VIDYA, v. 38, n. 1, p. 109-128, jan./jun., 2018 - Santa Maria, 2018. **ISSN** 2176-4603

APREENSÕES MOBILIZIDAS NO ESTUDO DA ÁREA DO CÍRCULO POR ALUNOS DO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

APPREHENSIONS MOBILIZED IN THE STUDY OF THE AREA OF THE CIRCLE BY 9TH-GRADE STUDENTS OF LOWER SECONDARY EDUCATION

PRISCILA ARCEGO*
RITA DE CÁSSIA PISTÓIA MARIANI**

RESUMO

Este artigo objetiva investigar como as apreensões em geometria são mobilizadas por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental no estudo da área do círculo, a partir de atividades didáticas desenvolvidas em uma escola do sistema municipal de Erechim/RS, seguindo os pressupostos metodológicos da pesquisa qualitativa e os princípios da análise de conteúdo. As categorias foram constituídas com base na identificação das apreensões sequencial, perceptiva, discursiva e operatória. Com a análise dos protocolos das atividades, constatou-se que todas as respostas dos alunos mobilizaram uma ou mais apreensões, potencializando a coordenação de diferentes registros de representação semiótica, especialmente o registro em língua natural e figural. Tais atividades permitem propor encaminhamentos didáticos que conduzem à exploração das ideias relacionadas ao método da exaustão.

Palavras-chave: Apreensões; Registros de representação semiótica; Ensino de geometria; Área do círculo; Ensino Fundamental.

ABSTRACT

This article aims to investigate how geometry apprehensions are mobilized by students of the 9th grade of Lower Secondary Education in the study of the area of the circle, based on didactic activities developed in a municipal school of Erechim/RS, following the methodological assumptions of qualitative research and the principles of content analysis. The categories were constituted from the identification of sequential, perceptual, discursive and operative apprehensions. By the analysis of the activities' protocols, it was verified that all the students' answers mobilized one or more apprehensions, potentializing the coordination of different registers of semiotic representation, especially the natural language and figural registers. Such activities allow us to propose didactic actions that lead to the exploration of ideas related to the method of exhaustion.

Keywords: *Apprehensions; Registers of semiotic representation; Teaching geometry; Area of circle; Lower Secondary Education.*

* Licenciada em Matemática pela Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões - URI Erechim, Especialista em Matemática, Mídias Digitais e Didática: Tripé para Formação do Professor de Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Ensino de Física (PPGEMEF). Universidade Federal de Santa Maria (UFSM). Professora na Escola Municipal de Ensino Fundamental Jaguaretê, Erechim-RS. E-mail: priarcego@gmail.com.
** Professora Associada da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM). Docente do Departamento de Matemática. E-mail: rcpmariani@yahoo.com.br.

INTRODUÇÃO

Neste artigo serão apresentados alguns resultados que caracterizam a mobilização das apreensões em geometria durante o estudo da área do círculo. Os dados foram coletados durante o desenvolvimento de duas atividades didáticas implementadas em uma pesquisa de mestrado[1] envolvendo alunos do 9º ano do Ensino Fundamental de uma Escola municipal de Erechim/RS.

A pesquisa tem relevância, sobretudo, pelo fato de tomar como ponto de partida o ensino de geometria no Ensino Fundamental, a partir dos documentos que orientam propostas curriculares no país (BRASIL, 1997; BRASIL, 1998; BRASIL, 2017), além de estudos que caracterizaram o ensino desse campo da matemática desde a década de 1990 (PAVANELLO, 1989; PAVANELLO, 1993; LORENZATO, 1995) até a atualidade (ANDRADE; NACARATO, 2004; CLEMENTE et al., 2015; SENA; DORNELES, 2013). Além disso, são apontados aspectos que investigaram propostas didáticas para diferentes anos do Ensino Fundamental (LORENZATO, 2015; LEIVAS, 2012, 2016; GRAVINA, 2015; SCHEFFER, 2015), bem como sobre os registros de representação semiótica (DUVAL, 2009, 2011, 2012a, 2012b), a fim de evidenciar as representações e apreensões mobilizadas acerca do objeto matemático estudado.

