VIDYA, v. 34, n. 1, p. 173-186, jan./jun., 2014 - Santa Maria, 2013. **ISSN** 2176-4603

CONCEPÇÃO AÇÃO-PROCESSO DO OBJETO MATEMÁTICO AUTOVALOR E AUTOVETOR – O ESTUDO DE CASO DE UM ALUNO DE ENGENHARIA

ACTION-PROCESS-CONCEPT OF THE MATHEMATICAL OBJECT EIGENVALUE AND EIGENVECTOR – A CASE STUDY OF AN ENGINEERING STUDENT

JOELMA IAMAC NOMURA*
BARBARA LUTAIF BIANCHINI**

RESUMO

O objetivo desta pesquisa atrela-se aos resultados obtidos na Tese de Doutorado defendida no Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática da PUC-SP, em que propusemo-nos investigar as estruturas cognitivas envolvidas na construção do objeto matemático autovalor e autovetor conforme expõe a Teoria APOS de Dubinsky (1991). A pesquisa caracterizada como estudo de caso nos possibilitou identificar os dados a partir do discurso de estudantes dos cursos de Engenharia em contextos diversos de formação. A análise do conceito matemático específico levou à chamada decomposição genética com base nas ideias de Stewart (2008). Neste artigo, destacamos o resultado obtido na investigação de um estudo de caso com um aluno. Um maior grau de maturidade apresentado pelo aluno concluinte do curso possibilitou a resolução do problema, e a evidência de características que revelam uma concepção-ação-processo do objeto matemático autovalor e autovetor.

Palavras-chave: Autovalor e Autovetor. Estudo de Caso. Engenharia. Teoria APOS.

ABSTRACT

The objective of this research harnesses to the results obtained in the Doctoral Thesis defended in Postgraduate Studies Program in Mathematics Education at PUC-*SP,* where we decided to investigate the cognitive structures involved in the construction of eigenvalue and eigenvector mathematical object exposes as the *Dubinsky´s* APOS Theory (1991*).* The research featured as a case study*, allowed* us to identify the data from the discourse of students of Engineering in various training contexts*.* The analysis of the specific mathematical concept called genetics led to the decomposition based on the ideas of Stewart (2008*).* In this article we highlight the results obtained in the investigation of a case study with a student*.* A greater degree of maturity displayed by those who finished student's course led to the resolution of the problem*,* and evidence of features that reveal a *action-process-concept of the* mathematical object eigenvalue and eigenvector*.*

Keywords: Eigenvalue and Eigenvector*.* Case Study*.* Engineering*.* APOS Theory*.*

* Membro do Grupo GPEA (Grupo de Pesquisa de Educação Algébrica da PUC-SP). E-mail: joelma.nomura@terra.com.br
** Professora Doutora do Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática da PUC-SP. E-mail: barbara@pucsp.br

INTRODUÇÃO

O objetivo do artigo atrela-se aos resultados obtidos na tese de Doutorado intitulada *Esquemas Cognitivos e Mente Matemática inerentes ao objeto matemático autovalor e autovetor: traçando diferenciais na formação do engenheiro* do Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática da PUC-SP. Apresentaremos o resultado obtido em um dos estudos de caso realizado com um estudante do último semestre de um curso de Engenharia de uma instituição privada do Estado de São Paulo. Numa abordagem qualitativa de pesquisa, destacaremos trechos do discurso do aluno que evidencia qual a sua concepção a respeito do objeto matemático autovalor e autovetor. Para análise dos dados do diálogo e resolução do problema proposto ao aluno no momento da entrevista realizada, assumimos o aporte teórico da Teoria APOS em que Dubinsky (1991) refere-se a quatro fases que se relacionam e intercalam-se em um ciclo contínuo: ação, processo, objeto e esquema. O aporte teórico possibilita que diferentes concepções do conceito em estudo sejam percebidas, após a realização da chamada decomposição genética do objeto matemático, permitindo a interpretação do tipo de pensamento estabelecido.

A TEORIA APOS COMO APORTE TEÓRICO

Particularmente relacionada ao estudo de Álgebra Linear, a Teoria APOS (*Act-Process-Object--Schema*) de Dubinsky (1991) utiliza métodos qualitativos de pesquisa sendo baseada em perspectivas teóricas específicas que foram desenvolvidas para atender ao entendimento das ideias do psicólogo construtivista Piaget, de acordo com a abstração reflexionante no contexto de nível universitário (COOLEY et al., 2006).

O conceito de abstração reflexionante foi apresentado por Piaget e descreve a construção de estruturas lógico-matemáticas de indivíduos durante seu desenvolvimento cognitivo. Para o psicólogo construtivista, a abstração reflexionante ocorre nos primeiros anos da criança, durante a coordenação de estruturas sensório-motoras e continua em níveis mais avançados da Matemática. Contudo, seus estudos concentraram-se no desenvolvimento do conhecimento matemático de crianças e Dubinsky (1991), mais tarde, acrescenta que o enfoque dado às crianças pode ser estendido a níveis mais avançados da Matemática, estendendo seus estudos a adolescentes.

O autor anteriormente citado aponta que a abstração reflexionante possibilita que seja descrita a epistemologia de vários conceitos matemáticos, a partir da descrição das dificuldades conceituais apresentadas por estudantes que passam a ser explicadas.

