmente, pela estimulação desse meio" (BECKER, 2015, p. 31).

[2] "Uma concepção inatista funda-se na crença de que um ser humano recém-nascido - a rigor, recém-concebido - já traz todas as condições cognitivas com as quais enfrentará todas as circunstâncias de sua vida" (ibidem).

[3] Nesta pesquisa, entendem-se como conceitos e operações básicas com números complexos a identificação da parte real e da parte complexa, a igualdade entre números complexos, a representação geométrica, as operações de soma, subtração, multiplicação e divisão na forma algébrica.

procedimentos mais específicos, como as operações básicas. Tal estratégia é inspirada no método de ensino *Peer Instruction*, criado por Mazur e Somers (1997), que valoriza as estruturas mentais dos estudantes e se baseia na discussão entre pares.

Um levantamento realizado no banco de teses e dissertações da CAPES e na plataforma acadêmica do Google identificou que a maioria das propostas didáticas oriundas de pesquisas para o ensino de números complexos utiliza o contexto histórico ou as tecnologias, principalmente com recursos de geometria dinâmica, para a compreensão do conteúdo. O contexto histórico e as tecnologias são, de fato, tendências na educação matemática que apresentam características favoráveis para construção do conhecimento (FIORENTINI; LORENZATO, 2006). Entretanto, nesta pesquisa, optou-se por outra estratégia, focando na promoção de aulas dinâmicas e atrativas aos estudantes. Em nova busca em bancos de dados, colocaram-se as expressões *Peer Instruction* e Números Complexos, e nenhuma pesquisa foi encontrada, revelando, assim, a possibilidade de uma pesquisa inovadora e de relevância com essa temática.

Desse modo, compartilha-se o planejamento, a aplicação e a análise desta estratégia didática. O objetivo é apresentar uma alternativa didática que instigue os estudantes a compreenderem os conceitos e as operações básicas com números complexos, utilizando conhecimentos, mesmo que incompletos, presentes em suas estruturas mentais. Além disso, auxilia os professores a dar sentido aos conhecimentos matemáticos, como indicativo de que a Matemática não se reduz a memorizar e aplicar fórmulas, mas oferece possibilidades reais de compreensão dos conceitos e das operações, por meio dos conhecimentos já adquiridos pelos estudantes e na interação em sala de aula.

REFERENCIAL TEÓRICO

No século XXI, o ensino por meio da transmissão de conhecimentos não é condizente com a função social da escola, pois não favorece a formação de cidadãos autônomos, críticos e criativos, preparados para a vida em sociedade (MORETTO, 2007). Em busca de atingir esse objetivo, evidenciado também na Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017), cabe ao professor ir além de apresentar informações, planejando aulas com estratégias que envolvam os estudantes em atividades que requerem conhecimentos, raciocínio lógico, reflexão, compartilhamento de saberes entre colegas, experimentação de hipóteses e a concepção de conjecturas (BRASIL, 2002).

Nessa direção, utilizaram-se como fundamentação teórica princípios de aprendizagem ativa, que se alinham ao *Peer Instruction*, proporcionando ao estudante a utilização de esquemas mentais[4] para a assimilação[5]/acomodação[6] de novos conhecimentos, por meio do diálogo em pares e em grupos.

A aprendizagem ativa pressupõe a ação de quem aprende, não apenas por manipulações ou outros movimentos físicos, mas requer, principalmente, ações cognitivas, que envolvam conhecimentos e estruturas mentais, e que caracterizam o que se designa interação com o objeto de aprendizagem (WADSWORTH, 1997).

Piaget (*apud* BECKER, 2015) defende que a aprendizagem se inicia pelas estruturas mentais do ser humano, e por meio da interação, gerada pela ação sobre o objeto de aprendizagem, constroem-se estruturas de assimilação. Posteriormente, é possível, então, a apropriação dos mecanismos da ação

[4] "Os esquemas refletem, no indivíduo, seu nível atual de compreensão e conhecimento do mundo" (BARROS, 1996, p. 44).

[5] "É o processo cognitivo de colocar novos objetos em esquemas existentes. Pela assimilação, os estímulos são "forçados" a se ajustarem aos esquemas da pessoa" (BARROS, 1996, p. 44).

[6] "Acomodação é o aspecto da atividade cognitiva que envolve a modificação dos esquemas para corresponderem aos objetos da realidade. Na acomodação, a pessoa é 'forçada' a mudar seus esquemas ou criar novos esquemas para acomodar os novos estímulos" (BARROS, 1996, p. 45).

primeira, por meio da acomodação (WADSWORTH, 1997). Desse modo, Becker (2015) conclui que se aprende ao agir e não porque se ensina.

Bonwell e Eison (1991) elencam algumas características de um ambiente favorável ao desenvolvimento da aprendizagem ativa:

a) os estudantes estão empenhados na aula e não são somente ouvintes;

b) é colocada menor ênfase na transmissão de informações e maior ênfase no desenvolvimento das capacidades dos estudantes;

c) os estudantes estão envolvidos em pensamentos de elevado nível cognitivo, tais como análise, síntese e avaliação;

d) os estudantes estão envolvidos em atividades de leitura, discussão e escrita;

e) é colocada grande ênfase na exploração de valores e atitudes.

O foco dessa orientação pedagógica é propiciar a interação entre o estudante e o objeto de aprendizagem, havendo, assim, ação cognitiva no processo de assimilação e acomodação do novo conhecimento. Becker (2015, p. 33-34) afirma que: "A fonte da aprendizagem é a ação do sujeito, ou seja, o indivíduo aprende por força das ações que ele mesmo pratica: ações que buscam êxito e ações que, a partir do êxito obtido, buscam a verdade ao apropriar-se das ações que obtiveram êxito".

Nesse sentido, o professor deixa de ser mero transmissor do conhecimento, para tornar-se um mediador e orientador que planeja e cria estratégias para que o estudante interaja e construa conhecimentos com base no que já conhece. O professor precisa propor e incentivar essa ação, de modo a permitir que o estudante aprenda, e não apenas assimile informações de pouco sentido ou significado. Piaget (1975, p. 89) afirma que "[...] cada vez que ensinamos prematuramente a uma criança alguma coisa que poderia ter descoberto por si mesma, esta criança foi impedida de inventar e consequentemente de entender completamente.". Nessa perspectiva, o ensino não pode ser meramente expositivo, mas precisa privilegiar a ação cognitiva dos estudantes para o desenvolvimento de uma aprendizagem ativa.

Barbosa e Moura (2013, p. 55) sintetizam os papéis do estudante e do professor nesse processo:

> [...] aprendizagem ativa ocorre quando o aluno interage com o assunto em estudo - ouvindo, falando, perguntando, discutindo, fazendo e ensinando - sendo estimulado a construir o conhecimento ao invés de recebê-lo de forma passiva do professor. Em um ambiente de aprendizagem ativa, o professor atua como orientador, supervisor, facilitador do processo de aprendizagem, e não apenas como fonte única de informação e conhecimento.

Em busca do desenvolvimento da aprendizagem ativa, faz-se pertinente a utilização de métodos ativos, como aprendizagem baseada em problemas; aprendizagem baseada em projetos; *Peer Instruction*; *Just-in-time teaching*; aprendizagem baseada em times; métodos de caso; simulações (ROCHA; LEMOS, 2014). A escolha por esses métodos justifica-se pelo alto nível de retenção de informação proporcionada por eles, em que o estudante é ativo no processo (WOOD, 2004). Barbosa e Moura (2013, p. 56) afirmam que, ao utilizar esses métodos, os estudantes

> [...] assimilam maior volume de conteúdo, retêm a informação por mais tempo e aproveitam as aulas com mais satisfação e prazer. [...] Além disso, os alunos que vivenciam esse método adquirem mais confiança em suas decisões e na aplicação do conhecimento em situações práticas; melhoram o relacionamento com os colegas, aprendem a se expressar melhor oralmente e por escrito, adquirem gosto para resolver problemas

e vivenciam situações que requerem tomar decisões por conta própria, reforçando a autonomia no pensar e no atuar.

