VIDYA, v. 35, n. 1, p. 91-107, jan./jun., 2015 - Santa Maria, 2015. **ISSN** 2176-4603

# ASPECTOS DA LINGUAGEM E DO PENSAMENTO ALGÉBRICO MANIFESTADOS POR ESTUDANTES DO 6º ANO EM UM EPISÓDIO DE ENSINO

## *ASPECTS OF ALGEBRAIC THINKING MANIFESTED BY 6TH YEAR STUDENTS IN A TEACHING EXPERIMENT*

**EDILAINE PEREIRA DA SILVA***
**ANGELA MARTA PEREIRA DAS DORES SAVIOLI****

**RESUMO**

Este artigo relata parte de uma pesquisa de mestrado que identificou, analisou e discutiu aspectos do pensamento algébrico e da linguagem manifestados por estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental ao resolverem problemas em um experimento de ensino, metodologia devida a Steffe e Thompson (2000). O referencial teórico utilizado abordou quais processos matemáticos comprovam que crianças do Ensino Fundamental pensem algebricamente. A coleta de informações ocorreu em 2012 em uma escola pública de Palotina – PR. Apresentamos, neste artigo, a análise de um episódio de ensino à luz da análise de conteúdo, segundo Bardin (2004). Como resultado, identificamos alguns aspectos de pensamento algébrico nos registros escritos dos estudantes, destacando o desenvolvimento de uma linguagem sincopada para expressar-se matematicamente, a utilização de símbolos não convencionais e convencionais relacionados a conceitos e propriedades, a compreensão dos conceitos envolvidos no problema, a utilização da proporção direta, a resolução de equações por meio de operações inversas, a análise e expressão de relações entre grandezas desconhecidas sem recorrerem a valores específicos, entre outros.

**Palavras-chave:** Educação Matemática. Pensamento Algébrico. Ensino Fundamental.

***ABSTRACT***

*This article reports part of a master's research aimed to identify, analyze and discuss aspects of algebraic thinking and language manifested by students of the 6th grade of elementary school to solve problems in a teaching experiment, due to Steffe and Thompson (2000). The theoretical framework concerns the mathematical processes which show that children of elementary school think algebraically. Data collection took place in 2012 in a public school in Palotina – PR. In this article, we analyze an episode of teaching in the light of Bardin (2004). As a result, it was possible to identify some aspects of algebraic thinking in written records of students, emphasizing the development of a syncopated language to express mathematically, the use of unconventional and conventional symbols related to concepts and properties, understanding the concepts involved in problem, the use of proportion to solving equations of the first degree by mean of inverse operations, analysis and expression of relationships between the unknown quantities without resorting to specific values, among others.*

***Keywords:*** *Mathematics Education. Algebraic Thinking. Elementary School.*

* Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática. edi-laines@hotmail.com
** Doutora em Matemática. Universidade Estadual de Londrina. angelamarta@uel.br

## INTRODUÇÃO

Ao longo do processo de desenvolvimento da Matemática o pensamento algébrico se fez anterior à linguagem simbólica. Em uma análise histórico-epistemológica, Radford (2001) afirma que a linguagem simbólica surgiu como um instrumento ou técnica e que depois se desdobrou socioculturalmente para um nível em que foi considerada como um objeto da matemática.

A mudança do papel da linguagem e a relevância que ela passa a ter ao longo dos tempos fazem com que os currículos atuais se voltem mais para o formalismo do que para o desenvolvimento do pensamento algébrico, levando estudantes a reproduzirem técnicas sem compreenderem os motivos pelos quais realizam tais procedimentos. Nesses currículos, os conteúdos de álgebra são apresentados formalmente a partir do 7º ano, quando os estudantes passam a conhecer a linguagem algébrica simbólica. Antes disso, é entendido que os estudantes lidam com a álgebra de uma maneira informal, utilizando outras linguagens que não a algébrica.

Nesse sentido, consideramos relevante verificar como estudantes, que ainda não tiveram contato com essa linguagem simbólica, resolvem problemas que convencionalmente são resolvidos por meio dessa linguagem formal e se eles manifestam o pensamento algébrico nessas resoluções.

Assim, neste artigo, apresentamos o primeiro de três episódios de ensino de uma investigação que identificou, analisou e discutiu aspectos do pensamento algébrico e da linguagem manifestados por estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública de Palotina, PR, ao resolverem problemas envolvendo conteúdos algébricos. A escolha desse episódio levou em conta os registros escritos dos estudantes.

## PENSAMENTO ALGÉBRICO E LINGUAGEM ALGÉBRICA

Os Parâmetros Curriculares Nacionais fazem referência ao ensino de álgebra nos anos iniciais e apresentam que,

> [...] embora nas séries iniciais já se possa desenvolver alguns aspectos da álgebra, é especialmente nas séries finais do ensino fundamental que as atividades algébricas serão ampliadas. Pela exploração de situações-problema, o aluno reconhecerá diferentes funções da Álgebra (generalizar padrões aritméticos, estabelecer relação entre duas grandezas, modelizar, resolver problemas aritmeticamente difíceis), representará problemas por meio de equações e inequações (diferenciando parâmetros, variáveis, incógnitas, tomando contato com fórmulas), compreenderá a sintaxe (regras para resolução) de uma equação (BRASIL, 1998, p. 50-51).

A educação algébrica tem focado um ensino de álgebra de forma que entre pensamento algébrico e linguagem exista "[...] não uma relação de subordinação, mas uma relação de natureza dialética [...]" (FIORENTINI; MIGUEL; MIORIM, 1993, p. 85). Além disso, estudos que investigam o desenvolvimento do pensamento têm apontado que crianças dos anos iniciais são aptas a aprender conceitos algébricos, sendo capazes, entre outras coisas, de "[...] resolver problemas algébricos usando vários sistemas de representação, como tabelas, gráficos e equações escritas" (CARRAHER; SCHLIEMANN, 2007, p. 694).