Para Dubinsky (1991), a partir de situações matemáticas problemáticas os alunos são encorajados à construção dos objetos matemáticos, cujas soluções envolvem ações, processos, objetos e relações entre esquemas que se constituem para resolver determinada situação. A evolução de esquemas mentais é constatada à medida que novos esquemas são formados e nos quais o conhecimento matemático cresce. Ele afirma que as estruturas mentais apropriadas devem ser construídas para cada novo conceito e identifica na Teoria APOS a possibilidade de que essas construções mentais (ações, processos, objetos e esquemas) sejam estudadas, assim como os mecanismos mentais dados pelas classes de abstração reflexionante.

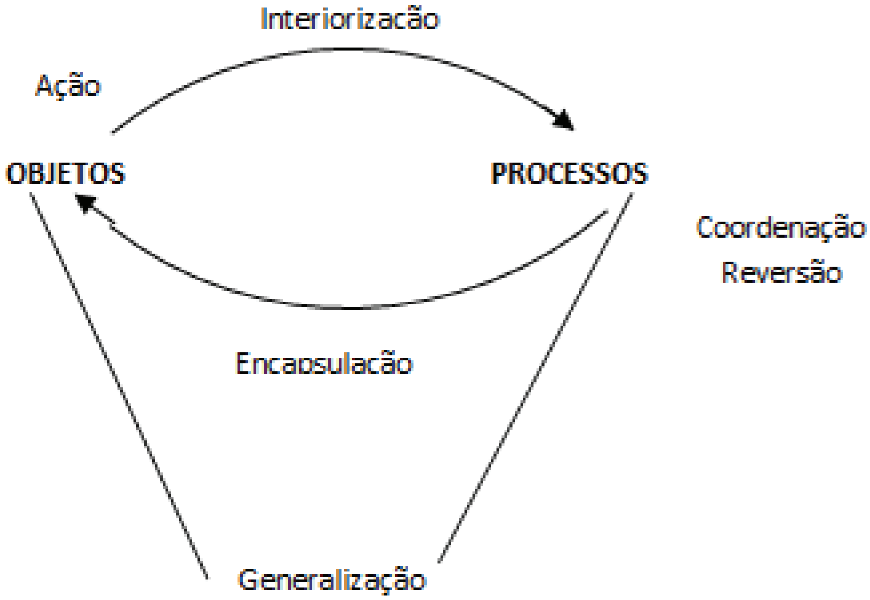
A seguir, apresentamos uma breve descrição das classes de abstração reflexionante estabelecidas por Piaget: (a) *Interiorização*: corresponde a uma sucessão de ações materiais a um sistema de operações interiorizado, que ocorre, quando as crianças usam símbolos, linguagens, figuras e outras imagens mentais para construir processos internos, cujo objetivo é dar sentido ao fenômeno percebido. Dubinsky (1991) resume esse mecanismo como a passagem do mundo externo ao mundo interno. Assim, uma ação pode tornar-se um processo; (b) *Coordenação*: nessa classe ocorre a coordenação de ações necessárias para a construção de novos objetos ou novas ações, possibilitando a relação entre dois ou mais processos e a constituição de novos; (c) *Encapsulação (ou Conversão)*: considerada como uma das mais importantes classes de abstração reflexionante, há a conversão de um processo (estrutura dinâmica) em um objeto matemático (construção estática). Para Piaget, a Matemática deve ser pensada em termos de construção de estruturas em que entidades passam de um nível a outro, tornando-se um objeto da teoria. Os objetos matemáticos são construídos com base em objetos anteriores, mais elementares; (d) *Generalização*: ocorre a aplicação de um determinado esquema em contextos distintos conhecidos pelo indivíduo. Outros objetos podem adicionar-se a um esquema para serem trabalhados em outros contextos. Assim, o sujeito aplica um esquema existente em uma ampla coleção de fenômenos, tornando-se consciente das aplicabilidades do esquema, que ocorre, quando um processo é encapsulado como objeto. Os objetos adquirem novo sentido para o sujeito, à medida que ele entende que o objeto pode ser assimilado pela extensão do esquema. Um esquema existente, que não será alterado formará novos objetos (resultantes da encapsulação); e (e) *Reversão*: essa última classe de abstração reflexionante foi agregada por Dubinsky e consiste na capacidade de reverter o mecanismo gerador de dado objeto matemático, regressando ao processo que o gerou.

Fuentes (2008) afirma que esquemas constituem estruturas dinâmicas que evoluem constantemente, cada vez que um objeto matemático é agregado às suas estruturas prévias, e que são constituídos por uma coleção de ações, processos, objetos e outros esquemas relacionados a determinado conceito matemático. Assim, os esquemas constituem novos objetos que se relacionam com os conceitos matemáticos preexistentes e àqueles que são construídos simultaneamente em um estado superior. Uma ação, processo ou objeto pode ser reconstruída, como resultado de experiências com novos problemas, em que novos processos, mais enriquecidos, são encapsulados em objetos mentais.

Quando tratamos da Teoria APOS, referimo-nos a quatro fases que se relacionam e intercalam-se em um ciclo contínuo: ação, processo, objeto e esquema.