Entre as estratégias de aprendizagem ativa citadas, escolheu-se o método de ensino *Peer Instruction* como fundamentação do planejamento de uma estratégia para a construção de novos conhecimentos, a partir das estruturas mentais do estudante. Este método vem sendo empregado com sucesso, em âmbito internacional: é uma estratégia de aprendizagem que privilegia a interação e o compartilhamento de conhecimentos entre os estudantes e com o professor; o *Peer Instruction* dinamiza a sala de aula, e tem alcançado resultados positivos tanto na aprendizagem conceitual, de conteúdos científicos, quanto no desenvolvimento de habilidades cognitivas e sociais (ARAUJO; MAZUR, 2013).

O método foi proposto para o Ensino Superior em meados da década de 1990 pelo professor Eric Mazur, da Universidade de Harvard (EUA), difundindo-se rapidamente pelo mundo, sendo atualmente empregado por centenas de professores em muitos países, com especial destaque para seu uso em universidades norte-americanas, canadenses e australianas (CROUCH; MAZUR, 2001; MÜLLER et al., 2017).

A estratégia inicia com a apresentação de um conceito ou conteúdo pelo professor, em um período máximo de vinte minutos, e é seguida de um teste de escolha múltipla sobre o conceito abordado (*ConcepTest*), a ser respondido individualmente pelos estudantes em, aproximadamente, dois minutos (MAZUR; SOMERS, 1997). As respostas são, então, informadas e tabuladas pelo professor, utilizando algum recurso, como sistemas eletrônicos de respostas (*clickers*), cartelas coloridas (*flashcards*), programação em computadores ou outros dispositivos eletrônicos conectados à internet.

Dependendo da porcentagem de acertos, o professor define qual será a atividade seguinte. Quando a frequência de acertos for inferior a 35%, o professor precisa retomar os conceitos, pois os estudantes compreenderam pouco da sua explanação inicial, fazendo-se necessária nova intervenção para que a interação entre os estudantes seja produtiva (MÜLLER, 2013). Quando a frequência de acertos for superior a 70%, o professor sintetiza o conceito estudado, avançando para a próxima questão (MÜLLER, 2013). Se a frequência de acertos estiver entre 35% e 70%, os estudantes são orientados a formar pequenos grupos, preferencialmente com colegas que tenham optado, no teste conceitual, por alternativas diferentes, para discutir por cerca de três minutos, quando resolvem novamente a questão. Discutindo com os colegas, os estudantes precisam argumentar para defender a sua resposta e, ao questionar uma alternativa, devem ter certo domínio do conteúdo para convencer sobre o motivo da sua escolha, buscando compreender e aprender o tema em questão.

Após a discussão inicial, persistindo a frequência de acertos, uma nova discussão é proposta. O novo debate é mediado pelo professor por meio de recursos - questionamentos, leituras, vídeos, exposições, entre outros -, auxiliando os estudantes e, consequentemente, para que a argumentação certa prevaleça, fazendo com que aqueles que não acertaram reconheçam seu equívoco e reconstruam o conceito ou ideia em discussão. Caso os estudantes não atinjam uma frequência superior a 70%, o professor explica a resposta correta, e continua o *ConcepTest*, fazendo uma pergunta sobre o mesmo tema ou dando continuidade aos estudos (MÜLLER, 2013; ROCHA; LEMOS, 2014).

O objetivo do *Peer Instruction* é de que os estudantes reflitam individualmente suas respostas e, depois, as discutam em grupo, antes de o professor revelar a correta e explicá-la (MÜLLER, 2013). Deste modo, promove-se a aprendizagem de conceitos por meio da interação entre os estudantes (ARAUJO; MAZUR, 2013), ou seja, da discussão em pares. Para Piaget, essa é uma característica importante para o progresso do conhecimento, conforme afirmado por Lerner (2000, p. 100-101):

> [...] Piaget (1969) afirma que a cooperação entre as crianças é tão importante para o progresso do conhecimento como a ação dos adultos e que as situações de discussão entre pares, por permitir um verdadeiro intercâmbio de pontos de vista, são insubstituíveis como meio de incentivar a formação do espírito crítico e de um pensamento cada vez mais objetivo.

O diálogo questionador, guiado por exploração de ideias, propicia ações de pensamento que auxiliam na construção de significados e de conceitos. Os questionamentos focados no objeto de aprendizagem instigam o estudante a refletir, antecipando ou complementando resultados, gerando hipóteses e criando estratégias de resoluções.

O Quadro 1 apresenta as nove etapas do *Peer Instruction.*

Quadro 1 - Etapas do *Peer Instruction*.

Etapa	Atividade
1º	Breve exposição (15 a 20 minutos) do professor sobre determinado conceito ou teoria.
2º	Pergunta de múltipla escolha sobre o conceito ou a teoria apresentada.
3º	Resolução da questão pelos estudantes, individualmente, durante um ou dois minutos.
4º	Apresentação das respostas ao professor, utilizando *clickers* ou *flashcards*.
5º	Conforme as respostas dos estudantes: passagem para a próxima etapa (se a frequência de acertos for entre 35% e 70%); avanço para a etapa nove (se a frequência de acertos for superior a 70%); intervenção na estratégia, com nova explicação do conteúdo, oralmente ou utilizando outros recursos didáticos, retomando o processo da etapa dois (se a frequência de acertos for inferior a 35%).
6º	Interação entre os estudantes em pequenos grupos, discutindo os conceitos da questão.
7º	Nova resolução da questão pelos estudantes.
8º	Apresentação de resultados pelo professor, com base nas respostas dos estudantes.
9º	Análise da resposta correta e apresentação de nova questão, voltando à etapa um.

Fonte: Elaborada pelos autores com base em Mazur e Somers (1997) e Müller (2013).

Percebe-se, nessa estratégia didática, que o professor possui um papel ativo, desempenhando uma função essencial no incentivo a discussões produtivas e na condução do pensamento dos estudantes. Por meio desta estratégia, o professor não é, então, apenas um transmissor de conhecimento, mas consegue desempenhar as suas funções de mobilizador de conhecimentos, que são: coordenar as interações, evidenciar contradições nas resoluções e formular perguntas para responder os conflitos cognitivos ou para aperfeiçoar uma justificada apresentada (LERNER, 2000).

Esses são os pressupostos teóricos que fundamentaram o planejamento da estratégia de aprendizagem planejada, inspirada no *Peer Instruction* e apresentada a seguir.

METODOLOGIA

A estratégia de aprendizagem ativa proposta, para a compreensão dos conceitos e operações básicas de números complexos, foi aplicada em uma turma do terceiro ano do Ensino Médio, composta por 18 estudantes, de uma escola pública do Rio Grande do Sul. O material para aplicação consistiu-se de *flashcards*, com alternativas "A", "B" e "C"; retroprojetor digital para exposição das questões elaboradas pelo professor; e material dos estudantes, como lápis e caderno. O tempo planejado para a aplicação foi de duas horas-aula (100 minutos), porém as discussões proporcionam momentos ricos de compartilhamento de conhecimentos, sendo necessárias três horas-aula (150 minutos) para o desenvolvimento completo da proposta.