No que se refere às representações, "[...] estudantes também podem expressar essas relações e propriedades por meio de representações escritas ou notações sem que tenham que fazer uso da linguagem convencional algébrica" (BRIZUELA; CARRAHER; SCHLIEMANN, 2000, p. 2).

Ao resolver um problema matemático, o estudante pode utilizar uma linguagem própria, uma vez que "[...] aprender e construir conhecimentos são processos que envolvem invenções – produções novas que criamos, utilizando nossas estruturas cognitivas atuais, enquanto tentamos compreender uma situação ou um fenômeno" (BRIZUELA, 2006, p. 51). Dessa forma, chamamos de linguagem matemática não convencional qualquer forma de representar inventada pelo estudante, diferente de sistemas simbólicos convencionais, desde que expresse ideias matemáticas.

Kieran (1992) discute os pensamentos desenvolvidos por estudantes no ensino tradicional de aritmética e afirma que essa passagem da aritmética para a álgebra requer ajustes de pensamento para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Diante de questões em que estudantes tendem a realizar processos aritméticos em situações que requerem processos algébricos, alguns apontamentos sugerem a necessidade de ajustes no ensino para o desenvolvimento de uma forma algébrica de pensar como:

> 1. Um foco sobre as relações e não apenas sobre o cálculo de uma resposta numérica; 2. Um foco sobre as operações, bem como suas inversas e a ideia relacionada de fazer/desfazer; 3. Um foco em que representam e resolvem um problema, em vez de meramente solucioná-lo; 4. Foco em números e letras, em vez de números por si só; Isso inclui: (i) trabalhar com letras que às vezes podem ser incógnitas, variáveis ou parâmetros; (ii) aceitar fechamento de expressões literais como respostas; (iii) comparar expressões para equivalência baseada em propriedades, em vez de avaliação numérica; 5. Uma reorientação do significado do sinal de igual (KIERAN, 2004, p. 140-141).

Esses ajustes são elementos importantes para a elaboração de currículos para os anos iniciais, e podem contribuir para que as crianças concebam a matemática para além da realização de cálculos.

Concordando com Kieran (2004), acreditamos que o ensino nos anos iniciais deva oportunizar o desenvolvimento do pensamento algébrico dos estudantes, dando ênfase a generalização, modelagem, abstração, justificação, provação, resolução de problemas, entre outras, que também são consideradas como formas algébricas de pensar.

Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005), apresentam alguns aspectos do pensamento algébrico anterior à linguagem simbólica que definem como elementos caracterizadores do pensamento algébrico, quando a criança

> [...] estabelece relações/comparações entre expressões numéricas ou padrões geométricos; percebe e tenta expressar as estruturas aritméticas de uma situação-problema; produz mais de um modelo aritmético para uma mesma situação-problema; ou, reciprocamente, produz vários significados para uma mesma expressão numérica; interpreta uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões numéricas; transforma uma expressão aritmética em outra mais simples; desenvolve algum tipo de processo de generalização; percebe e tenta expressar regularidades ou invariâncias; desenvolve/cria uma linguagem mais concisa ou sincopada ao expressar-se matematicamente [...] (p. 5).

Apesar de abordagens para o ensino de álgebra nos anos iniciais não proporem que estudantes desse nível de ensino possam ser capazes de realizar manipulações algébricas ou que esses estudantes se apropriem da linguagem simbólica, eles podem utilizar a linguagem simbólica como instrumento, seja por meio de símbolos convencionais ou construídos pelos mesmos.

Álgebra como uma maneira de pensar poderia ser definida como a realização de processos algébricos do sujeito ativo, que resolve e entende a atividade algébrica ao invés de meramente reproduzi-la. De acordo com Lew (2004, p. 93), "[...] sucesso em álgebra depende de pelo menos seis tipos de habilidades de pensamento matemático, que são: generalização, abstração, pensamento analítico, pensamento dinâmico, modelagem e organização". No quadro 1, Lew (2004) apresenta os objetivos da álgebra em nível elementar de ensino e as correspondentes habilidades do pensamento algébrico, resultado de uma  discussão a respeito do currículo de álgebra nos anos iniciais na Coreia do Sul.

**Quadro 1** - Objetivos da Álgebra em um nível elementar de ensino.

| Pensamento Algébrico | Objetivos Específicos |
|---|---|
| Generalização | Reconhecer padrões e relações de sequências de números e figuras. |
| | Resolver problemas usando padrões descobertos. |
| | Resolver problemas usando de simplificação. |
| Abstração | Compreender conceitos matemáticos e propriedades. |
| | Usar símbolos relacionados com os conceitos e propriedades. |
| | Atividades operacionais com símbolos abstratos. |
| Pensamento analítico | Resolver equações por métodos intuitivos. |
| | Resolver equações por operações inversas. |
| | Resolver problemas usando um trabalho de volta. |
| Pensamento dinâmico | Separar um número em várias formas e reagrupá-lo. |
| | Resolver problemas usando uma estratégia de tentativa e erro. |
| | Identificar relações entre dois conjuntos de objetos variáveis. |
| | Resolver problemas usando uma proporcionalidade direta. |
| Modelagem | Fazer uma estória relacionada com uma expressão dada. |
| | Fazer um problema relacionado a uma expressão dada. |
| | Representar um problema usando uma expressão adequada. |
| | Modelar uma situação usando um diagrama ou uma figura. |
| Organização | Classificar. |
| | Resolver problema fazendo uma tabela. |
| | Resolver problema usando uma estratégia de dedução lógica. |

**Fonte:** Adaptado de Lew (2004, p. 95)

Após essas reflexões, consideramos como aspectos de pensamento algébrico as evidências de que os estudantes apresentam habilidades desse pensamento para lidar com problemas que envolvem conceitos algébricos, utilizando qualquer tipo de linguagem para se expressar.

## PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS E ANÁLISES

Na pesquisa de mestrado realizada, propusemos três problemas envolvendo conteúdos algébricos a estudantes de um 6º ano, em três episódios de ensino. Nosso intuito era identificar, analisar e discutir aspectos de pensamento algébrico e linguagem manifestados pelos estudantes. Os problemas foram escolhidos de modo a estimular os estudantes a mostrarem seus cálculos com desenhos ou representações de forma que identificássemos que tipos de representações utilizariam.