Dubinsky (1991) descreve como as ações são interiorizadas em processos e, então, encapsuladas como objetos mentais situados em esquemas cognitivos mais sofisticados. Para expandir melhor as concepções do ciclo, serão destacadas as informações mais relevantes de cada uma: (a) *concepção-ação*: os alunos por meio de conhecimentos prévios e das atividades propostas pelo professor limitam-se às técnicas de resolução conhecidas, sem estabelecer relações entre os conceitos envolvidos; (b) *concepção-processo*: os alunos passam a se desprender de exemplos dados, estabelecendo conexões entre outros exemplos, e refletindo sobre a generalização de padrões. Os objetos são vistos sob diferentes pontos de vista. Os alunos enxergam novas propriedades e deparam-se com distintas formas de representações; (c) *concepção-objeto*: o aluno torna-se consciente do processo, como totalidade, tendo a capacidade de realizar ações sobre o objeto e raciocinar sobre suas propriedades; e (d) *concepção-esquema*: todos os conceitos são relacionados, compreendidos e generalizados sob diferentes contextos, formando uma referência bem articulada e coerente na mente do indivíduo.

Figura 1 - Esquemas e suas construções.



Fonte: Adaptado de Dubinsky (1991, p. 107).

A Figura anterior evidencia o esquema de maneira dinâmica, que se constrói e reconstrói continuamente de maneira não linear, correspondendo a um sistema de *feedback* circular.

Nessa teoria, a análise do conceito matemático específico leva à chamada decomposição genética desse conceito, que corresponde a uma descrição detalhada de como sujeito fará a construção desse conhecimento. Com base em dados experimentais da Matemática envolvida, a decomposição genética de determinado conceito é particular de cada indivíduo, podendo alterar-se de acordo com o momento. A partir da decomposição genética é possível que se observe o progresso da aprendizagem do aluno, que será apresentado como um guia possível para o desenho instrucional.

Dubinsky (1991) acrescenta que a decomposição genética é resultante da síntese de resultados empíricos, da teoria geral e do conhecimento matemático que envolve o conceito em estudo.

Considerando a pesquisa realizada por Stewart (2008), a decomposição genética de determinado conceito matemático é o resultado de sua análise teórica, nos quais as construções mentais dos estudantes podem evoluir com o propósito de compreendê-lo. Como as construções mentais entre os sujeitos diferenciam-se, podemos considerar que a decomposição genética de determinado assunto não é única, podendo variar de indivíduo para indivíduo. É possível que sejam identificados os construtos mentais que descrevem o conceito na mente do indivíduo.

Assim, o aporte teórico possibilita que diferentes concepções do conceito em estudo sejam percebidas, após a análise da decomposição genética pelo pesquisador, possibilitando a interpretação do tipo de pensamento estabelecido.

Em nossa pesquisa, defendemos que a apresentação de problemas, que ultrapassem a prática de exemplos repetitivos, reforça a construção das estruturas cognitivas dos estudantes.

De acordo com Stewart (2008), é importante que os estudantes ultrapassem a compreensão limitada dos conceitos (concepção ação), esforçando-se para estabelecer relações com suas definições, propriedades e diferentes representações (concepção processo-objeto-esquema).

Se o sujeito estiver limitado à concepção ação, ele estará restrito a regras e instruções passo a passo de como resolver determinada tarefa. É possível afirmar que a concepção ação exerça um papel essencial nos primeiros estágios de compreensão de determinado conceito, no entanto, é importante que o sujeito evolua sua concepção. É na concepção processo de determinado objeto matemático que o sujeito passa a prever resultados, novos atalhos e descrever a ação verbalmente, tudo apenas pelo pensamento e não, necessariamente, realizando operações. Quando um processo torna-se uma totalidade, entendemos que o indivíduo apresenta a concepção objeto. Nesse caso, afirmamos que o processo foi encapsulado como objeto mental. Já o esquema corresponde à estrutura na mente do indivíduo, uma estrutura dinâmica em que novos objetos matemáticos serão agregados às suas estruturas prévias. Assim, ao escrever a respeito da Teoria APOS, fez com que refletíssemos a respeito dos processos cognitivos envolvidos na construção do conhecimento, que foram perceptíveis, após a realização da decomposição genética dos mesmos.

O ESTUDO DE CASO COMO METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO

Iniciamos com a citação de Ponte (2006, p. 1) sobre a caracterização de um estudo de caso: "O estudo de caso é caracterizado, como incidindo numa entidade bem definida, como um programa, uma instituição, um sistema educativo, uma pessoa ou uma unidade social."

O autor discute que o estudo de caso visa a compreender com profundidade o seu "como" e "porque", com base em um enfoque particularista em que são investigadas as características próprias da unidade, seguindo uma perspectiva interpretativa ou pragmática. Na primeira, a compreensão ocorre do ponto de vista dos participantes e na segunda, do ponto de vista global do objeto de estudo.

Em qualquer que seja a situação, um estudo de caso é marcado sempre por suas determinantes internas, sua história, suas propriedades, assim como suas influências externas, "quer da realidade local, quer de natureza social e sistêmica que o influenciaram." (PONTE, 2006, p. 5).

Donald T. Campbell, no prefácio de Robert Yin (2005), cita a metodologia de estudo de caso como uma estratégia de hipóteses concorrentes plausíveis, apresentadas em redes ampliadas de implicações. Ressalta que devem ser buscadas as evidências para as explicações dos fatos e posterior análise de sua plausibilidade em que são observadas as demais implicações entre os diferentes conjuntos de dados. Deve-se, portanto, explicitar claramente as hipóteses concorrentes plausíveis em que há importantíssimo papel do padrão e do contexto na obtenção do conhecimento.