Antes de iniciar a estratégia didática para promover a aprendizagem ativa, os estudantes precisavam compreender um conceito fundamental, o da unidade imaginária - reconhecendo-a e assimilando o seu significado no estudo dos números complexos. No entanto, não se descreve, neste trabalho, a proposta didática elaborada para a abordagem do conceito de unidade imaginária como preparação para a proposta didática aqui apresentada, mas ela pode ser conhecida em detalhes por quem tiver interesse no trabalho de Puhl (2016)[7].

Antes de iniciar a estratégia, criou-se uma base de trabalho, por apresentação de perguntas, como acontece na *Peer Instruction*, elaboradas, em específico, em dois blocos de questões: um abordando os conceitos básicos de números complexos (partes do número complexo, igualdade entre dois números, representação geométrica, número real e número imaginário puro); outro sobre operações básicas (soma, subtração, multiplicação e divisão) na forma algébrica. Na Quadro 2, apresentam-se alguns exemplos de questões propostas aos estudantes, cada uma associada a um objetivo específico de aprendizagem, sendo as primeiras quatro relacionadas aos conceitos e as demais as operações básicas.

Quadro 2 - Exemplos de questões aplicadas aos estudantes de Ensino Médio, e seus objetivos.

Questão	Objetivo
Quais são as partes real e imaginária do número complexo $z = -1 + 3i$? a) $Re(z) = 1; Im(z) = 3$ b) $Re(z) = 3; Im(z) = -1$ c) $Re(z) = -1; Im(z) = 3$	Identificar a parte real e imaginária do número complexo.
Qual dos números complexos é imaginário puro? a) $z = 2 + 0i$ b) $z = 0 + 2i$ c) $z = 2 + i$	Reconhecer um imaginário puro e um número real.
Um número real, representado no plano de Argand-Gauss, será um ponto: a) do eixo vertical b) do eixo horizontal c) de algum quadrante, fora dos eixos	Representar geometricamente um número complexo no plano de Argand-Gauss.
A igualdade $2 + xi = a - yi$ é verdadeira quando: a) $x = 2; y = -3$ b) $x = -3; y = 2$ c) $x = 2; y = 3$	Identificar a propriedade de igualdade.
A soma de $z_1 = 2 - 3i$ com $z_2 = 1 + 4i$ é o número: a) $z_1 + z_2 = 3 + i$ b) $z_1 + z_2 = 3 + 7i$ c) $z_1 + z_2 = 1 + i$	Resolver a operação de soma.
Se $z_1 = 1 - 2i$ e $z_2 = 3 + 4i$, a subtração $z_1 - z_2$ é o número: a) $z_1 - z_2 = -2 + 6i$ b) $z_1 - z_2 = -2 + 2i$ c) $z_1 - z_2 = -2 - 6i$	Resolver a operação de subtração.
Sendo $z_1 = 2 - 3i$ e $z_2 = 1 + 4i$, ao multiplicar z_1 por z_2 temos: a) $z_1 z_2 = 14 + 5i$ b) $z_1 z_2 = 2 - 12i$ c) $z_1 z_2 = 5 + 14i$	Resolver o produto de números complexos.
A divisão de $z_1 = 2 - 4i$ por $z_2 = 2$ é igual a: a) $1 - 2i$ b) $1 - 4i$ c) $-4i$	Resolver a divisão de um número complexo por um número real.

[7] Na dissertação de Puhl (2016), está proposta uma estratégia diferenciada para a construção dos conhecimentos de números complexos, incluindo de unidade imaginária, que utiliza o contexto histórico aliado ao uso de tecnologias. O trabalho de Puhl e Lima (2016) apresenta as atividades didáticas desenvolvidas pelos estudantes envolvidos no presente trabalho para compreender a unidade imaginária.

O resultado da divisão $\frac{2+3i}{i}$ é igual a: a) $\frac{2+3i}{i} = 5$ b) $\frac{2+3i}{i} = 3 - 2i$ c) $\frac{2+3i}{i} = -3 - 2i$	Resolver a divisão de um número complexo por um imaginário puro.
Qual o resultado da divisão de $z_1 = 2 - 8i$ por $z_2 = 2 + 4i$? a) 1 - 2i b) $\frac{-7-6i}{5}$ c) -1	Resolver a divisão de um número complexo por número complexo qualquer.

Fonte: Elaborada pelos autores.

A descrição da continuidade da abordagem, que constitui a estratégia didática, é feita a seguir, em detalhes, para orientar outros professores que pretendam utilizá-la. Inspirada no *Peer Instrucion*, diferencia-se do método em algumas etapas, como por exemplo, na apresentação de um conceito ou teoria pelo professor, o que não foi feito neste caso, pois os estudantes já haviam estudado o conceito da unidade imaginária. Teve-se como hipótese, portanto, que se desenvolveria esquemas mentais, juntamente com outros conhecimentos - como os de operações básicas -, suficientes para atingir os objetivos de aprendizagem identificados no Quadro 2. Desse modo, e inicialmente, o professor apresenta a questão a ser respondida individualmente, pois pretende mobilizar conhecimentos e esquemas mentais para operar com números complexos, sem fazer, entretanto, uma exposição sobre as operações ou ilustrá-las com exemplos, como é comumente realizado por professores que orientam sua prática seguindo livros didáticos. Permite-se, assim, que os estudantes utilizem conhecimentos que já têm, mesmo que incompletos, tornando-se sujeitos ativos na assimilação e na acomodação de novos conceitos.

Para casos em que os estudantes não possuam conhecimentos prévios ou esquemas de assimilação, o que é provável que aconteça em algumas das questões propostas, espera-se que os questionamentos do professor ou as interações entre os estudantes sejam suficientes para construí-los.

Para promover interações nessa etapa de questões, utiliza-se um retroprojetor para apresentá-las. Os estudantes têm dois minutos, em média, para a resolução de cada questão e, após, todos apresentam, ao mesmo tempo, as suas respostas ao professor, quando solicitados, utilizando os *flashcards*.

As respostas são, então, computadas. Se o número de acertos for inferior a 35%, o professor intervém questionando os estudantes ou explicando o conceito abordado, apresentando novamente a questão. Se o número de acertos for entre 35% e 70%, são formados pequenos grupos para discussões, em busca de um consenso para responder a questão. Uma nova questão é apresentada quando o número de acertos for superior a 70%. Nesse caso, o professor complementa e sintetiza o conceito abordado, fazendo um fechamento sobre o assunto abordado. O professor pode intervir em qualquer uma das situações - em relação ao percentual de acertos dos estudantes -, discutindo o conceito ou a operação envolvida e, se achar conveniente, pode apresentar novos casos sobre o mesmo conteúdo.

Como síntese, o Quadro 3 esquematiza como a estratégia foi planejada e aplicada aos estudantes de Ensino Médio, para este trabalho.

Quadro 3 - Esquema com as etapas da estratégia inspirada no *Peer Instruction*.

Etapa	Atividade
Condição prévia	Compreensão dos significados algébrico e geométrico da unidade imaginária.
1º	O professor apresenta uma pergunta de múltipla escolha.
2º	Os estudantes resolvem individualmente a questão, em cerca de um a dois minutos.

3º	Os estudantes apresentam as suas respostas ao professor, utilizando *flashcards*.
4º	O professor intervém de acordo com percentual de acertos nas respostas dadas pelos estudantes.
5º	Os estudantes interagem em pequenos grupos, discutindo a questão.
6º	Os estudantes respondem, novamente, a questão.
7º	O professor apresenta a resposta correta e os estudantes discutem, em grande grupo, sobre o conceito. Além disso, o professor destaca os aspectos mais relevantes do conceito abordado. Depois, apresenta nova questão, voltando à etapa um.
Fechamento	Após a aplicação da estratégia, os estudantes respondem a um questionário proposto para identificar as aprendizagens desenvolvidas.