Nesse sentido, propõe-se apontar indícios para seguinte questão: Como as apreensões são mobilizadas por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental no estudo da área do círculo, a partir de uma proposta do livro didático? Para tanto, utiliza-se como referencial teórico metodológico a pesquisa qualitativa proposta por Lüdke e André (1986) e os princípios da análise de conteúdo segundo Bardin (2016), que se desenvolve a partir de três polos cronológicos: pré-análise; exploração do material; tratamento dos resultados, inferência e interpretação.

Na proposta apresentada pelo livro didático (LD) *Vontade de Saber Matemática,* adotado pelos participantes deste estudo, o aluno é conduzido a deduzir a expressão algébrica que permite obter a área do círculo, utilizando um método de reconfiguração que explora o registro figural do círculo. Essa estratégia possui características do princípio da exaustão e sugere o uso de material manipulável para realizar as modificações figurais. Diante dessa proposta inicial, optou-se por ampliar as atividades inserindo questões para serem desenvolvidas com apoio do *software* GeoGebra a partir de um *applet* adaptado pelas autoras. Esse recurso permite validar e aprimorar de forma experimental conjecturas matemáticas expressas com o uso do material manipulável e ao mesmo tempo favorece a mobilização das diferentes apreensões figurais.

As atividades foram aplicadas na Escola que a primeira autora atua como coordenadora pedagógica e professora dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Esta instituição está localizada na zona rural do município de Erechim e atende 100 estudantes da Pré-escola ao 9º ano do Ensino Fundamental. A escola possui apenas uma turma de cada nível, por isso, a turma envolvida nesta pesquisa contém um número restrito de alunos, ou seja, é relativamente pequena, composta por seis alunos, sendo apenas uma menina. A maioria dos alunos demonstra comprometimento nas tarefas escolares e apresenta um bom desempenho nas avaliações internas e externas. Um deles é medalhista de bronze na OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas) nas edições de 2015 e 2016 e prata na edição de 2017, participando há dois anos do Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC).

[1] ARCEGO, P. Representações semióticas mobilizadas no estudo da área do círculo no Ensino Fundamental. 2017. 155 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2017.

O ENSINO DE GEOMETRIA

A geometria, como conhecimento matemático, é destaque nos PCN propostos para 5ª a 8ª série[2] (BRASIL, 1998), pois, permite ao aluno desenvolver um raciocínio particular para compreender, descrever e representar o mundo em que vive de forma organizada. É contemplada em pelo menos dois dos quatro grandes blocos de conteúdos, denominados de *Espaço e Forma* e *Grandezas e Medidas,* seguidos de outros dois blocos Números e Operações e *Tratamento da Informação*.

Brasil (1998) indica ainda que há uma intrínseca relação entre os blocos que abordam conceitos geométricos na medida em que, exploram situações-problema e propõem a utilização de *softwares* matemáticos no desenvolvimento do raciocínio geométrico. Nesse sentido, "O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula o aluno a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades, etc." (BRASIL, 1998, p. 51).

As orientações do bloco *Espaço Forma* sugerem, primordialmente, a exploração de objetos do mundo físico, relacionando a matemática a outras áreas do conhecimento. Ainda, propõe o aprofundamento das propriedades das figuras tridimensionais e bidimensionais no decorrer do Ensino Fundamental e a incorporação de outros conteúdos geométricos descritos no documento. O bloco *Grandezas e Medidas*, por sua vez, prevê que o estudo das diferentes unidades de medida seja desenvolvido por meio de situações-problema que levem à análise de acontecimentos práticos.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2017), homologada em 20 de dezembro de 2017 para a Educação Infantil e o Ensino Fundamental, apresenta competências específicas para o ensino da matemática a partir de cinco unidades temáticas: *Números*; *Álgebra*; *Geometria*; *Grandezas e medidas*; e *Probabilidade e estatística.* Contudo, assim como os PCN, a BNCC recomenda a articulação da geometria com outras áreas do conhecimento, entre as unidades temáticas e no interior de cada uma delas, considerando que, a cada ano, as noções matemáticas devem ser retomadas, ampliadas e aprofundadas.