A turma do 6º ano era formada por 18 estudantes com idade entre 11 e 14 anos de uma escola pública do município de Palotina – PR e os episódios ocorreram durante o horário de aula normal, sendo a primeira pesquisadora a professora da turma. De acordo com informações da escola, todos os estudantes dessa turma apresentavam dificuldades em Língua Portuguesa e Matemática. Os registros dos estudantes receberam a codificação: E1, E2, ..., E18, preservando suas identidades.

A metodologia utilizada foi a do experimento de ensino, a qual considera que os estudantes constroem conceitos e operações matemáticas independentemente de nossas interações com eles e que esses conceitos e operações podem ser diferentes das formas convencionais ou de formas conhecidas pelo pesquisador. De acordo com Steffe e Thompson (2000, p. 267), "[...] um objetivo principal para a utilização da metodologia do experimento de ensino é para o pesquisador experimentar, em primeira mão, a aprendizagem matemática e o raciocínio dos estudantes".

Esse tipo de metodologia é caracterizado por apresentar uma sequência de episódios de ensino que possuem alguns elementos metodológicos incluindo um agente de ensino, uma testemunha e um método de gravação. Os episódios são planejados previamente às aplicações e os registros e gravações de um episódio podem servir na preparação de episódios futuros, bem como na realização da análise conceitual que visa "[...] encontrar motivos racionais para o que os estudantes dizem e fazem" (STEFFE; THOMPSON, 2000, p. 269).

O episódio de ensino[1] em que se deu a aplicação do problema apresentado neste artigo foi gravado em áudio e transcrito pela primeira pesquisadora com a devida anuência dos estudantes e da escola, conforme termo de consentimento livre e esclarecido.

Esse episódio de ensino teve duração de duas aulas de 50 minutos, em que a primeira pesquisadora era mediadora das situações atuando como agente de ensino. A pedagoga da escola atuou como testemunha, observando o episódio e registrando suas observações em notas de campo.

O problema escolhido para esse episódio foi retirado de Brizuela (2006), sendo que fizemos uma pequena adaptação, com uma frase adicional "Mostre com desenhos" para que os estudantes apresentassem outras formas de se expressarem. Esse problema envolve quantidades desconhecidas, variações e relações entre grandezas.

**Figura 1** – Problema aplicado aos estudantes do 6° ano no episódio de ensino

Dois terços de um peixe pesam 10 quilos.

Quanto pesa o peixe ao todo?

Mostre com desenhos.

**Fonte:** Adaptado de Brizuela (2006)

[1] Esse episódio apresentado foi o primeiro dos três referentes á pesquisa de mestrado.

Após a aplicação do problema, a primeira pesquisadora promoveu uma pequena discussão a respeito do mesmo com a turma, resolvendo-o. Com base na Análise de Conteúdo de Bardin (2004), foi construída uma lista contendo os detalhes dos processos de resolução de todos os estudantes que apresentaram registros escritos, em um total de treze. A seguir, foram realizados processos de fragmentação e formação de unidades de significado pela reunião de fragmentos que apresentavam o mesmo sentido e iniciado o agrupamento das unidades de significados em aspectos de pensamento algébrico e linguagem (em um total de doze agrupamentos, denotados por A1, ..., A12). Apresentamos a seguir um quadro com os agrupamentos, os quais não foram excludentes, considerando os aspectos do pensamento e da linguagem que emergiram dessas unidades de significado e uma síntese das análises.

**Quadro 2** - Síntese dos agrupamentos obtidos na análise das respostas dos estudantes.

| **Agrupamentos** | **Estudantes** |
|---|---|
| A1) Compreendem os conceitos matemáticos envolvidos no problema. | (E3, E14, E6) |
| A2) Compreendem parcialmente os conceitos matemáticos envolvendo frações ou não lidam com frações. | (E1, E10, E11) |
| A3) Utilizam símbolos não convencionais e convencionais relacionados a conceitos e propriedades. | (E1, E3, E10, E11, E14) |
| A4) Acrescentam informações ao problema. | (E6, E8, E17, E16, E18) |
| A5) Resolvem problemas usando proporcionalidade direta. | (E3, E6, E14) |
| A6) Resolvem equações por operações inversas. | (E3, E6, E14) |
| A7) Concebem a ideia de relações entre dois conjuntos de objetos variáveis. | (E1, E3, E10, E6, E14, E11, E8, E16, E17, E18) |
| A8) Modelam uma situação problema usando figuras, gráficos, símbolos não convencionais pertinentes e expressões aritméticas. | (E3, E6, E14) |
| A9) Desenvolvem/criam uma linguagem adequada para expressar equivalências e relações. | (E1, E3, E6, E14, E10, E11) |
| A10) Utilizam símbolos matemáticos convencionais atribuindo-lhes outros sentidos. | (E3, E5, E7, E8, E10, E11, E16) |
| A11) Fazem adaptações no problema. | (E1, E8, E10, E11, E16, E17, E18) |
| A12) Não construíram os conceitos matemáticos envolvidos na situação problema. | (E5, E7, E12, E8, E16, E17, E18) |

**Fonte:** As autoras.

Os estudantes E3[3] (figura 4), E14 (figura 9) e E6 (figura 6) estabeleceram relações entre frações e as quantidades envolvidas no problema, compondo o agrupamento A1. Demonstram compreender o termo 'dois terços' e conseguem relacionar a fração à quantidade dez quilos, dividindo por dois para obter o peso equivalente a $\frac{1}{3}$ do peixe. Entendem que $\frac{2}{3}$ é equivalente a dez quilos e que 'dois terços' é o dobro da unidade fracionária. Conseguem determinar que $\frac{1}{3}$ é equivalente a 5 quilos, e que $\frac{3}{3}$ é equivalente a 15 quilos. Esses estudantes percebem e tentam expressar as estruturas aritméticas de uma

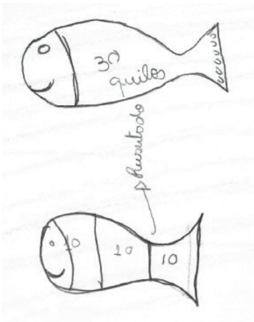
[2] Em alguns momentos, visando o entendimento do leitor, após o código do estudante, segue o número da figura que contempla seu registro escrito.

situação problema que consiste em um dos elementos caracterizadores do pensamento algébrico de acordo com Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005).