Fonte: Elaborada pelos autores pelos autores.

Esta é a estratégia que foi planejada e desenvolvida para a aprendizagem ativa de números complexos. Por meio dela os estudantes ouviram, falaram, perguntaram, discutiram e ensinaram; desempenhando ações, como as citadas por Barbosa e Moura (2013), para a construção do conhecimento. Igualmente, o professor, segundo esses autores, cumpriu seu papel, orientando e supervisionando o processo de aprendizagem.

ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

A estratégia didática para promover a aprendizagem ativa de números complexos, aqui apresentada, mostrou-se eficaz para mobilizar conhecimentos, principalmente pela interação promovida na turma. Conforme se avançava com as questões, abordando conceitos e operações, as discussões tornavam-se mais constantes, uma vez que os estudantes aprimoravam conhecimentos e esquemas para assimilar conceitos mais específicos, tendo a comunicação a função de destaque nas interações.

Para apresentar e discutir os resultados oriundos dessa prática, são apresentadas, nesta seção, extratos das análises de algumas das questões propostas, dando ênfase aos objetivos de aprendizagem apresentados no Quadro 2.

O primeiro conceito abordado referia-se às partes dos números complexos, e todos os estudantes responderam corretamente ao que foi perguntado: diferenciaram e identificaram a parte real da parte imaginária do número $-1 + 3i$.

Ampliando esse conceito, apresentou-se uma questão para identificar um número real, que 13 estudantes acertaram. Na discussão com toda a turma, proposta pelo professor, os outros cinco erraram ao responder que $z = 2 + i$ seria um número real, pois não existiria a parte imaginária. O equívoco foi, porém, percebido por dois estudantes que acertaram a questão e, então, argumentaram: “Para ser número real não posso ter (*sic)* a parte imaginária”, e “para não ter a parte imaginária tenho que multiplicar por zero para anular ela (*sic*)”. Os estudantes que erraram perceberam logo seu equívoco; o diálogo pode ter ativado um esquema mental, que é semelhante ao proposto na questão, de como operar, por exemplo, com termos algébricos: os estudantes identificam que o coeficiente do monômio x é igual a 1; do mesmo modo, puderam assimilar que a mesma ideia se mantém, compreendendo que a parte imaginária do número $z = 2 + i$ também equivale a um.

O erro, numa perspectiva construtivista, é um recurso para que o estudante se autorregule, permitindo que compreenda novos conhecimentos e realize o processo da equilibração[8] (BECKER, 2015). O erro, nesta estratégia, proporciona a interação entre os estudantes e com o professor, que,

[8] Equilibração “é um processo ativo pelo qual uma pessoa reage a distúrbios ocorridos em sua maneira comum de pensar, através de um sistema de compensações; isto resulta em nova compreensão e satisfação, ou seja, em equilíbrio” (BARROS, 1996, p. 46).

por meio do diálogo e do compartilhamento de conhecimento, é capaz de desenvolver outras habilidades importantes, como a autonomia, a argumentação e a tomada de decisões, considerando o conhecimento do outro (BARROS, 1996). Assim, na estratégia proposta, o professor age de modo correto diante do erro, pois, conforme Mauri (1999, p. 102): "Como profissionais, devemos estar interessados em indagar porque eles (os erros) ocorrem, e em utilizá-los para que nossos alunos e alunas continuem aprendendo".

Dando continuidade à estratégia, o próximo conceito desenvolvido foi o de imaginário puro, cuja abordagem proporcionou boas e férteis discussões. A questão proposta pedia que os estudantes identificassem o número imaginário puro dentre alguns que foram apresentados. As respostas individuais e a interação em pares não foram suficientes, nesse caso, para que a maioria dos estudantes aceitasse e compreendesse a resposta correta, assim a interação no grande grupo, orientada pelo professor, foi necessária. Alguns estudantes identificaram que 2 + i, ao invés de 0 + 2i, seria um imaginário puro, justificando que a unidade imaginária está "sozinha, sem um valor junto", o que configuraria um imaginário puro. Ao declararem seus pensamentos, em grande grupo, um estudante justificou a escolha correta e questionou os que erraram: "Mas se esse número mistura real e imaginário, como vai ser imaginário puro?". Outro argumentou: "Eu entendi que imaginário puro tem somente a parte imaginária; esse aí (2 + i) tem parte real. Ele não pode ser imaginário puro".

As intervenções permitiram que os estudantes refletissem, novamente, sobre o erro cometido na questão anterior e se convencessem de que um imaginário puro seria o número com parte real zero e com parte imaginária diferente de zero, ou seja, 0 + 2i. No final da discussão, um estudante sintetizou o tópico: "Para ser imaginário puro, é necessário anular a parte real da expressão e, para ser número real, é necessário anular a parte imaginária".

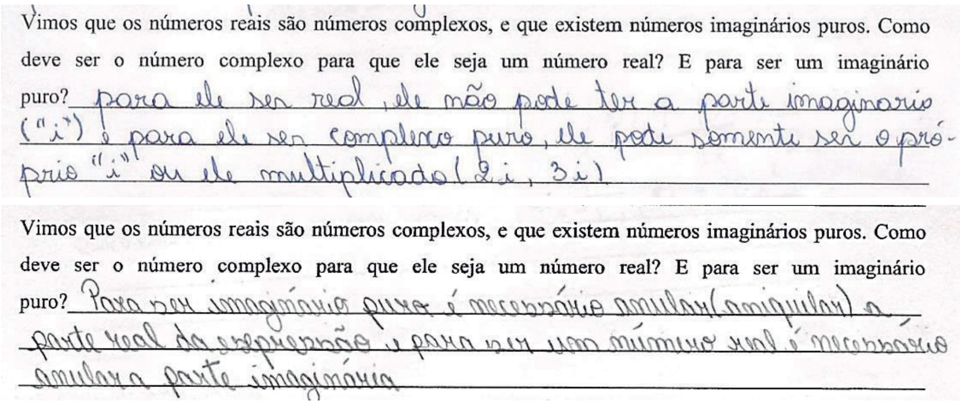
Interações como essa desenvolvem conflitos cognitivos nos estudantes, sendo um elemento primordial para a construção de novos conhecimentos, pois

> [...] facilitam a tomada de consciência da criança sobre as respostas diferentes da sua, obrigando-a a descentrar-se da sua resposta inicial, porque a resposta diferente do colega é portadora de informação e atrai a atenção do sujeito para outros aspectos pertinentes da tarefa que ela não tinha considerado e porque a necessidade de chegar a um acordo incita a incrementar a atividade intelectual (BLAYE, 1989 *apud* LERNER, 2000, p. 108).

Complementando os dados apresentados e as observações em sala de aula, as respostas ao questionário, proposto como avaliação, também indicam aprendizagem ativa. Todos os estudantes responderam corretamente às perguntas relacionadas aos conceitos trabalhados inicialmente. A Figura 1 consiste na resposta dada por, respectivamente, Maria e Pedro[9], que representam a forma de escrita da maioria da turma, que utilizaram uma linguagem simples e coloquial, ao responder corretamente a questão.

[9] Para resguardar a identidades dos estudantes serão usados pseudônimos na apresentação das respostas.

Figura 1 - Respostas de Maria e Pedro que diferenciam um número real do imaginário puro.