No que diz respeito à unidade temática da *Geometria*, a BNCC também prevê a retomada e ampliação dos conteúdos abordados nos anos iniciais, inserindo outros tópicos, como transformações e ampliações/reduções de figuras geométricas, relações de semelhança e congruência expressas por meio de demonstrações simples, aproximando o ensino de geometria e da álgebra. Na unidade *Grandezas e medidas* recomenda-se reconhecer as diferentes grandezas (comprimento, área, volume e ângulo) e associá-las às figuras geométricas a partir de unidades de medida padronizadas e usuais.

A BNCC também dá providências específicas à abordagem da circunferência e do círculo para o Ensino Fundamental. Na unidade da *Geometria*, recomenda que no 1º e 2º ano o círculo seja reconhecido como figura plana e de forma gradativa explicite suas características. No 7º ano, a circunferência é abordada como lugar geométrico, explorando a medida de seu comprimento. Já na unidade *Grandezas e medidas* do 8º ano, propõe-se o estudo da área do círculo e o comprimento de sua circunferência na resolução e elaboração de problemas envolvendo a área de diferentes formas geométricas. No 9º ano o bloco da *Geometria* explora as relações entre arcos e ângulos na circunferência, destacando também a resolução de problemas e a utilização de *softwares* de geometria dinâmica.

O ensino da geometria tem subsidiado pesquisas ainda no início da década de 1990, antecedendo a publicação dos documentos orientadores. Nesse sentido, destacam-se as relevantes produções de Pavanello (1989, 1993) e Lorenzato (1995) que alertaram sobre a importância da geometria na

---

[2] A partir da Lei nº 11.274, de 6 de fevereiro de 2006, que amplia o Ensino Fundamental para 9 anos, substitui-se a nomenclatura *série* por *ano*. Por isso, o PCN de 5ª a 8ª série equivale do 6º ao 9º ano (anos finais).

Educação Básica e relacionaram aspectos que estavam conduzindo a ausência desses conhecimentos nas aulas de Matemática.

Para Lorenzato (1995), os dois grandes motivos que corroboravam a escassez da geometria em sala de aula foram, a falta de domínio dos professores em relação aos conteúdos de geometria, também evidenciada na pesquisa de Pavanello (1989); e o apego excessivo ao livro didático, que não apresentava uma constituição favorável ao ensino dessa área da matemática. Para ambos os autores, esses fatores foram agravados pelo Movimento da Matemática Moderna (MMM) iniciado no Brasil em 1960. Essa nova proposta estava baseada na algebrização da geometria e eliminava o modelo anterior que primava pelo ensino lógico-dedutivo da geometria. Mas, para Lorenzato (1995), além de não obter êxito, acabou ampliando as lacunas nas práticas pedagógicas.

Pavanello (1889, 1993), ainda destaca a influência da Lei de Diretrizes e Bases (LDB) do Ensino de 1º e 2º Graus, Lei n.º 5.692, de 11 de agosto de 1971 (BRASIL, 1971), a qual concedia às escolas liberdade na decisão dos programas das disciplinas. Isso, por vezes, causava a exclusão da geometria dos programas, principalmente no 1º grau, pela insegurança que os professores demonstravam em trabalhar com ela. Somente após a reformulação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, Lei n.º 9.394, de 20 de dezembro de 1996 (BRASIL, 1996) e a publicação dos PCN (BRASIL, 1997, 1998), os conteúdos da Matemática Escolar passaram a ser padronizados e orientados por estes documentos.

Mesmo decorridas mais de duas décadas, as considerações apresentadas pelos autores supracitados continuam motivando e subsidiando professores e pesquisadores da Educação Matemática. Por isso, enfatizam-se estudos que procuraram mapear a frequências de produções nessa área, além daquelas que atentam especialmente ao processo de ensino e de aprendizagem da geometria.