Compreendendo conceitos envolvidos no problema, e realizando os cálculos corretamente, os estudantes chegam à resposta correta. De acordo com Lew (2004), compreender conceitos matemáticos e propriedades é um dos objetivos da álgebra para os anos iniciais. A compreensão de conceitos relaciona-se a abstração, considerada por Lew (2004), como uma das habilidades do pensamento algébrico.

Outros estudantes, como E1, E10 e E11 apresentam algum conhecimento em relação ao conceito de fração, pois o termo ‘terço’ os leva a dividir o peixe em três partes. No entanto, não fazem alusão ao numerador ‘dois’, levando-nos a afirmar que eles compreendem parte do conceito, constituindo o agrupamento A2. Esse grupo não divide dez por dois. Realizam uma operação pertinente ao problema que consiste na multiplicação por três ou na adição das quantidades correspondentes a cada parte do peixe embora não realizem a divisão por dois. Vejamos o registro do estudante E1 na figura 2.

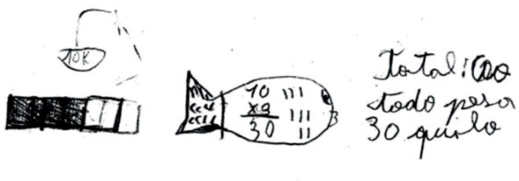
**Figura 2** – Registro do estudante E1




A ideia apresentada é a de juntar as partes. A seta serve para indicar a direção do cálculo e o resultado. Não é feita referência ao numerador (dois) da fração, apenas ao denominador (peixe dividido em três partes).

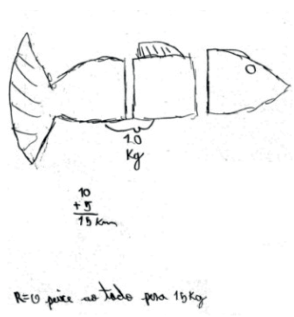
Na figura 3, o estudante E10 representa a fração “dois terços” por uma barra. Podemos verificar que ele coloriu duas partes, mas não tem o conceito bem construído de forma a não conseguir realizar os processos adequados, pois multiplica 10 por três.

**Figura 3** – Registro do estudante E10




Cinco estudantes (E1, E3, E10, E11, E14) apresentam uma linguagem que expressa ideias matemáticas, utilizando símbolos improvisados. Por exemplo, os estudantes E3 (figura 4), E11 utilizaram chaves para indicar agrupamentos e o estudante E1 (figura 2) usou setas para indicar o resultado. Já os estudantes E10 (figura 3), E11, E14 (figura 9) utilizaram gráficos. Além disso, esses estudantes expressaram de maneira adequada os conceitos envolvidos, que são características do agrupamento A3, isto é, utilizam-se de símbolos não convencionais e convencionais relacionados a conceitos e propriedades. Destacamos E6 (figura 6) que desenha uma balança na qual um dos pratos contém dois peixes e o outro contém três peixes expressando a ideia de razão empregada para lidar com a fração dois terços.

**Figura 4** – Registro do estudante E3

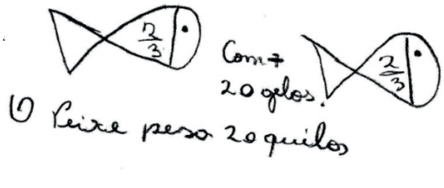



Alguns registros apresentam informações que não fazem parte do problema proposto. Esses registros (E6, E8, E17, E16, E18) foram reunidos formando o agrupamento A4 dos estudantes que acrescentam informações ao problema. Embora o contexto do problema proposto se refira a um único peixe, alguns estudantes acreditam haver mais peixes. Desenham potes cheios de peixes para representar dez quilos e cinco quilos de peixe, conforme, por exemplo, o estudante E6 na figura 6. Dessa forma, demonstram considerar que todos os peixes têm o mesmo peso, e que os quilos aumentam proporcionalmente à quantidade de peixes.

Esses estudantes apresentam uma tendência em trazer elementos do seu cotidiano e de suas crenças no momento de resolução de um problema matemático. Consideramos esses elementos como uma dificuldade em resolver problemas com contextos próprios ou distintos do contexto que estão acostumados.

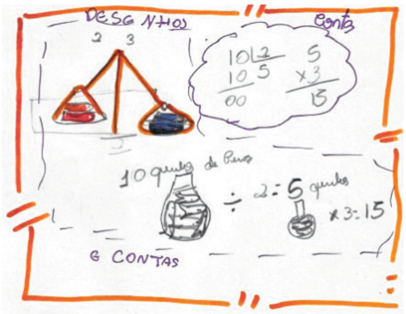
No registro de E8 (figura 5), os dois peixes desenhados não levam à ideia de comparação e sim a de quantidade de peixes. O estudante inclui elementos que não fazem parte da situação problema, como os gelos, e escreve que os peixes pesam 20 quilos e 'com + 20 gelos'.

**Figura 5** – Registro do estudante E8




Verificamos em alguns registros que estudantes do 6º ano podem apresentar um raciocínio proporcional uma vez que resolvem o problema usando a proporcionalidade direta, formando o agrupamento A5. Os estudantes E3 (figura 4) e E14 (figura 9) entendem que se $\frac{2}{3}$ do peixe equivalem a dez quilos, $\frac{1}{3}$ do peixe equivale a cinco quilos e, portanto, $\frac{3}{3}$ do peixe equivalem a 15 quilos. Expressam a proporcionalidade juntando duas partes correspondentes a dez quilos (E3), relacionando cada grandeza equivalente com desenhos, notações para frações e quantidades, além da utilização de gráficos (E14). O estudante E6 percebe que dois está para dez assim como três está para o peso total do peixe e expressa essa relação proporcional por meio de uma balança, um pote maior e um pote menor. O registro escrito desse estudante apresenta a ideia de que a quantidade de peixes é diretamente proporcional aos quilos de peixes, uma vez que, imaginou que todos os peixes tinham o mesmo peso.