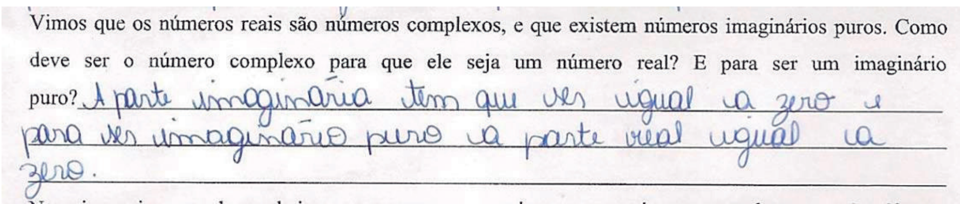

Vimos que os números reais são números complexos, e que existem números imaginários puros. Como deve ser o número complexo para que ele seja um número real? E para ser um imaginário puro? para ele ser real, ele não pode ter a parte imaginario ("i") e para ele ser complexo puro, ele pode somente ser o próprio "i" ou ele multiplicado (2i, 3i)

Vimos que os números reais são números complexos, e que existem números imaginários puros. Como deve ser o número complexo para que ele seja um número real? E para ser um imaginário puro? Para ser imaginário puro é necessário anular (aniquilar) a parte real da expressão e para ser um número real é necessário anular a parte imaginária

Fonte: Os autores.

Contudo, alguns estudantes, como Fátima (Figura 2), utilizaram linguagem matemática para responder a questão, reconhecendo a propriedade de um número real e de uma imaginário puro. Essas respostas, Figura 1 e Figura 2, fornecem indícios de compreensão por parte dos estudantes, que conseguiram expressar conceitos com autonomia, tendo assim, possivelmente, assimilado o novo conhecimento.

Figura 2 - Resposta de Fátima que diferencia um número real do imaginário puro

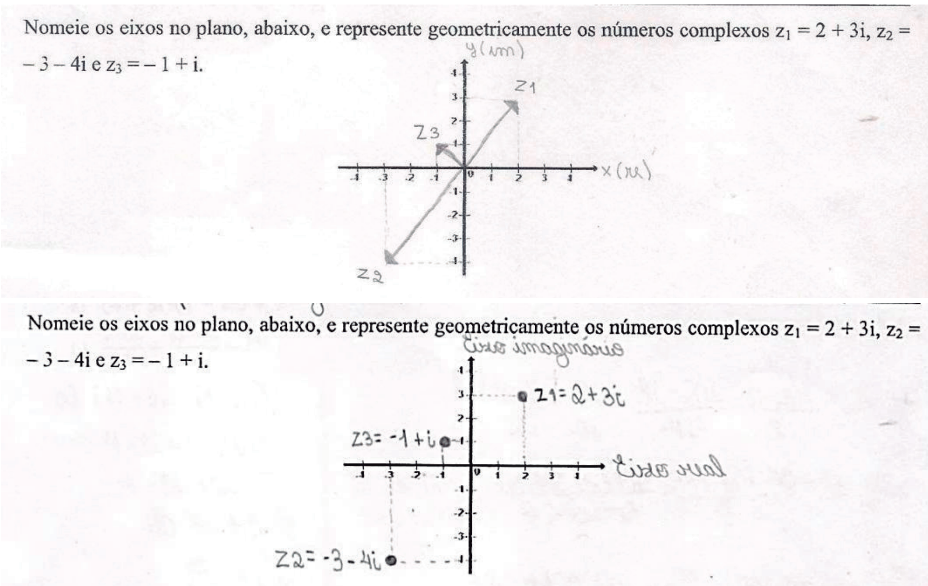

Vimos que os números reais são números complexos, e que existem números imaginários puros. Como deve ser o número complexo para que ele seja um número real? E para ser um imaginário puro? A parte imaginária tem que ser igual a zero e para ser imaginário puro a parte real igual a zero.

Fonte: Os autores.

Avançando nos estudos, o próximo conceito abordado foi o da representação geométrica de um número complexo. Inicialmente, nenhum estudante soube responder os nomes dos eixos do plano de Argand-Gauss, o que exigiu a intervenção do professor, em uma breve explicação sobre a nomenclatura dos eixos do plano para representar um número complexo, por analogia com a representação de um ponto no plano cartesiano. O professor relacionou a parte real ao eixo das abscissas e a parte imaginária ao eixo das ordenadas, propondo, assim, a assimilação do conhecimento. Terminada a explicação decidiu-se avançar para a próxima questão.

No questionário respondido pelos estudantes observou-se que a explanação do professor foi suficiente para a assimilação dos conceitos para a maioria dos estudantes, 16 dos 18 estudantes, conforme evidenciado nas respostas fornecidas por, respectivamente, Cláudio e Amanda (Figura 3).

Figura 3 - Representação de números complexos apresenta, respectivamente, por Cláudio e Amanda



Fonte: Os autores.

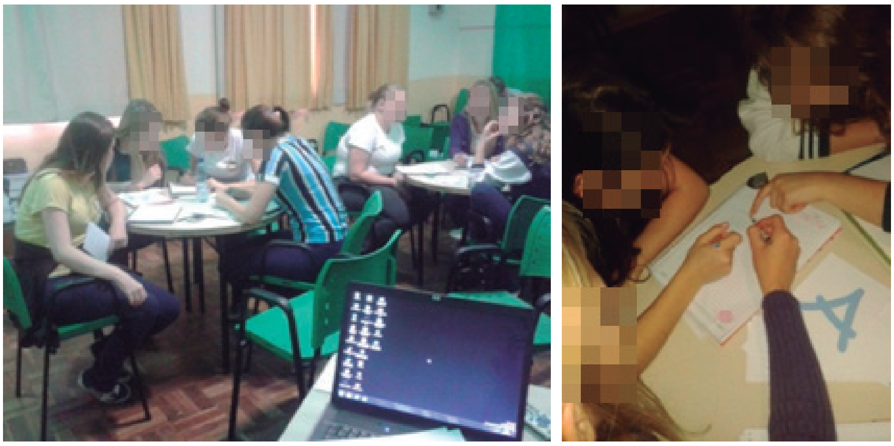
Houve, entretanto, duas representações distintas: 13 estudantes associaram um número complexo a um vetor e três representaram-no como um ponto. Antes da aplicação da estratégia, o professor não deu ênfase à representação de número complexo. Os estudantes não apresentaram esquemas mentais suficientes para diferenciar a representação geométrica de um número complexo de um vetor, sendo esse um esquema mental advindo da Física. Desse modo, fez-se necessária a intervenção do professor que realizou uma exposição oral sobre o tópico.

A análise das questões do primeiro bloco mostrou indícios de compreensão dos conceitos básicos dos números complexos, além de evidenciar o papel ativo dos estudantes na resolução das questões e nas interações com os colegas. O professor também desenvolveu sua função de orientar, questionar, intervir e explicar os conceitos quando conveniente.

Para o segundo bloco, as questões propostas renderam, novamente, boas discussões e interações, favorecendo a construção de estruturas de assimilação e acomodação, ou seja, o desenvolvimento de uma aprendizagem ativa. Em geral, nas questões desta etapa, o professor interviu com mais frequência, pois os estudantes não conseguiam argumentar e convencer suas duplas sobre os seus significados construídos. Assim, as discussões em grupos e orientadas pelo professor proporcionaram a ativação de esquemas mentais e construção de novos significados.

Nessa fase, os estudantes fizeram uso do caderno para facilitar a argumentação e a construção das estruturas de assimilação e acomodação, conforme observado na Figura 4.

Figura 4 - Interação durante as discussões das questões



Fonte: Os autores.