> A essência do método científico não é a experimentação, mas sim a estratégia conotada pela expressão 'hipóteses concorrentes plausíveis', em que as soluções são alcançadas a partir de evidências ou pode começar com hipóteses que estarão atreladas ao contexto e apresentadas em 'redes ampliadas de implicações que (embora nunca completas) são cruciais à sua avaliação científica' (YIN, 2005, p. vii).

O autor acrescenta que *os estudos de caso representam a estratégia preferida quando se colocam questões do tipo "como" e "por que"* (p. 19) e que hoje é predominante em todas as ciências sociais, sendo utilizados como estratégias de pesquisa de fenômenos individuais, organizacionais, sociais, políticos, educacionais e outros. Para utilizá-lo como estratégia de pesquisa, devemos estar atento à sua definição, à determinação e coleta de dados relevantes e à sua análise.

Para fins de ensino, um estudo de caso não precisa ter uma interpretação completa ou acurada dos eventos reais, apresentados a partir do rigor dos dados empíricos, mas sim promover uma estrutura de discussão e debate entre os estudantes.

Para Yin (2005), a pesquisa empírica vem acompanhada pelo pensamento lógico e não pela coleta de dados realizada como propósito mecanicista. Assim, o estudo de caso pode ser utilizado para descrever ou testar proposições e representam a estratégia preferida quando se colocam questões do tipo "como" e "por que" sobre um conjunto contemporâneo de acontecimentos.

Cohen et al. (2005) acrescentam que o estudo de caso pode revelar situações e resultados que não são suscetíveis a uma análise numérica, permitindo que pesquisadores entendam casos similares, fenômenos ou situações.

Assim, os autores supracitados destacam que o estudo de caso pode estabelecer causa e efeito em contextos reais e reconhecem que o contexto é um poderoso atenuante de ambos. Dessa maneira, contextos revelam uma interação única e dinâmica entre os eventos, relações humanas e outros atores em um único exemplo.

Prosseguem com a afirmação de que os estudos de caso restringem-se a um determinado período, a um contexto geográfico, organizacional, institucional e outros contextos que se limitam e são definidos por características do indivíduo ou do grupo.

Os autores acrescentam que o estudo de caso

> - terá características temporais que ajudam a definir a sua natureza; - tem parâmetros geográficos que permitem a sua definição; - terá limites que permitem definição; - pode ser definido por um indivíduo em particular, em um contexto e em um determinado tempo; - pode ser definido pelas características do grupo; - pode ser definido por um caro ou função; - pode ser modelado por arranjos organizacionais ou institucionais (COHEN et al., 2005, p. 254).

Evidenciam que os estudos de caso podem fazer afirmações teóricas, mas assim como outros exemplos de pesquisa e ciências humanas, eles são suportados por evidências apresentadas, que, em nossa pesquisa, serão apresentadas pelo discurso do aluno entrevistado.

A INVESTIGAÇÃO

Para a realização da investigação, foi proposto um problema ao aluno do último semestre de um curso de Engenharia. Essa etapa consiste na resolução do problema proposto, assim como a entrevista realizada. Dentre as questões apontadas, destacamos: (a) Qual o papel das disciplinas matemáticas em sua formação acadêmica e/ou profissional?; e (b) Quais os objetos matemáticos relacionados ao objeto autovalor e autovetor?

Considerando as ideias expostas por Stewart (2008) a respeito do objeto matemático autovalor e autovetor, para que o aluno apresente: a *concepção-ação* é necessário que ele encontre os autovalores e autovetores; a *concepção-processo* é necessário que ele perceba a existência de infinitos autovetores associados a cada autovalor e compreenda o processo de encontrá-los baseados em qualquer matriz *A*; a *concepção-objeto* é necessário que ele compreenda a definição de autovalores e autovetores como objetos.

Algumas características que evidenciam as diferentes concepções dos estudantes são destacadas por Stewart (2008):

a. Quando o aluno apresenta a *concepção ação* de determinado objeto em estudo, ele está limitado a encontrar os autovalor e autovetores associados, podendo aplicar uma transformação específica e multiplicando o vetor por um escalar específico. É possível que ele identifique a relação algébrica entre $A.x = \lambda.x$ e $(A - \lambda I).x = 0$.
b. Quando o aluno apresenta a *concepção-processo* é possível que ele realize transformações e apresente os vetores como caso geral, refletindo sobre a generalização de padrões. Estabelecem a relação com infinitos vetores associados aos autovalores e compreendem o processo de encontrá-los com base em uma matriz *A* qualquer. É possível que estendam sua compreensão a outros exemplos, e diferentes representações do mesmo objeto matemático. Além disso, passam a compreender o processo $(A - \lambda.I).x = 0.$ O aluno tem a compreensão de autoespaço vetorial que consiste no vetor nulo, de vetores linearmente independentes e de base de um autoespaço.
c. Quando o aluno apresenta a *concepção-objeto,* é possível que ele identifique que os vetores são transformados por uma matriz e esticados ou contraídos na mesma direção por um escalar. Passa a entender os efeitos da multiplicação pela matriz *A* em relação aos vetores.