**Figura 6** – Registro do estudante E6




O uso da proporcionalidade para resolver equações era uma prática comum entre os egípcios na fase retórica da álgebra, ao empregar método da falsa posição (BAUMGART, 1992), e podemos verificar que consiste em uma prática entre os estudantes. Radford (2001) sugere que o pensamento algébrico das antigas civilizações se mostra relacionado ao pensamento proporcional e que o ensino de álgebra poderia explorar razões e proporções seguindo os caminhos da história. Lew (2004) considera que um dos objetivos da álgebra em um nível elementar é “resolver problemas usando uma proporcionalidade direta” e relaciona-a a um pensamento dinâmico.

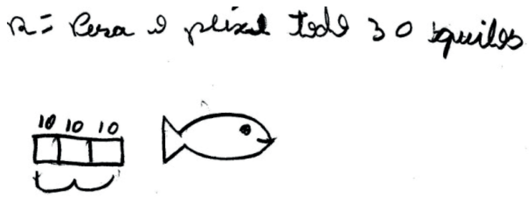
O problema apresentado poderia ser representado pela equação $\frac{2}{3}x=10$, em que x representa a massa total do peixe. Nesse caso, x é multiplicado por dois e divido por três, e em resoluções formais aplicamos as operações inversas na quantidade dez. Assim, dividimos dez por dois e multiplicamos por três. Os estudantes E6 (figura 6) e E14 (figura 9) realizaram essas operações inversas mesmo não conhecendo a linguagem formal, e o estudante E3 (figura 4) utiliza uma das operações inversas, compondo o agrupamento A6 que se refere a resolver equações por meio de operações inversas. De acordo com Lew (2004), resolver equações por meio de operações inversas, mesmo quando não se usa a formalidade é uma maneira de pensar analiticamente. O uso das operações inversas consiste na busca de outras expressões equivalentes à expressão dada no problema, e trata-se de um aspecto de pensamento algébrico presente nas resoluções desses estudantes, pois, de acordo com Kieran (1992, p.4), pensar algebricamente envolve a realização de “processos mentais como raciocinar com incógnitas”, por exemplo.

A ideia de dois conjuntos relacionados, em que os objetos variam, aparece na resolução de alguns dos estudantes, formando assim o agrupamento A7. No entanto, essa ideia aparece em três tipos de resoluções distintas, levando-nos a organizar em subagrupamentos de acordo com a maior apropriação dos conceitos envolvidos no problema.

No subagrupamento 1, E3 (figura 4), E6 (figura 6) e E14 (figura 9) identificam relações entre dois conjuntos de objetos variáveis e deixam claro em suas representações que cada terço do peixe equivale a cinco quilos. Encontram o valor da incógnita, porém evidenciando a ideia de variável em que a massa varia em função da quantidade de terços. De acordo com Kieran (2004), o pensamento algébrico nos anos iniciais envolve o desenvolvimento de formas de pensar no âmbito de atividades como estudar variações. Entendemos que esses estudantes resolvem uma equação usando operações inversas, mas ao mesmo tempo expressam variáveis em suas representações. Constatamos a presença de um pensamento funcional na resolução desse problema, ao qual geralmente é atribuída a ideia de incógnita e não de variável.

No subagrupamento 2, os estudantes E1, E10 e E11 estabelecem relações entre duas grandezas desde que conheçam a quantidade relacionada com a unidade fracionária. Nas resoluções deste grupo, verificamos que representam conjuntos relacionados, fazendo dois desenhos de um mesmo objeto, de forma que possam ser comparados. Vejamos a figura 7.

**Figura 7** – Registro do estudante E11

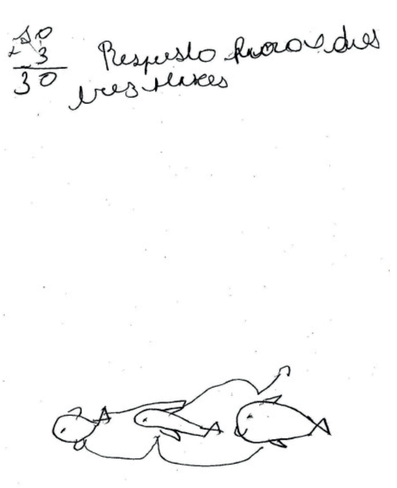



A barra construída por E11 se refere ao todo dividido em três partes, cada parte equivalente a dez.

No terceiro subagrupamento, os estudantes E8, E16, E17, E18 estabelecem relações entre duas grandezas desde que conheçam a quantidade relacionada com a unidade inteira. Consideram que um peixe tem dez quilos e três peixes, 30 quilos. Fazem desenhos se referindo à quantidade de peixes. Desenham três peixes (E16, E17, E18), sem escrever a quantidade que está associada a cada peixe. Não se referem às frações em suas resoluções.

Vejamos o registro escrito do estudante E18, na figura 8, no qual aparece a referência a três peixes tanto no desenho como em sua resposta.

**Figura 8** – Registro do estudante E18



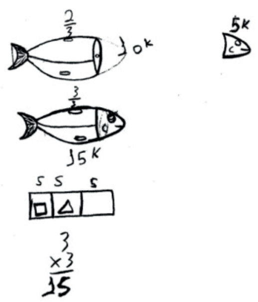
Em geral, esses estudantes não compreendem os conceitos matemáticos envolvidos na situação problema. Vejamos um fragmento do episódio que evidencia essa característica.