Em relação à soma de números complexos, todos os estudantes efetuaram corretamente, pois utilizaram um dos seus esquemas mentais para agrupar e efetuar os termos semelhantes. Em compensação, na subtração, evidenciaram-se alguns erros. O erro mais frequente ocorreu na interpretação da seguinte questão: “Se $z_1 = 1 - 2i$ e $z_2 = 3 + 4i$, a subtração $z_1 - z_2$ é o número...”. Alguns estudantes pensaram que somente a parte real do z_2 seria subtraída, argumentando que z_2 não estava entre parênteses para indicar que deveriam subtrair a parte imaginária. Outro contra-argumentara, com frases do tipo: “Antes, eu somei as partes semelhantes, agora vou subtraí-las, como se z_2 tivesse parênteses. O z_2 é toda a expressão $3 + 4i$, é como se fosse $(3 + 4i)$, por isso seria como se tivesse os parênteses”.

Assim, a interação entre os estudantes, em duplas e no grande grupo, proporcionou momentos de reflexão e de aprendizagem, além de desenvolver capacidades de argumentação e de análise crítica, pois os estudantes buscavam convencer o colega da resposta correta, evidenciando os seus erros. Na maioria dos conflitos cognitivos, a interação dos estudantes por meio do diálogo, em linguagem coloquial, foi suficiente para a acomodação das operações abordadas. Em relação à subtração, os esquemas mentais necessários são os mesmos da soma, sendo esses conhecimentos elementares para estudantes do terceiro ano do Ensino Médio.

No questionário respondido, 16 estudantes explicaram corretamente o modo de efetuar a soma de números complexos; o restante, dois, não respondeu à questão. A Figura 5 apresenta extrato da resposta apresentada por Júlia, que sistematiza matematicamente como realizar a operação.

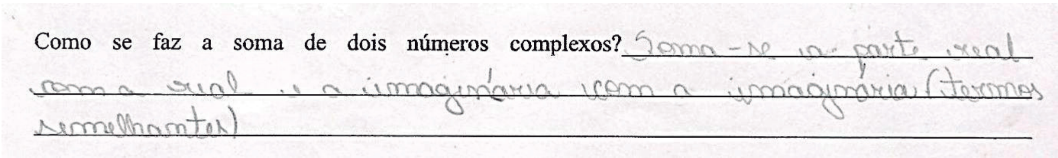
Figura 5 - Resposta da Júlia sobre a soma de números complexos

Como se faz a soma de dois números complexos? Parte real + Parte real; Parte imaginária + Parte imaginária

Fonte: Os autores

Em compensação, alguns estudantes, como João (Figura 6), preferiram descrever a forma de realizar a soma de números complexos, que consistem em somar as partes semelhantes, que João escreve como termos semelhantes. Esse é um indicio da ação cognitiva de João, pois, possivelmente, compreendeu que o processo de simplificação de expressões algébricas é similar à soma de números complexos.

Figura 6 - Resposta de João sobre a soma de números complexos

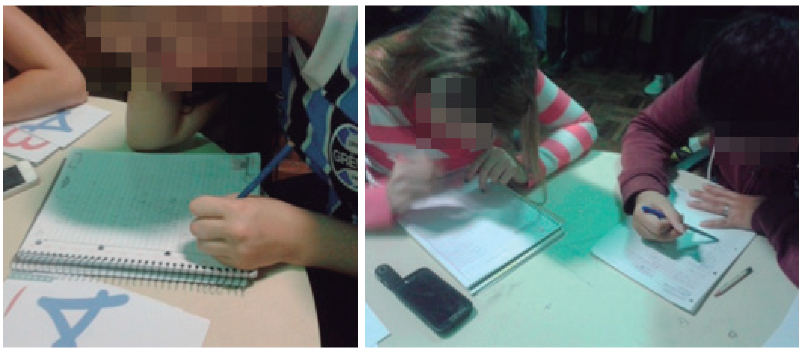

Como se faz a soma de dois números complexos? Soma-se as parte real com a real e a imaginária com a imaginária (termos semelhantes)

Fonte: Os autores.

Dando continuidade, o próximo objeto de aprendizagem referiu-se à multiplicação, que por sua vez, provocou um "choque" nos estudantes. Ao propor a questão, um estudante exclamou: "Que fácil! É muito lógica a resposta!"; porém, 16 estudantes erraram, multiplicando a parte real do primeiro número pela parte real do segundo, e procedendo da mesma forma com a parte imaginária dos dois números, o que foi interpretado como desatenção. Ao se deparar com o erro, ficaram surpresos e, momentaneamente, intrigados, dando indícios de estarem dispostos a compreender o seu erro e a realizar o processo de equilibração. O professor, apostando que os estudantes possuíam os esquemas mentais necessários para a resolução, sugeriu que colocassem o cálculo no papel. Apenas por escrever a operação, alguns já perceberam o erro, evidenciando esquemas mentais em ação e em processo de equilibração. Logo, todos resolveram a multiplicação de forma correta, demonstrando que possuíam os esquemas mentais sobre a propriedade distributiva e da equivalência da unidade imaginária (condição prévia para a realização da estratégia).

No momento de justificar o procedimento realizado, em grande grupo, um estudante comentou: "Nesse caso, temos que fazer a (multiplicação) distributiva, não podemos fazer somente com os semelhantes", e outro complementou: "É necessário tratar os números complexos como binômios e simplificar a expressão resultante usando $i^2 = -1$". Assim, para efetuar multiplicações, os estudantes optaram por utilizar o caderno (Figura 7).

Figura 7 - Estudantes resolvendo individualmente as questões



Fonte: Os autores.

No questionário aplicado, solicitou-se que respondessem quais seriam os conceitos necessários para efetuar a multiplicação de números complexos: 17 estudantes souberam expressar-se, explicando como se efetua a operação, e somente um não explicou. A maioria dos estudantes relatou que se faz necessário utilizar a propriedade distributiva, sem mais detalhes, pois as outras operações envolvidas, em consequência da distributiva, são simples e, provavelmente, já fazem parte dos esquemas mentais. A Figura 8 consiste na resposta apresenta por Eduarda, que responde a questão brevemente e apresenta um exemplo.

Figura 8 - Resposta da Eduarda sobre a multiplicação de números complexos

Relate como proceder para multiplicar dois números complexos.

a multiplicação de dois números complexos é feita por distributiva. ex: $(-2+5i).(2i) =$

$-4.i-10$

Fonte: Os autores.

Em compensação, respectivamente, Ana e Pedro (Figura 9) descrevem com mais detalhes o procedimento para multiplicar números complexos. Esses relatos, Figura 8 e Figura 9, evidenciam a existência dos esquemas mentais necessários - a propriedade distributiva e a igualdade $i^2 = -1$ - para efetuar a multiplicação de dois números complexos quaisquer.

Figura 9 - Respostas, respectivamente, de Ana e Pedro sobre a multiplicação de números complexos

Relate como proceder para multiplicar dois números complexos.

aplica-se a propriedade distributiva e após somar e subtrair número real com real e imaginário com imaginário.

Dividir números complexos é como efetuar a racionalização de denominadores. Escrevemos a divisão como uma fração e multiplicamos o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador. Qual a diferença entre conjugado e oposto de um número complexo. Explique e apresente o conjugado e o oposto do número -2+5i. $(-2-5i)$ conjugado / $+2-5i$ oposto

Relate como proceder para multiplicar dois números complexos.