Andrade e Nacarato (2004), por exemplo, ao mapear os sete primeiros encontros do ENEM (Encontro Nacional de Educação Matemática), no período de 1987 a 2001, revelaram que 20% dos trabalhos apresentados tinham como foco a geometria. Clemente et al (2015), identificaram os artigos publicados nos três periódicos mais antigos da Educação Matemática (Bolema, Gepem e Zetetiké) no período de 2000 a 2014 e verificaram uma incidência maior de publicações depois de 2010. Ambos os autores apontam que houve avanços acerca das discussões sobre geometria no país e evidencia um resgate desse ensino, pelo menos no que tange a produção.

Apesar do crescente interesse em pesquisar essa temática, Sena e Dorneles (2013) ressaltam que esse tema não tem sido uma das prioridades no que tange as produções a nível de pós-graduação. As autoras verificaram que no período de 1991 a 2011 foram produzidos 2726 trabalhos em “Educação Matemática” envolvendo teses e dissertações registradas pelo banco de dados da CAPES, e destas, identificaram que apenas 101 teses envolviam “Educação Matemática e geometria” e “Ensino de geometria”.

A fim de evidenciar possibilidades de abordagem da geometria em sala de aula, Lorenzato (2015) apresenta em seu livro situações vivenciadas por professores integrantes do grupo colaborativo Gepemai (Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática nos/dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental) envolvendo o ensino de geometria. O grupo é coordenado pelo próprio autor e está vinculado a Faculdade de Educação da Unicamp.

Os participantes do grupo são professores voluntários atuantes em diferentes níveis de ensino de escolas públicas da região metropolitana de Campinas/SP. De acordo com Lorenzato (2015), o primeiro tema explorado nos encontros foi o ensino da geometria, com ênfase na percepção espacial e processos mentais de aprendizagem. Por isso, o autor destaca três experiências didáticas desenvolvidas a partir das discussões no grupo colaborativo em turmas de diferentes níveis, 1º ano, 5º ano e 8º ano do Ensino Fundamental, respectivamente. As propostas exploraram poliedros e polígonos e tinham como foco promover debates e reflexões acerca desses elementos geométricos, relacionando-os com os objetos do mundo físico. Essas intervenções foram avaliadas positivamente pelos professores, que ressaltaram a importância de envolver os alunos em experiências desse tipo desde os primeiros anos de escolaridade.

Leivas (2012, 2016) têm evidenciado nas pesquisas voltadas ao ensino de geometria que a abordagem desses conhecimentos em diferentes modalidades de ensino pode ocorrer pelo viés da visualização. Dessa forma, o autor define a visualização como "[...] um processo de formar imagens mentais, com a finalidade de construir e comunicar determinado conceito matemático com vistas a auxiliar na resolução de problemas analíticos e ou geométricos" (LEIVAS, 2012, p. 15). Ainda, destaca a importância desse conceito no desenvolvimento do pensamento geométrico, e, aliado a imaginação e a intuição se constituem como possíveis condutores no ensino de geometria.

Diante da inserção das tecnologias no ambiente educativo, Gravina (2015) tem ressaltado que os *softwares* dinâmicos, como é o caso do GeoGebra, também podem contribuir com o ensino de geometria. Para a autora, as *figuras dinâmicas* são potencialmente produtivas, pois preservam as relações geométricas impostas a elas no início da construção mesmo após movimentá-las no ambiente interativo, o que corrobora com o desenvolvimento do pensamento geométrico. Nesse sentido, Scheffer (2015) também aponta a possibilidade de discutir representações matemáticas, articulando as representações figurais e algébricas, visualizadas simultaneamente na *interface* do *software.*

Outro aspecto evidenciado por Andrade e Nacarato (2004) em seu mapeamento destacou que diferentes aportes teóricos tem norteado as pesquisas em Educação Matemática, especialmente no que se refere ao ensino de geometria. Nesse sentido, optou-se em dar continuidade a esta pesquisa utilizando como aporte teórico os registros de representação semiótica (DUVAL, 2009, 2011, 2012a, 2012b), enfatizando as apreensões e os tratamentos propiciados por essa abordagem.

REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA E APREENSÕES EM GEOMETRIA

As competências específicas apontadas pela BNCC (BRASIL, 2017) para a área da Matemática propõem o uso de diversos registros e linguagens ao se confrontar com situações-problema. Nesse caso, a teoria dos registros de representação semiótica, proposta pelo filósofo e psicólogo Raymond Duval, pode viabilizar essa abordagem e segundo o autor é possível descrever o funcionamento cognitivo e possibilitar a compreensão dos processos matemáticos envolvidos.

De acordo com Duval (2009), essa compreensão está relacionada à distinção do objeto matemático e sua representação, pois um mesmo objeto pode ser ensinado por meio de diferentes representações. Todavia, os objetos matemáticos não são acessíveis direta e imediatamente, como o são os objetos físicos ou reais. Para Duval (2011, p. 49), "A única via de acesso possível aos objetos empiricamente não acessíveis passa por colocar em correspondência as representações semióticas diferentes".

Para designar os diferentes tipos de representações semióticas, Duval (2009) utiliza o termo "registro" de representação. Contudo, para que um sistema semiótico possa ser um registro de representação, deve permitir três atividades cognitivas ligadas à apreensão ou à produção de uma representação semiótica: a formação, o tratamento e a conversão (DUVAL, 2012b).

Segundo o autor, a formação pode ser identificada como uma tarefa de descrição e resulta em uma representação identificável. A atividade correspondente ao tratamento de uma representação indica uma transformação interna a ela, ou seja, no mesmo registro em que foi formada, mobilizando apenas um registro de representação. Já a conversão consiste em mudar a representação, conservando a totalidade ou uma parte do conteúdo da representação inicial e se constitui como a atividade cognitiva menos espontânea e imediata e a mais difícil para a maioria dos alunos.

Para Duval (2012a), é essencial, na atividade matemática mobilizar e coordenar diferentes registros de representação semiótica (figuras, gráficos, escritas simbólicas, língua natural, etc,...). Por isso, procura-se explorar, nesta pesquisa, a maior variedade possível de sistemas representacionais para o objeto matemático área do círculo. Nesse sentido, são destacados os registros de representação em língua natural, sistemas de escritas e figural, identificados pela seguinte terminologia: Registro em Língua Natural (RLN), Registro Numérico (RNm), Registro Algébrico (RAl) e Registro Figural (RFg).

A fim de contribuir para o desenvolvimento dessas atividades cognitivas, Duval (2012a) faz menção a uma certa originalidade presente nos problemas de geometria, pois estes promovem formas de interpretações autônomas para as figuras geométricas. Nesse caso, são mobilizadas diferentes apreensões das figuras: sequencial, perceptiva, discursiva e operatória. Para Moretti e Brandt (2015) compreender o modo como acontece a aprendizagem da geometria a partir da ideia das apreensões pode representar um caminho produtivo nessa área da Matemática.

A apreensão sequencial, segundo Duval (2012a), é exigida em atividades que envolvem construção ou descrição e tem por objetivo a reprodução de uma dada figura. A apreensão perceptiva, mais utilizada para interpretação das formas da figura em uma situação geométrica, também é caracterizada por Duval (2012a) como uma atividade matemática que produz uma atitude imediata e automática.

A figura representa um elemento importante no estudo da geometria. Por isso, para Duval (2012a), uma figura geométrica representa o resultado da conexão entre as apreensões perceptiva e discursiva. Para o autor ela deve ser vista a partir do que é dito e não das formas que apresenta ou das propriedades evidentes. Além disso, conduz a existência de uma contradição entre, o que é mostrado pela figura independentemente do enunciado e, aquilo que por vezes é enunciado nas hipóteses e não aparece espontaneamente na figura. Esse fato caracteriza os problemas das figuras geométricas.