O aluno compreende que ambos os membros da equação $A.x = \lambda.x$ representam processos distintos e que devem ser encapsulados, para que sejam estabelecidos objetos matemáticos equivalentes, ou seja, o objeto final é um vetor. Além disso, compreende a definição de autovalores e autovetores e torna-se consciente do processo como totalidade, tendo a capacidade de realizar ações sobre o objeto e relacionar suas propriedades.

d. Quando o aluno apresenta a *concepção-esquema*, os conceitos envolvidos no desenvolvimento do problema são relacionados, compreendidos e generalizados em diferentes contextos, formando uma referência bem articulada em sua mente.

APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA

A escolha do problema proposto aos alunos justifica-se pela relevância do tema Sistemas Dinâmicos Discretos em cursos de Engenharia, por autores de livros de Álgebra Linear, dentre eles, David Poole (2007) e David C. Lay (1999).

O Problema

Vamos denotar as populações de corujas e ratos do mato, no instante k, por $xk = \begin{bmatrix} O_k \\ R_k \end{bmatrix}$, em que *k* é medido em meses, O_k é o número de corujas na região estudada e R_k é o número de ratos (medidos em milhares). Suponha que

$O_{k+1} = (0,5)O_k + (0,4)R_k$

$R_{K+1} = - p.O_k + (1,1)R_k$

onde *p* é um parâmetro positivo a ser especificado. O termo $(0,5)O_k$ da primeira equação diz que sem os ratos para poderem se alimentar, apenas metade das corujas sobrevive a cada mês, enquanto os termo $(1{,}1)R_k$ da segunda equação diz que sem as corujas como predadoras a população de ratos cresce a uma taxa de 10% ao mês. Se os ratos abundam, o termo $(0{,}4)R_k$ fará com que a população das corujas cresça, enquanto o termo negativo $-p.\ O_k$ mede o número de mortes de ratos devido à ação predadora das corujas. (De fato, $1000p$ é o número médio de ratos comidos por uma coruja em um mês). Determine a evolução desse sistema quando o parâmetro predatório é igual a 0,104 (LAY, 1999, p. 311).

O DISCURSO E DESENVOLVIMENTO DO PROBLEMA PELO ALUNO ENTREVISTADO

Nesta fase da pesquisa, foi realizada entrevista com um aluno de um curso de Engenharia de instituição particular do Estado de São Paulo. Para resolução do problema proposto, o aluno acompanhou o livro *Introdução aos Sistemas Dinâmicos* de Luiz de Queiroz Orsini, relembrando definições e soluções propostas pelo autor.

O relato do aluno entrevistado evidenciou sua experiência profissional na área de estruturas e a distinção das especialidades em seu segmento. De acordo com o seu discurso, o departamento em que trabalha é composto por engenheiros de análise, de projetos e de *software*, definindo-se, claramente, os distintos papéis das profissões.

Quando apresentado o objetivo da pesquisa e a questão: Qual o papel das disciplinas matemáticas em sua formação acadêmica e/ou profissional? o aluno discorreu:

> É preciso recorrer a outra pessoa quando existem cálculos mais complexos a serem realizados. Ai entra o papel do engenheiro de análise, mas, todos os aspectos da Engenharia de Projetos e *softwares* computacionais têm uma importância significativa. Mas, poucos são os engenheiros especialistas em análise. [...]. Na construção de um prédio você precisa fazer aproximações enormes, porque aquilo tem que ficar pronto em um dia. E não há nada errado com isso, porque parte da arte estrutural do projeto é aprender a aproximar. Assim, os cálculos de projetos são familiares à prática dos engenheiros. São as normas técnicas. Mas, é preciso um grande esforço da equipe para produzir argumentos convincentes de que a estrutura irá comportar-se conforme o previsto. Aí, ocorre a análise do especialista em matemática. O mínimo é que saibamos analisar os resultados passados por esse especialista. É assim: a grande maioria dos engenheiros não realiza cálculos matemáticos complexos. É suficiente que eles saibam que aqueles métodos específicos existem e compreendam seus resultados.

Ficou evidenciado em seu discurso que a grande maioria não usa a Matemática ensinada na faculdade e que são poucos os que trabalham com ela, geralmente, consultores e professores de universidades. Em suas funções, é esperado que os resultados sejam compreendidos e avaliados para que decisões sejam estabelecidas no contexto da Engenharia. Contudo, para o aluno, a Matemática estabelecida como disciplina em uso apresenta um foco bastante distinto das disciplinas matemáticas dos cursos superiores de graduação.

No próximo discurso estabelecido pelo aluno, ele faz referência ao Método dos Elementos Finitos apresentado no 4º. Semestre de sua graduação, na disciplina Computação Gráfica a partir de uma ferramenta computacional.

> Os engenheiros precisam ter uma visão do que acontece dentro da caixa preta com o objetivo de decidir o método mais apropriado. Se ele não tem isso, ele vai ficar limitado às regras, mas acho que não há a necessidade de tornar os cálculos explícitos. O julgamento final é feito pelo que ele compreende da própria Engenharia. Por exemplo, para o cálculo de elementos finitos de estruturas em que a geração de elementos automáticos ou algoritmos pode facilmente produzir elementos ruins. O *software* não, necessariamente, vai achar a melhor solução. Sempre ocorrem erros porque o computador comete falhas nos resultados. Por isso, é muito importante que analisem os resultados porque encontramos coisas que não saem como o planejado. Você precisa ter conhecimento de como e do que você espera como resultado e, assim, identificar onde está ocorrendo o problema. Há um grande ciclo: você faz o modelo, checa os resultados, checa novamente e refaz o modelo, se necessário. Na faculdade, nós tivemos uma matéria assim. Mas foi só a base porque o aprofundamento vem depois. Em Computação Gráfica nós tivemos um pouco sobre elementos finitos, CAD. Fizemos análise estrutural, de estradas, estudo topográfico com *softwares*.