É necessário tratar os números complexos como binômios e simplificar a expressão resultante usando a identidade $i^2=-1$. Exemplo:

$z2=(2+3i).(5-i)=2.5+2.(-i)+(3i).5+(3i).(-i)=10-2i+15i-3i^2=10+13i+3=13+13i.$

Dividir números complexos é como efetuar a racionalização de denominadores. Escrevemos a divisão como uma fração e multiplicamos o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador. Qual a diferença entre conjugado e oposto de um número complexo. Explique e apresente o conjugado e o oposto do número -2+5i. No caso do número oposto tanto a parte real quanto imaginária muda para o oposto, no conjugado somente a parte imaginária muda.

Fonte: Os autores.

O objetivo seguinte da estratégia envolvia a operação da divisão. A maioria, 15 estudantes, acertaram a questão sobre da divisão de um número complexo por um número real. Para respondê-la, os esquemas mentais necessários aos estudantes eram relativos à decomposição em frações ou à divisão de um binômio por um monômio, ambos frequentemente utilizados em sala de aula. Os três que erraram interagiram em pares, buscando compreender e acomodar esses conhecimentos e depois, o professor sintetizou e explicou o procedimento para resolver esse tipo de divisão.

Em relação à divisão de um número complexo pela unidade imaginária i, na primeira tentativa, nenhum dos estudantes acertou. Vários estudantes dividiram as partes semelhantes, ao dividir $2 + 3i$ por i, dividiram 3i por i, sem alterar a parte real apresentando como resposta o número 5. O professor teve que intervir, mas não explicou o procedimento aos estudantes, preferindo dar uma dica para ativar os esquemas mentais necessários para a operação, questionando-os: “Quanto vale a raiz quadrada de -1?” e “O que vocês faziam quando tinham uma raiz no denominador?”.

Com esses questionamentos, sete estudantes perceberam que poderiam racionalizar o denominador, resolvendo corretamente a questão. Com efeito, a racionalização não é simples de se compreender: em geral, os estudantes apresentam dificuldades para operar com raízes, pois o conceito não é facilmente transposto a uma operação mecânica. Assim, houve a necessidade de interações entre os estudantes para que relembrassem e compreendessem o processo da racionalização, em que o denominador possui somente uma raiz. O professor, circulando pelas duplas, prestava atenção nas interações e conduzia algumas explicações para facilitar o processo de assimilação e acomodação aos esquemas mentais dos estudantes.

Os estudantes demonstravam esforço e empenho durante a estratégia, que foram indispensáveis para a resolução de conflitos cognitivos, mas, ao final de duas horas-aula, apresentaram certo nível de cansaço. Assim, o professor não propôs a questão da divisão entre dois números complexos, permitindo que se estudasse essa operação como atividade optativa e extraclasse.

Na aula seguinte, mesmo não sendo uma atividade obrigatória, dois estudantes comentaram a questão, mas, na resolução proposta por eles, permanecia a unidade imaginária no denominador, indicando que a divisão não estava concluída. Possivelmente, os esquemas mentais utilizados pelos estudantes são os mesmos evidenciados na primeira questão proposta para divisão, racionalizando, como se estivesse somente uma expressão no denominador, a parte imaginária.

O professor, porém, já esperava por dificuldades, e então interveio. Ao propor a questão em sala de aula, somente um estudante conseguiu resolver a divisão entre dois números complexos quaisquer. Dessa vez, o professor explicou e dialogou com os estudantes, de modo a permitir o processo de equilibração, apresentando alguns exemplos para mostrar porque a unidade imaginária permanecia no denominador.

O professor decidiu introduzir, então, o conceito de conjugado, pois a divisão é resolvida com a multiplicação dos dois termos da divisão pelo conjugado do termo divisor. Essa foi a operação mais difícil de ser compreendida pelos estudantes - o que se entende que tenha sido causado pela ausência de esquemas mentais referentes -, e o professor teve que agir de modo mais significativo, expondo e exemplificando o procedimento da divisão, bem como introduzindo um conceito novo: o conjugado.

Assim encerrou-se a estratégia inspirada no *Peer Instruction,* que permitiu que os estudantes realizassem uma atividade dinâmica, utilizando seus esquemas mentais para compreender os conceitos e as operações básicas de números complexos. Essa estratégia permitiu uma aprendizagem ativa aos estudantes e, junto a uma lista ou circuito de exercícios, pode contribuir para a construção dos esquemas mentais necessários para serem aplicados no Ensino Superior, principalmente em cursos de Engenharia.

Pode-se afirmar, por fim, que os dados apresentados indicam confirmação da hipótese inicial: os estudantes possuíam a maioria dos esquemas mentais para a construção do novo saber, pois resolveram questões, utilizando as estruturas do raciocínio algébrico para a compreensão dos conceitos e operações básicas de números complexos. Esse resultado, de desenvolvimento de uma aprendizagem ativa, foi possível pelo planejamento dessa estratégia, inspirada no *Peer Instruction*, que propiciou um ambiente reflexivo de aprendizagem, em que os estudantes foram sujeitos ativos - ouvindo, falando, perguntando, discutindo, fazendo e ensinando - além de utilizarem esquemas mentais para a assimilação/acomodação dos conceitos e operações estudadas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A educação brasileira está em crise, evidenciada principalmente na escola pública, que não parece obter êxito na formação de cidadãos críticos e criativos, que saibam conviver em sociedade. Segundo dados do Pisa (2012), de 65 países que participam de avaliação educacional, em Matemática, o Brasil se encontra na 58ª posição, estando atrás de países como Albânia e Costa Rica. A média apresentada pelas nações, no Pisa, na disciplina de Matemática, é 494 pontos, porém, o Brasil atingiu somente 391 pontos. Esses dados indicam que a qualidade do ensino precisa, urgentemente, ser melhorada.

A estratégia didática para promover a aprendizagem ativa, aqui apresentada, inspirada no *Peer Instruction,* teve como um dos objetivos permitir o desenvolvimento da autonomia, da criticidade e da criatividade dos estudantes. Assim, em busca de ensino de qualidade, compartilha-se essa estratégia, que valoriza os conhecimentos prévios e propicia discussões e interações para compreender os conceitos e as operações básicas de números complexos, sem a utilização de fórmulas matemáticas ou de exposições, resumos e listas de exercícios repetitivos, comuns em práticas tradicionais.

Dessa forma, estimulou-se a interação, o diálogo e a construção do conhecimento, atitudes previstas como fundamentais na teoria de aprendizagem ativa, que ressalta o estudante como o sujeito protagonista no processo de aprendizagem. A estratégia desafiou e instigou os estudantes a argumentar e defender a sua opinião, e também a repensar e a reorganizar seu conhecimento ou suas estratégias para resolver operações com números complexos. Têm-se, portanto, indícios de uma mudança na perspectiva apresentada inicialmente por Puhl e Lima (2014) - na qual os estudantes de Engenharia não possuem o conhecimento básico de números complexos -, pois se ofereceram caminhos de construção de estruturas mentais com os estudantes do Ensino Médio, permitindo assim que os futuros acadêmicos não apresentem essas dificuldades, resolvendo os problemas, principalmente no âmbito do estudo de eletricidade.

Por fim, ressalta-se que a estratégia planejada contemplou as cinco características, citadas por Bonwell e Eison (1991), para criar um ambiente favorável ao desenvolvimento de uma aprendizagem ativa. Além disso, exigiu um nível de pensamento elevado, pois o estudante precisou pensar, organizar, argumentar e explicar os conceitos abordados nas questões. Explorou-se, pois, não somente conceitos e operações matemáticas, mas desenvolveram-se outras capacidades durante a estratégia, como o respeito ao outro, o diálogo, a interação e a crítica construtiva. Fica evidente que os estudantes não foram meros receptores de conhecimento, mas sujeitos ativos na resolução, na discussão e na análise das questões.