Para explorar o potencial das figuras geométricas e manter um diálogo constante entre a figura e o que é dito sobre ela, é preciso promover a apreensão discursiva. De acordo com Duval (2012a, p. 135), “A apreensão discursiva de uma figura equivale a mergulhar, segundo as indicações de um enunciado, uma figura geométrica particular em uma rede semântica, que é, ao mesmo tempo, mais complexa e mais estável”. O autor reitera que as propriedades que devem ser consideradas pertinentes à figura, principalmente no processo de demonstração, dependem do que é estabelecido pelo enunciado.

Para Duval (2012a), a apreensão perceptiva está subordinada à apreensão discursiva quando uma figura geométrica não mostra a primeira vista suas propriedades, mas a partir do que é dito. Moran (2015) destaca a relevância dessa subordinação ao passo que a mesma figura pode se transformar em outra figura geométrica completamente diferente modificando apenas o enunciado do problema. Diante disso, a autora indica que a apreensão operatória e as várias modificações e reorganizações possíveis em uma figura podem auxiliar na resolução desse tipo de problema.

As modificações figurais destacadas por Moran (2015) podem ser efetuadas para Duval (2012b) de forma material ou mental sobre as unidades figurais em uma figura geométrica. Para o autor a produtividade heurística das figuras geométricas está relacionada à possibilidade de se empregar diferentes tratamentos figurais, ou seja, realizar modificações figurais. Dessa forma, a apreensão operatória está centrada nas possíveis modificações de uma figura de partida e são classificadas por Duval (2012a) em modificação mereológica, modificação ótica e modificação posicional.

Na primeira modificação, divide-se a figura de partida em subfiguras, fracionando-se e reagrupando-se em função da relação parte e todo. Na modificação ótica a figura é transformada em outra considerando sua imagem, ou seja, mantém-se a mesma forma e orientação da figura inicial variando somente o tamanho. Quando ocorre um deslocamento em relação a um referencial temos uma modificação posicional, que permite conservar o tamanho e a forma da figura de partida, aplicando um deslocamento (translação), rotação ou reflexão.

Moretti e Brandt (2015) consideram as apreensões como um dos elementos que possibilita organizar o ensino e a aprendizagem da geometria, mas alertam para o fato que elas não aparecem isoladamente e podem ser exigidas concomitantemente. Às vezes, uma pode ser mais solicitada do que a outra em algum problema, "[...] mas todas aparecem em maior ou menor grau" (MORETTI; BRANDT, 2015).

ANÁLISE DE CONTEÚDO DAS ATIVIDADES

Para analisar as atividades elaboradas e desenvolvidas com a turma do 9º ano da Escola pesquisada utilizaram-se os princípios da análise de conteúdo de Bardin (2016). A exploração dos dados se desenvolveu a partir de três polos cronológicos, explicitados no início de cada fase: pré-análise, exploração do material; tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação, como segue:

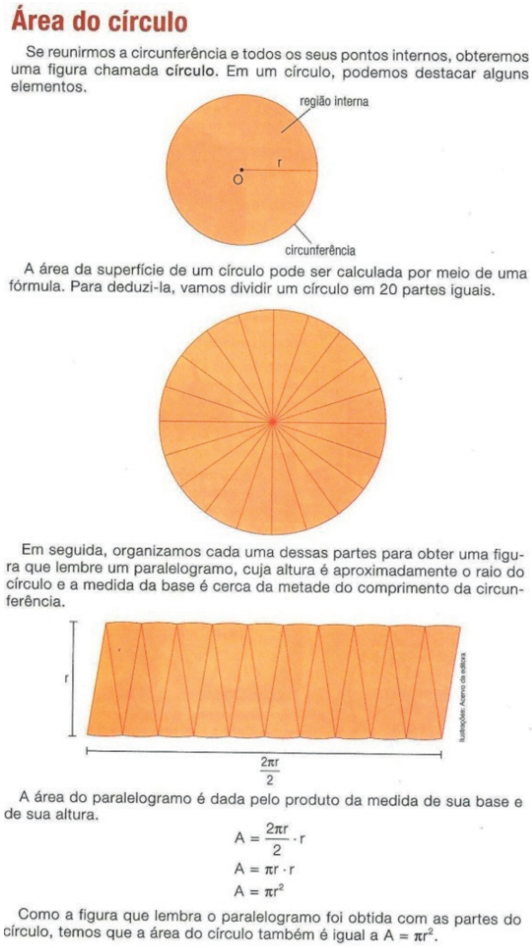
PRIMEIRA FASE: A PRÉ-ANÁLISE DA SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES

Na fase inicial elaboraram-se as atividades a serem dinamizadas no início do período letivo de 2017 com a única turma de 9º ano da Escola. A escolha do objeto matemático a ser explorado considerou que o mesmo está previsto nos conteúdos programáticos do 9º ano dessa Escola, conforme orientação do Sistema Municipal a que está vinculada. Dessa forma, segundo Bardin (2016), constitui-se o *corpus* de documentos que serão submetidos a procedimentos analíticos nas etapas seguintes.

A constituição das atividades atentou a alguns aspectos evidenciados na análise do livro didático (LD) *Vontade de Saber Matemática,* destinado ao 9º ano e adotado pela Escola no ano letivo de 2016. O LD foi publicado pela Editora FTD em 2012, com autoria de Joamir Roberto de Souza e Patricia Rosana Moreno Pataro e é parte de uma coleção composta por quatro volumes que se destinam aos anos finais do Ensino Fundamental.

Nesse caso, evidenciou-se que, o LD apresentava uma proposta relevante no que se refere ao estudo da área do círculo a partir das apreensões em geometria e que esta, não havia sido explorada com os alunos da Escola pesquisada. Essa proposta consiste em modelar a expressão da área do círculo a partir da coordenação do RAI e RFg. É possível observar na Figura 1 que a introdução do LD favorece a mobilização de todas as apreensões, principalmente a operatória. O círculo sofre uma modificação mereológica ao ser fracionado em setores circulares congruentes e reconfigurado na forma aproximada de um paralelogramo.

Figura 1 - Introdução à área do círculo no LD do 9º ano



Área do círculo

Se reunirmos a circunferência e todos os seus pontos internos, obteremos uma figura chamada **círculo**. Em um círculo, podemos destacar alguns elementos.

A área da superfície de um círculo pode ser calculada por meio de uma fórmula. Para deduzi-la, vamos dividir um círculo em 20 partes iguais.

Em seguida, organizamos cada uma dessas partes para obter uma figura que lembre um paralelogramo, cuja altura é aproximadamente o raio do círculo e a medida da base é cerca da metade do comprimento da circunferência.

A área do paralelogramo é dada pelo produto da medida de sua base e de sua altura.

$$A = \frac{2\pi r}{2} \cdot r$$
$$A = \pi r \cdot r$$
$$A = \pi r^2$$

Como a figura que lembra o paralelogramo foi obtida com as partes do círculo, temos que a área do círculo também é igual a $A = \pi r^2$.

Fonte: (SOUZA; PATARO, 2012, v. 4, p. 210).

Essa proposta (Figura 1) se utiliza de divisões sucessivas da figura inicial para obter uma expressão aproximada para a área do círculo, que, segundo Dellajustina e Martins (2014), é empregada a partir do comprimento da circunferência e consiste em dividir o círculo em um número cada vez maior de setores para que a fórmula se torne ainda mais precisa e eficaz. Para os autores, a área do círculo é uma grandeza geométrica diretamente proporcional ao valor da constante e, portanto, tem uma estreita relação com as demonstrações rigorosas realizadas por Arquimedes empregando o método da exaustão de Eudoxo.

Esse método teve origem na busca pelas quadraturas de formato curvilíneo que mais encantavam os geômetras da Antiguidade. Apesar de atribuído a Eudoxo (406-355 a.C.), foi desenvolvido e aperfeiçoado por Arquimedes (287-212 a.C.), que simplificou o problema da quadratura. Nesse sentido, Maciel (2011) afirma que esgotar a área de uma figura dada (neste caso, o círculo) por meio de outras áreas conhecidas, é uma característica do princípio da exaustão.