Conforme explica Soriano (2009), o estudo do Método dos Elementos Finitos, permite que seja analisado "o comportamento de qualquer sistema físico regido por equações diferenciais ou integrais, como da mecânica dos sólidos deformáveis, da condução de calor e de massa, e do eletromagnetismo." (p. 1). O autor cita que, para realizar o estudo, é necessário que haja um equilíbrio entre a consistência matemática e a conceituação física, e para tanto, o aluno deve ter conhecimento da Resistência dos Materiais e domínio de operações fundamentais da Álgebra Matricial e do Cálculo Diferencial e Integral.

Em seguida, o aluno acrescentou que as ferramentas computacionais parecem ter mudado a cultura de aprendizagem, pois tudo passa a ser ensinado com base nos *softwares*.

> Por isso, o papel do *software* na prática da Engenharia é fazer o entendimento baseado no uso. A tecnologia tornou a Matemática mais fácil de ser usada, e isso também mudou a cultura de aprendizagem, por exemplo, a respeito das estruturas. Você pode desenvolver uma ponte ou superestimá-la e vê-la entrar em colapso, vê-la vibrar. Você não tem mais o tempo e o dinheiro para fazer isso sem os *softwares*. E nem mesmo os professores ensinam sem eles.

Após a leitura do enunciado do problema, o aluno identifica os parâmetros do sistema de equações, seguindo para a sua resolução, sempre tendo em mãos, o livro Sistemas Dinâmicos Discretos. É evidente que ele reconhece a importância do conceito envolvido no contexto de evolução populacional entre predadores e presas.

Consultando o Capítulo 5 do livro que discute o conceito e definição de Autovalores e Autovetores, expôs em voz alta:

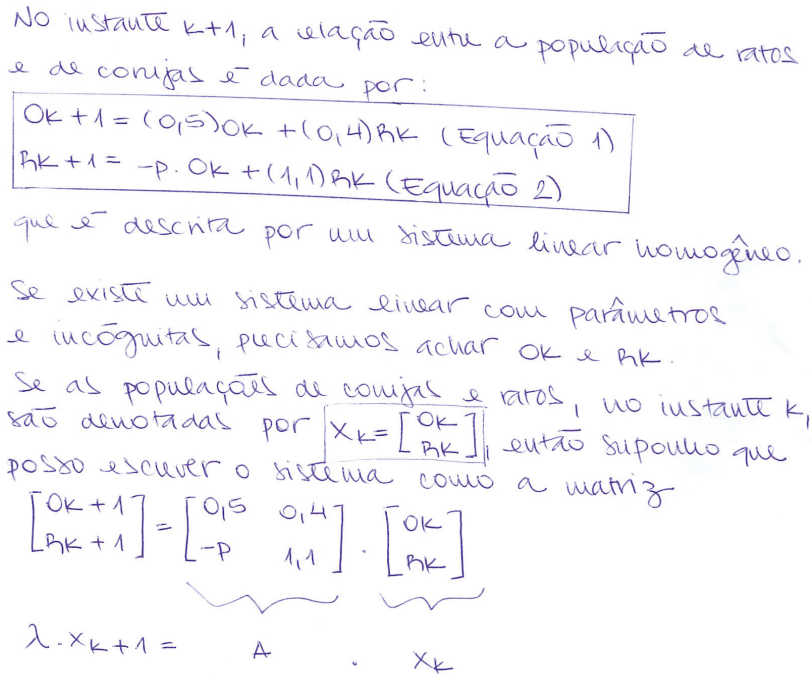
> Uma matriz quadrada *A* de ordem *n* e elementos constantes, pertencentes a *R* (conjunto real), pode ser considerada como uma transformação linear que transforma um vetor $v \in C^n$ em um outro vetor *w*, também de C^n, pela regra $w = A.v$ (ORSINI, 1985, p. 82).

E prosseguiu:

> Cabe agora a pergunta: existirão em C^n vetores *u* tais que $A.u = \lambda u$ onde λ é um escalar real ou complexo? A resposta é afirmativa, e nos leva à definição de autovalores e autovetores:
> Um vetor *u* não nulo é chamado autovetor de uma matriz *A*, *nxn*, de elementos constantes e pertencentes a *R* se, e apenas se, *u* satisfizer a $A.u = \lambda u$ para algum escalar $\lambda \in C$. O correspondente escalar é chamado autovalor de *A* (ORSINI, 1985, p. 82).

Ele afirmou que tendo o livro em mãos não ficava difícil relembrar e compreender a matéria. É mais fácil quando se passam os anos e adquire-se experiência.

Figura 2 - Representação do sistema linear em notação matricial pelo Aluno 1.



No instante k+1, a relação entre a população de ratos e de corujas é dada por:

$$\boxed{\begin{array}{l} Ok+1 = (0{,}5)Ok + (0{,}4)Rk \text{ (Equação 1)} \\ Rk+1 = -p.Ok + (1{,}1)Rk \text{ (Equação 2)} \end{array}}$$

que é descrita por um sistema linear homogêneo.