*E17: _ Eu não sei fazer.*
*Professora: _ O que você não entendeu?*
*E17: _Eu não sei o que é dois terços.*
*Professora: _Você estudou frações no ano passado?*
*E17: _ Estudei, mas eu não aprendi essa matéria.*

É possível perceber que esses estudantes não conseguem lidar com frações. Apresentar dois terços na forma a/b, parece não ter os ajudado na resolução da questão. Utilizam o numerador ou o denominador da fração como se fossem quantidades de peixes e concebem relações, desde que a quantidade informada no problema esteja relacionada a uma unidade.

Quatro estudantes apresentam todas as representações pertinentes ao problema proposto e modelam o problema formando o agrupamento A8, uma vez que modelam uma situação problema utilizando figuras, gráficos, símbolos não convencionais pertinentes e expressões aritméticas. Utilizam expressões aritméticas adequadas e desenhos para representar frações, desenhos para representar proporções (E14 (figura 9), E6 (figura 6)), desenhos para representar incógnitas (E3 (figura 4), E14), e conseguem criar um modelo para a situação problema. Embora esses estudantes não conheçam a linguagem simbólica formal, um deles consegue representar uma equação com símbolos não convencionais (E3). Outro estudante expressa uma relação de proporcionalidade (E6), com desenhos e operações. O estudante E14 representa relações e equivalências com desenhos e operações.

**Figura 9** – Registro do estudante E14




O estudante E3 (figura 4) escreve uma equação utilizando desenho e um símbolo que indica a relação das duas partes à quantidade dez.

O estudante E3 (figura 4) expressa que $\frac{2}{3}$ do peixe é igual a dez quilos. Representa uma equação de maneira não convencional, utilizando uma espécie de chave que associa as duas partes. O sinal de igual foi usado pelo estudante para dar a resposta do problema, o que nos leva a entender que não atribui um significado relacional para este sinal. Utilizou outro símbolo para expressar a relação e do sinal de igual para indicar a resposta.

Os registros que apresentaram o desenvolvimento/invenção de uma linguagem adequada para expressar equivalências e relações formaram o agrupamento A8. Nesses registros, o estudante E3 usou chaves para a ideia de juntar e indicar equivalência entre quantidades, E1 e E14 expressam relações entre grandezas usando dois desenhos comparativos, sendo em alguns casos, o desenho de dois peixes em que um está dividido e o outro não. Os estudantes E10, E11, E14 (figura 9) apresentam um desenho e um peixe e o estudante E6 uma balança em que um dos pratos tem dois peixes e o outro três peixes, conforme figura 6.

Para Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005), desenvolver uma linguagem mais concisa ou sincopada ao expressar-se matematicamente consiste em um elemento caracterizador do pensamento algébrico. Verificamos o uso de uma linguagem algébrica não convencional por parte desses estudantes. Podemos dizer que entre o pensamento e linguagem nesses registros subsiste "não uma relação de subordinação, mas uma relação de natureza dialética,..." (FIORENTINI; MIGUEL; MIORIM, 1993, p. 85). Entendemos que esses estudantes apresentam um pensamento estrutural, uma vez que,

> [...] enquanto ideias algébricas são vestidas em palavras e em apenas palavras, é difícil imaginar a abordagem estrutural mais avançada, onde os processos computacionais são considerados em sua totalidade a partir de uma perspectiva mais elevada, e onde as inclinações operacionais e estruturais se encontram nas mesmas representações. Isto quer dizer que, as palavras não são manipuláveis da forma que os símbolos são. É esta manipulação que torna possível que conceitos algébricos tenham a qualidade como objeto. É a possibilidade de realizar processos de alto nível sobre os processos representados por expressões compactas que estimulam o pensamento estrutural (SFARD; LYINCHEVSKY, 1994a, p. 197).

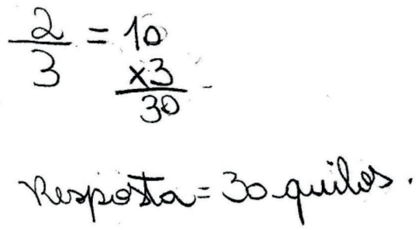
Embora os estudantes não tenham utilizado símbolos convencionais, a linguagem empregada tem característica simbólica. Expressam os processos e propriedades dos objetos envolvidos na situação problema. Brizuela (2006, p. 51), afirma que "aprender e construir conhecimentos são processos que envolvem invenções – produções novas que criamos, utilizando nossas estruturas cognitivas atuais, enquanto tentamos compreender uma situação ou um fenômeno." Com uma linguagem simbólica própria, esse último grupo foi bem sucedido na resolução do problema.

Com relação à figura 9, o estudante E14 utiliza desenhos, a forma a/b e as barras para expressar o conceito de fração. Na parte superior esquerda do registro podemos verificar a equivalência que de maneira convencional expressamos por $\frac{2}{3}x = 10$, em que x representa a massa do peixe. Na parte superior direita encontra-se a equivalência $\frac{1}{3}x = 5$. Mais abaixo temos que $\frac{3}{3}x = 15$. A barra dividida em três partes, das quais duas contêm figuras geométricas expressam o raciocínio proporcional apresentado pelo estudante. Os desenhos dos dois peixes expressam transformações algébricas significativas, atreladas ao contexto do problema. Os desenhos dos dois peixes, um de cabeça cortada e um peixe inteiro, mostram que uma comparação foi feita entre as quantidades relacionadas, o que nos leva a afirmar que esses desenhos sejam um tipo de tabela não convencional. A construção de tabelas e diagramas ou desenhos são aspectos do pensamento algébrico relacionados à organização (LEW, 2004), conforme quadro 1.

Embora alguns estudantes tenham apresentado símbolos matemáticos convencionalmente utilizados, estes se mostram dissociados ou distanciados dos conceitos matemáticos aos quais se referem, formando o agrupamento A10, ou seja, utilizam símbolos matemáticos convencionais atribuindo-lhes outros sentidos. Os estudantes E5, E7, E8 e E16 (figura 10) apresentaram em seus registros notações convencionais para frações na forma a/b e demonstraram não compreender o conceito, ou mesmo, não compreendem o objeto matemático por detrás do símbolo, pois suas resoluções não são pertinentes.