O professor, por sua vez, foi grande responsável por esses resultados, pois planejou e propiciou um momento reflexivo e interativo para o desenvolvimento da aprendizagem ativa de números complexos. Com a pesquisa, espera-se que outros docentes utilizem a estratégia, adequando-a ao seu contexto e a seu objetivo pedagógico.

Todas essas ações estão alinhadas com as novas tendências educacionais e com a aprendizagem ativa. Assim, busca-se melhorar a qualidade do ensino, permitindo ao estudante desempenhar um papel ativo, utilizando seus esquemas mentais para compreender os novos conhecimentos; ao professor, cabe planejar e mediar o uso de métodos ativos para a construção do conhecimento, ou seja, para a aprendizagem ativa.

REFERÊNCIAS

ARAUJO, Ives Solano; MAZUR, Eric. Instrução pelos colegas e ensino sob medida: uma proposta para o engajamento dos alunos no processo de ensino-aprendizagem de Física. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, Florianópolis, v. 30, n. 2, p. 362-384, abr. 2013. Disponível em: <https://bit.ly/2xFtFX4>. Acesso em: 09 fev. 2018.

AVELAR, Clodoaldo Bevilaqua. **O fascinante mundo dos números complexos**. 2016. 103 f. Dissertação (Mestrado em Ciências) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, São Carlos/SP, 2016.

BARBOSA, Eduardo Fernandes; MOURA, Dácio Guimarães de. Metodologias ativas de aprendizagem na Educação Profissional e Tecnológica. **Boletim Técnico do Senac**, Rio de Janeiro, v. 39, n.2, p. 48-67, maio/ago. 2013. Disponível em: <https://bit.ly/2IG7pzB>. Acesso em: 09 fev. 2018.

BARROS, Célia Silva Guimarães. **Psicologia e construtivismo**. São Paulo: Ática, 1996.

BATISTA, Silvia Cristina Freitas. **SoftMat**: um repositório de softwares para matemática do Ensino Médio: um instrumento em prol de posturas mais conscientes na seleção de softwares educacionais. 2004. 186f. Dissertação (Mestrado em Ciências de Engenharia) - Universidade Estadual do Norte Fluminense (Uenf), Campos dos Goytacazes/RJ, 2004.

BECKER, Fernando. **Educação e construção do conhecimento**. 2. ed. Porto Alegre: Penso, 2015.

BONWELL, Charles C.; EISON, James A. **Active learning:** Creating excitament in the classroom. Washington, D.C: The George Washington University, School of Education and Human Development. 1991.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: Educar é a base. Brasília: MEC, 2017. Disponível em: <https://bit.ly/2skbCls>. Acesso em: 29 jan. 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. **PCN + Ensino Médio**: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: Ministério da Educação, 2002.

COELHO, Michelle da Costa Barros. **Números Complexos e suas aplicações geométricas no ensino superior**. 2013. 112f. Dissertação (Mestrado Profissional) - Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca, Rio de Janeiro, 2013

COSTA, Jefferson Carmo da. **Números Complexos**: uma abordagem com ênfase em aplicações na matemática e em outras áreas. 2016. 67f. Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2016.

CROUCH, Catherine H.; MAZUR, Eric. Peer Instruction: Ten years of experience and results. **American Journal of Physics**, v. 69, n. 9, p. 970-977. 2001.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. **Investigação em educação matemática:** percursos teóricos e metodológicos. Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

GLOBO. Primeiro ano do ensino médio é a série com maior índice de reprovação e evasão. **O GLOBO**. Jun. de 2017 Disponível em: <https://glo.bo/2N3BVER>. Acesso em: 08 dez. 2017.

JUNIOR, Ronaldo Rafael Guedes. **Números complexos**: desenvolvimento e aplicações. 2016. 64f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, 2016.

LERNER, Delia. O ensino e o aprendizado escolar: argumentos contra uma falsa oposição. In: CASTORINA, José A. **Piaget-Vygotsky:** novas contribuições para o debate. 6.ed. São Paulo: Ática, 2000.

MAURI, Teresa. O que faz com que o aluno e a aluna aprendam os conteúdos escolares? In: COLL, César et al. **O construtivismo na sala de aula**. 6. ed. São Paulo: Ática, 1999. Cap. 4. p. 79-122.

MAZUR, Eric; SOMERS, Mark D. O. **Peer instruction**: A user's manual. Upper Saddle River, N.J. Prentice Hall, 1997.

MELLO, Sílvio Quintino de; SANTOS, Renato Pires dos. O ensino de matemática e a educação profissional: a aplicabilidade dos números complexos na análise de circuitos elétricos. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 7, n. 2, p. 51-64, jul./dez. 2005.

MORETTO, Vasco Pedro. **Prova**: um momento privilegiado de estudo, não um acerto de contas. 7. ed. Rio de Janeiro, RJ: Lamparina, 2007.

MÜLLER, Maykon Gonçalves. **Metodologias interativas de ensino na formação de professores de física**: um estudo de caso com o Peer Instruction. 2013. 226f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Física) - Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2013.

MÜLLER, Maykon Gonçalves et al. Uma revisão da literatura acerca da implementação da metodologia interativa de ensino Peer Instruction (1991 a 2015). **Revista Brasileira de Ensino Física**, São Paulo, v. 39, n. 3, 2017.

NOBRE, Waldek Rocha. **Números complexos e algumas aplicações**. 2013. 54f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2013.

PEREIRA, Felipe de Oliveira. **Números complexos na educação básica**. 2016. 130f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016.

PIAGET, Jean. **A teoria de Piaget**. In: CARMICHAEL, Leonard. Manual de psicologia da criança**.** São Paulo: EPU, EDUSP, 1975.

PISA. **Programme for international student assessment (PISA)**: results from PISA 2012. OECD - Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico, 2012. Disponível em: <https://bit.ly/2IhtKnT>. Acesso em: 9 fev. 2018.

PUHL, Cassiano Scott. **Números complexos**: interação e aprendizagem. 2016. 244f. Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade de Caxias do Sul, Caxias do Sul, 2016.

PUHL, Cassiano Scott; LIMA, Isolda Gianni de. From Vectores to the Complex Numbers. In: Active Learning in Engineering Education Workshop, 12., 2014, Caxias do Sul. **Attracting young people to engineering.** Brasília: ABENGE, 2014. p. 300-307. Disponível em: <https://bit.ly/2OaMzP4>. Acesso em: 20 jan. 2018.

PUHL, Cassiano Scott; LIMA, Isolda Gianni de. Uma atividade potencialmente significativa: diferenciando números reais dos números complexos. **Revista Caderno Pedagógico**, [S.l.], v. 13, n. 1, maio 2016.

ROCHA, Henrique Martins; LEMOS, Washington de Macedo. Metodologias Ativas: do que estamos falando? Base conceitual e relato de pesquisa em andamento. In: Simpósio Pedagógico e Pesquisas em Educação, 9., 2014, Resende. **Anais...** Resende: Associação Educacional Dom Bosco, 2014. Disponível em: <https://bit.ly/2xTNuJd>. Acesso em: 09 fev. 2018.

WADSWORTH, Barry J. **Inteligência e afetividade da criança na teoria de Piaget:** fundamentos do construtivismo. 5. ed. São Paulo: Pioneira, 1997.

WOOD, E. J. Problem-Based Learning: Exploiting Knowledge of how People Learn to Promote Effective Learning. **Bioscience Education**, Leeds, v. 3, n. 1, p.1-12, 2004.

RECEBIDO EM: 12 ago. 2018
CONCLUÍDO EM: 11 set. 2018