Se existe um sistema linear com parâmetros e incógnitas, precisamos achar Ok e Rk.

Se as populações de corujas e ratos, no instante k, são denotadas por $\boxed{X_k = \begin{bmatrix} Ok \\ Rk \end{bmatrix}}$, então suponho que posso escrever o sistema como a matriz

$$\begin{bmatrix} Ok+1 \\ Rk+1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}4 \\ -p & 1{,}1 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} Ok \\ Rk \end{bmatrix}}_{X_k}$$

$$\lambda . X_{k+1} = A \cdot X_k$$

O aluno conciliou a leitura do enunciado com o livro-texto, estabeleceu a relação com a equação $A.u = \lambda u$ (explicitada na definição) e compreendeu que o vetor *u* preserva as suas propriedades quando multiplicado por uma matriz *A*. Contudo, não conseguiu evidenciar a relação que é estabelecida na equação seguinte, exposta no mesmo livro, $(\lambda I - A)u = 0$, considerando os conceitos envolvidos, como a Matriz Identidade.

Para o cálculo dos autovalores λ_1 e λ_2, o aluno identificou a possibilidade de escrever o sistema dado em notação matricial.

De acordo com Poole (2004, p. 232), “os autovalores e autovetores são característicos de uma matriz no sentido de conferir informações importantes sobre sua natureza.”

Após estabelecer a relação entre as equações $A.u = \lambda u$ e $(\lambda.I - A)u = 0$, o aluno acrescentou que deve haver uma solução não trivial para $(\lambda.I - A)u = 0$, ou seja, $u \neq 0$. O aluno considerou $u = x_k$. Prosseguiu com a afirmação de é necessário e suficiente que $\det(\lambda.I - A) = 0$, chegando à equação característica da matriz e, em seguida, às raízes do polinômio característico de grau 2.

Figura 3 - A identificação do polinômio característico e suas raízes pelo aluno.

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}4 \\ -0{,}104 & 1{,}1 \end{bmatrix} u = 0$$

$$\begin{bmatrix} \lambda - 0{,}5 & -0{,}4 \\ +0{,}104 & \lambda - 1{,}1 \end{bmatrix} u = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 0{,}5 & -0{,}4 \\ +0{,}104 & \lambda - 1{,}1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{porque } \det(\lambda I - A) = 0$$

$$(\lambda - 0{,}5)(\lambda - 1{,}1) - (-0{,}4).(+0{,}104) = 0$$

$$\lambda^2 - 1{,}1\lambda - 0{,}5\lambda + 0{,}55 + 0{,}0416 = 0$$

$$\lambda^2 - 1{,}6\lambda + 0{,}5916 = 0.$$

$\lambda^2 - 1{,}6\lambda + 0{,}5916 = 0$ (essa expressão é o polinômio característico de grau 2)

$$\Delta = (1{,}6)^2 - 4(1)(0{,}5916)$$

$$\Delta = 2{,}56 - 2{,}3664 = 0{,}1936$$

$$\lambda = \frac{1{,}6 \pm \sqrt{0{,}1936}}{2} \Rightarrow \lambda_1 = 1{,}02 \text{ e } \lambda_2 = 0{,}58$$

Durante a resolução do problema, o aluno identifica que há infinitos autovetores, após destacar a relação entre O_K e R_K como $O_k = 0{,}77R_k$ para $\lambda_1 = 1{,}02$ e $O_K = 5R_K$ para $\lambda_2 = 0{,}58$.

O aluno leu no livro a *Introdução aos Sistemas Dinâmicos*

> Convém relembrar que $(A - \lambda_i I)u_i = 0$, sendo um sistema homogêneo, admite infinitas soluções, de fato, multiplicando uma solução u_i por um escalar qualquer obtemos outra solução (ORSINI, 1985, p. 83).

Em seguida, acrescentou que todos os autovetores podem ser linearmente independentes, ou seja, $u \neq 0$ e prosseguiu

> Uma matriz A (nxn), com todos os autovetores λ_1, λ_2, ..., λ_n distintos, pode-se associar um conjunto de n autovetores linearmente independentes. Este conjunto qualifica-se como base em R^n (ou C^n) (ORSINI, 1985, p. 84).

Após encontrar os valores de maneira correta, partimos para a questão: Quais os objetos matemáticos relacionados ao objeto autovalor e autovetor?

Obtivemos as seguintes respostas do aluno:

> A base de tudo é: vetores, sistemas lineares homogêneos, matrizes, equação característica e polinômio característico.

Evidenciamos que o aluno entrevistado reconheceu a importância das disciplinas matemáticas e destacou os diferentes papéis que devem ser considerados em contextos de projetos ou de aplicações.

Foi possível que o aluno ilustrasse seu pensamento procedimental com base em representações matriciais e algébricas, contudo não houve evidências das representações geométricas relacionadas ao tema.

Em nossa análise, concluímos não ser comum nem tampouco habitual que os alunos representem os autovetores geometricamente.

O conjunto de instruções apresentado pelo aluno para encontrar a solução do problema evidencia que pouco é compreendido a respeito dos conceitos envolvidos e que o próprio aluno cita como resposta à segunda questão: vetores, sistemas lineares homogêneos, matrizes, equação característica e polinômio característico.