Algumas dificuldades com a simbologia que os estudantes apresentam em álgebra são decorrentes da atribuição de significado aritmético para os símbolos levando-os a realizarem processos aritméticos em expressões algébricas conforme afirmações de Booth (1995) e Kieran (1981).

**Figura 10** – Registro do estudante E16



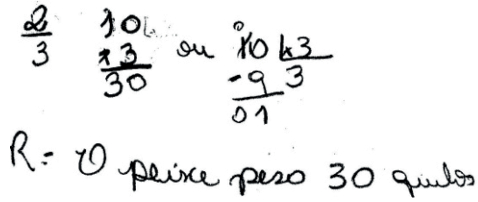

O registro evidencia a falta de significado para a forma a/b e para o sinal de igual. Há evidências de que o estudante E16 não associa dez quilos a $\frac{2}{3}$ do peixe, mas tenta associar dez a $\frac{2}{3}$ e, em seguida, usa o dez que está a frente do sinal de igual para montar a operação de multiplicação. A representação $\frac{2}{3}$ é apresentada, embora não compreenda o conceito por detrás do símbolo. O sinal de igual aparece na parte inferior como um indicador da resposta. Na parte superior entendemos o sinal de igual como um separador entre a informação do problema e o cálculo, aparecendo novamente como um indicador. Demonstra que esse estudante não atribui um significado relacional para o sinal de igual apresentando uma das dificuldades descritas por Booth (1995) e Kieran (1981), comuns em crianças que se iniciam em álgebra nos anos finais do Ensino Fundamental.

Alguns registros apresentavam em comum o fato de necessitarem adaptar o problema à sua capacidade de resolução, formando o agrupamento A11. Os estudantes E1, E10 e E11 resolvem o problema ‘terços de um peixe em massa igual a dez quilos’. A palavra ‘dois’ é desconsiderada. É como se eles adaptassem o problema ao nível de conhecimento do qual dispõem, para resolvê-lo. Esses estudantes conseguem lidar com $\frac{1}{3}$, mas encontraram dificuldades em lidar com $\frac{2}{3}$. Os estudantes E16, E17 e E18 adaptam o problema para ‘um peixe tem massa igual a dez quilos. Quanto de massa tem três peixes?’ Apresentam indícios de dificuldades em lidar com frações, e substituem o termo ‘terços’ pela quantidade ‘três’. O estudante E8 desenha dois peixes e escreve a notação $\frac{2}{3}$ no interior dos peixes. Esse estudante refere-se à quantidade dois devido ao numerador da fração. Todos esses estudantes (E1, E10, E11, E16, E17, E18) lidam com uma unidade de grandeza para comparar, como: um peixe pesa 10 quilos ou uma parte do peixe pesa dez quilos.

Alguns estudantes, E5, E7 (figura 11), E12, E8, E16, E17, E18, utilizam representações dissociadas de conceitos ou não conseguem utilizar gráficos e notações para frações de forma pertinente. Tentam representar, mas não são bem sucedidos, constituindo o agrupamento A12. Suas operações demonstram que não compreendem os conceitos envolvidos na situação.

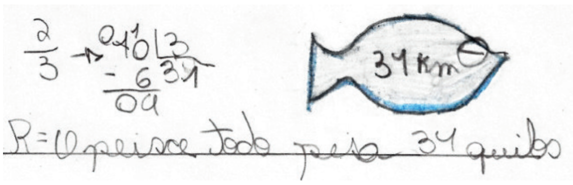
Alguns estudantes não conseguem estabelecer as relações de forma pertinente uma vez que não identificam o que relacionar. Isso porque as frações consistem ainda em algo sem significados para esses estudantes. No registro dos estudantes E5, E7, E12 não há indícios de que eles utilizam os conceitos de frações para resolver a questão, embora registrem representações que em geral não servem como ferramenta para a resolução. Vejamos o registro escrito de E7.

**Figura 11** - Registro do estudante E7




O estudante E7 além de não interpretar corretamente o problema, apresenta indícios de dificuldades em relação à divisão.

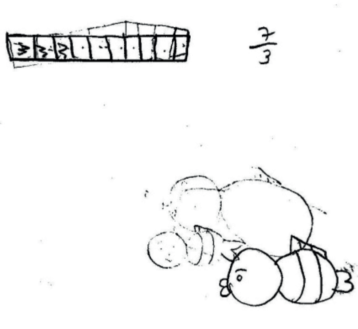
**Figura 12** – Registro do estudante E5




O registro do estudante E5 mostra a falta de significados atribuídos à linguagem matemática. O sinal de igual é utilizado para dar uma resposta, $\frac{2}{3}$ é associado a uma divisão de dez por três e a resposta obtida no processo algorítmico não foi analisada. O resto da divisão é maior do que o divisor, e o resultado da operação 'dez dividido por três' deu um número maior do que dez. Há indícios de uma resolução realizada de forma mecânica em que não há associações mentais a conceitos, e não se realiza análise de resultados.

Esses estudantes seriam bem sucedidos na resolução do problema se pensassem "a respeito de operações aritméticas como funções em vez de meros cálculos de números específicos" (CARRAHER; SHLIEMANN, 2007, p. 694) e se realizassem cálculos aritméticos fazendo análise dos resultados e associações entre as operações inversas.

**Figura 13** – Registro do estudante E12



O estudante E12 faz um desenho divido em dez partes ao invés de três partes. Portanto, o desenho construído está dissociado da situação problema proposta. Apesar de o corpo do peixe estar dividido em três partes, o estudante não conseguiu em momento algum relacionar à quantidade dez. Assim, ele utiliza a informação ‘dez’ como se fosse o denominador da fração, uma vez que a barra construída está divida em dez partes. Dessas dez partes, três foram destacadas pelo estudante nos levando a perceber que a expressão ‘terços’ apresentada no problema foi considerada como a quantidade de partes a ser destacada, como se esse fosse o numerador da fração. O estudante não consegue representar o problema adequadamente e nem realizar atividades operacionais com símbolos abstratos que consiste em um dos objetivos da álgebra em um nível elementar relacionado aos processos de abstração apresentados por Lew (2004).