Assim, consideramos que o aluno limitou-se à realização de procedimentos operacionais de cálculo, expressando os passos entre os processos que, no entanto, não se encontravam plenamente interiorizados. Contudo, embora não explicitasse verbalmente as relações entre os vários componentes, conseguiu ter um desempenho bastante satisfatório, com base na definição obtida no livro, que permitiu discutir o papel da matriz *A*, do autovetor *x* e autovalor λ, relacionando-os à equação $A.x_k = \lambda.x_k$.

A relação estabelecida entre o aluno quando encontra a relação $O_k = 0,77R_k$ para $\lambda_1 = 1,02$ e $O_K = 5R_K$ para $\lambda_2 = 0,58$ permite que ele reflita a respeito da existência de infinitos autovetores para qualquer múltiplo escalar de R_K e que esse múltiplo escalar também era um autovetor.

Evidenciamos que aluno apresentou elementos, tanto da concepção ação como da concepção processo. Ressaltamos que nem todos os elementos constantes na análise de Stewart (2008) estiveram presentes no desenvolvimento do problema pelo aluno.

CONSIDERAÇÕES

A proposta deste artigo foi evidenciar a partir do discurso de um aluno do último semestre de um curso de Engenharia qual concepção apresenta quanto ao objeto matemático autovalor e autovetor conforme expõe a Teoria APOS de Dubinsky (1991).

De acordo com Stewart (2008), o estudo da Álgebra Linear exige um tipo de pensamento que lide com as dificuldades cognitivas e conceituais dos estudantes. É importante que professor e aluno desprendam-se de métodos específicos para resolver problemas, estabelecendo particularidades inerentes a cada curso de formação.

Pudemos identificar que o aluno entrevistado, prontamente, buscou a definição do conceito e apoiado nela identificou os elementos-chave envolvidos, como a matriz *A*, ao autovetor x_{K+1} e x_K e ao autovalor λ na equação de diferenças $x_{k+1} = Ax_k$

Portanto, entendemos que o maior grau de maturidade desse estudante atribuído a uma postura de independência e interdependência desenvolvida ao longo da vida acadêmica possibilitou que ele buscasse a definição formal do conceito trabalhado.

Destacamos que houve ênfase às representações matriciais e algébricas, no entanto, as representações geométricas foram negligenciadas.

Em nossa análise, identificamos que os diversos conceitos constituíram elementos isolados e não foram inter-relacionados e que o aluno limitou-se às técnicas de resolução expostas no livro que o acompanhava. Assim, consideramos que o objeto matemático autovalor e autovetor e os objetos relacionados não encontram-se plenamente encapsulados como entidades mentais e que o aluno encontra-se na concepção ação-processo quanto ao estudo do objeto matemático autovalor e autovetor, conforme revelam as ideias de Stewart (2008).

Foi possível que o aluno identificasse relações com outras disciplinas de sua graduação, dentre elas, o Método dos Elementos Finitos em Computação Gráfica e Resistência dos Materiais.

Percebemos que ele, estimulado por nossa proposta de pesquisa, busca por um novo enfoque de ensino da Álgebra Linear e valoriza um estudo que considere mais ideias conceituais do que procedimentais e evidencie as relações que se estabelecem entre as disciplinas da graduação.

Ele tem plena consciência da necessidade de uma formação consistente com as necessidades do mercado de trabalho e dos aspectos que fundamentam sua formação, dentre eles, os aspectos relacionados às disciplinas matemáticas que constituem a base para a construção dos processos que tratarão da formação dos conceitos.

REFERÊNCIAS

COHEN, L., MANIOR, L. MORRISON, K. **Research Methods in Education**, 6. ed. 2005.

COOLEY, L. et al. Learning Theory and Linear Algebra. 2006.

DUBINSKY, E. Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. In: TALL, D. **Advanced Mathematical Thinking**. Kluwer Academic Publischers. 1991. Dordrecht, the Netherlands.

FUENTES, D. S. R. **Construcciones y Mecanismos Mentales Asociados al Concepto Transformación Lineal.** 2008. 127f. Dissertação (Mestrado em Ciências com Especialidade em Matemática Educativa) - Universidade México D. F., abril de 2008.

LAY, D. C. Álgebra Linear e suas aplicações. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1999.

MONTEIRO, L. H. A. **Sistemas Dinâmicos**. 2. ed. São Paulo: Mack Pesquisa, 2006.

POOLE, D. *Álgebra Linear*. São Paulo: Thomson, 2004.

PONTE, J. P. **Estudos de caso em educação matemática**. Bolema, v. 25, p. 105-132, 2006.

ORSINI, L. de Q. **Introdução aos Sistemas Dinâmicos**. Rio de Janeiro: Guanabara, 1985.

SORIANO, H. L. **Elementos Finitos – Formulação e Aplicação na Estática e Dinâmica de Estruturas.** Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2009.

STEWART, S. **Understanding Linear Algebra concepts through the Embodied, Symbolic and Formal worlds of mathematical thinking.** 2008. 279f. Tese (Doutoramento em Filosofia da Ciência em Educação Matemática) - Universidade de Auckland, 2008.

YIN, R. **Estudo de Caso:** Planejamento e Métodos, 3. ed., 2005.

RECEBIDO: 01.03.2014.

CONCLUÍDO: 01.04.2014.