No desenho da figura 13 há um destaque nas sete partes brancas restantes e à frente aparece a fração $\frac{7}{3}$. Dessa forma, consideramos que para esse estudante, a forma a/b é utilizada para a ideia de razão, mas não para a ideia de parte-todo. A quantidade dez representada no desenho, não aparece na forma a/b construída a frente do mesmo. O numerador apresenta a quantidade de partes brancas do desenho e o denominador se refere à quantidade de partes destacadas.

Os estudantes E8 (figura 5), E16 (figura 10), E17, E18 (figura 8) lidam apenas com quantidades inteiras, fazem desenhos se referindo a dois e três peixes e em momento algum utilizam notações relacionadas a frações.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Após o processo de análise das informações coletadas, identificamos alguns aspectos de linguagem e de pensamento algébrico manifestados por estudantes do sexto ano do Ensino Fundamental ao resolverem um problema em um episódio de ensino, a saber: concebem a ideia de relações entre dois conjuntos de objetos variáveis; desenvolvem/criam uma linguagem adequada para expressar equivalências e relações; utilizam símbolos não convencionais e convencionais relacionados a conceitos e propriedades; compreendem os conceitos matemáticos envolvidos no problema; resolvem problemas usando proporcionalidade direta; resolvem equações por meio de operações inversas; modelam uma situação problema utilizando figuras, gráficos, esquemas, símbolos não convencionais pertinentes e expressões aritméticas; compreendem parcialmente os conceitos matemáticos envolvendo frações ou não lidam com frações; utilizam símbolos matemáticos convencionais atribuindo-lhes outros sentidos.

Acreditamos que essa pesquisa proporcionou aos estudantes oportunidades de desenvolver o pensamento algébrico mostrando que é possível introduzir álgebra sem necessariamente ter uma linguagem algébrica formal conhecida.

Concluímos que embora os estudantes do 6º ano, cujos registros escritos foram analisados, sejam capazes de pensar algebricamente, se mostram influenciados por uma forma de fazer matemática rotineira em que a reprodução se sobrepõe à reflexão. Aprender matemática fazendo “sempre” da mesma maneira não exige a realização de atividades de análise e justificação. Os aspectos de pensamento algébrico apresentados por esses estudantes consistem em um conhecimento intuitivo, pouco consolidado, que poderia ser mais explorado pelo currículo dos anos iniciais. Além disso, esperamos que os estudantes possam lidar com a Matemática racionalmente, o que envolve a construção de conceitos matemáticos básicos nos anos iniciais de forma que possam ter mais sucesso na resolução de problemas.

## AGRADECIMENTOS

Agradecemos à Fundação Araucária pelo apoio financeiro.

## REFERÊNCIAS

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. 3ª ed. Lisboa: Edições 70, 2004.

BAUMGART, J. K. **História da Álgebra**. São Paulo: Atual, 1992.

BOOTH, L. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (Org). **As ideias da álgebra.** São Paulo: Atual, 1995, p. 23-37.

BRASIL. Ministério de Educação e do Desporto. **Parâmetros curriculares nacionais:** terceiro e quarto ciclos: Matemática / Secretaria de Ensino Fundamental. Brasília, MEC/SEF, 1998.

BRIZUELA, B. M. **Desenvolvimento matemático na criança: explorando notações.** 1ª ed. Porto Alegre: Artmed, 2006.

BRIZUELA, B. M.; CARRAHER, D. W.; SCHLIEMANN, A. D. **Mathematical notation to support and further reasoning ("to help me think of something").** Symposium paper, 2000 NCTM Research Pre-session Meeting, 18 p. 1998.

CARRAHER, D. W.; SCHLIEMANN, A. D. Early algebra and algebraic reasoning**.** In: LESTER, F. (Ed.). **Second handbook of research on mathematics teaching and learning**. Charlotte, USA: NCTM e IAP, 2007, p. 669-705.

FIORENTINI, D.; FERNANDES, F. L. P.; CRISTOVÃO, E. M. **Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico**. Seminário Luso-Brasileiro de Investigações Matemáticas no currículo e na formação do professor. Lisboa: Editora Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, 2005. Disponível em: <http://bit.ly/1FgcDcg>. Acesso em 03 out. 2011.

FIORENTINI, D.; MIGUEL, A; MIORIM, M. A. Contribuições para um repensar... A educação algébrica elementar. **Pro-prosições**, v. 4, n 1, 1993, p. 78-91.

KIERAN, C. Concept associated with the equality symbol. **Educational studies in Mathematics**. Springer, v. 12, 1981, p. 317-326.

KIERAN, C. The learning and teaching of school algebra. In GROUWS, D. A. (Ed.). **Handbook of research on mathematics teaching and learning.** New York: Macmillan, 1992, p. 390-419.

KIERAN, C. Algebraic thinking in the early grades: What is it? **The Mathematics Educator**. Georgia, v. 8, n. 1, 2004, p. 139-151.

LEW, H. C. Developing Algebraic Thinking in Early Grades: Case Study of Korean Elementary School Mathematics. **The Mathematics Educator**. Georgia, v. 8, n. 1, 2004, p. 88-106.

RADFORD, L. The historical origins of algebraic thinking. In: SUTHERLAND, R.; ROJANO, T; BELL, A; LINS, R**. Perspectives in School Algebra.** Dordrecht /Boston/ London: Kluwer, 2001, p. 13-36.

SFARD, A; LINCHEVSKI, L. The gains and the pitfalls of reification – the case of algebra. **Educational Studies in Mathematics**. Springer, v. 26, 1994, p. 191-228.

STEFFE, L. P.; THOMPSON, P. W. Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In: LESH, R; KELLY, A. E. (Eds). **Research design in mathematics and science education.** Hillsdale, NJ: Erbaum, 2000, p. 267-307.

RECEBIDO EM: 24 mar. 2015
CONCLUIDO EM: 25 mai. 2015