Sob essa perspectiva, desenvolveram-se duas atividades que exploraram a área do círculo. A Atividade 1 (Figura 2) contou com o emprego de material manipulável e a Atividade 2 (Figura 3) explorou um *applet* produzido no *software* de geometria dinâmica GeoGebra. Ambas foram desenvolvidas no Laboratório de Informática da Escola com os alunos dispostos em duplas, constituídas por critérios de escolha dos próprios alunos. Esses pares se mantiveram fixos nos dois encontros e atendendo os preceitos éticos foram denominados de Dupla A, Dupla B e Dupla C, conforme consta no projeto aprovado pelo Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos da Universidade Federal de Santa Maria sob o código 62698416.5.0000.5346.

A proposta do LD que se aproxima do princípio da exaustão, embasa a constituição da Atividade 1 (Figura 2). Para tanto, cada dupla recebeu três círculos com raio medindo 10 cm, confeccionados em papel dobradura nas cores rosa, azul e vermelho. Estes foram seccionados em setores circulares congruentes e reagrupados em três novas figuras (sem misturar as cores) aproximando-as de uma forma retangular.

A Atividade 1 utilizou como recurso didático o material manipulável, o qual propiciou a observação e experimentação dos elementos que compõem a área do círculo. Por isso, é classificado por Lorenzato (2010) como um material didático manipulável que possibilita a interação do aluno, de forma que ele manuseie ou até mesmo efetue modificações. Tais características convergem na perspectiva da exploração heurística das figuras e pode possibilitar a compreensão dos conceitos geométricos envolvidos.

Figura 2 - Atividade 1: área do círculo com material manipulável

1) Vamos seccionar os círculos em setores circulares congruentes!
Divida e recorte o círculo rosa em 8 setores circulares congruentes, o círculo azul em 16 e o vermelho em 32.
1-a) Conte com suas palavras como você obteve os 32 setores circulares congruentes.
1-b) Seccione ao meio apenas um dos setores circulares de cada um dos três círculos que foram divididos.
1-c) Monte três novas figuras com todas as peças de cada círculo. Cada figura deve utilizar somente peças da mesma cor e se aproximar de um retângulo.
1-d) Qual das três figuras visualmente mais se aproxima de um retângulo? Por quê?
1-e) O que ocorreria se os círculos fossem divididos em um número cada vez maior de setores circulares e esses setores fossem utilizados para montar figuras aproximadas de retângulos? Justifique sua resposta.
1-f) Como todos os círculos tem o mesmo tamanho então todos tem a mesma área. Se você constitui figuras que se aproximam de um retângulo com todas as peças de cada círculo o que você pode afirmar sobre a área das figuras formadas? Justifique sua resposta.
1-g) Como você calcularia a área da figura formada pela secção de 32 setores circulares se ela se aproxima de um retângulo? Explique com detalhes o que você pensou e indique uma expressão algébrica.

Fonte: Autoria própria.

Durante a exploração, foram comparadas as duas regiões, do círculo inicial e do retângulo, além de discutir estratégias matemáticas para obter a área dessa nova figura. As questões procuraram articular as apreensões sequencial, perceptiva e operatória, a partir de um processo de experimentação. Ainda, a figura de partida foi submetida a modificações que caracterizam uma exploração heurística e possibilita a mobilização concomitante dos registros discursivos e figurais.

A Atividade 2 (Figura 3) retoma as secções do círculo da atividade anterior, a partir de um *applet* produzido no *software* GeoGebra. Dessa forma, permitiu investigar se, com a secção do círculo em um número de setores cada vez maior, reconfigurados automaticamente pelo próprio *applet*, ele continuaria a se aproximar de um retângulo. Além disso, os alunos foram conduzidos a expressar algebricamente a área desse retângulo, em função de elementos do círculo, e se essas inferências poderiam ser generalizadas.

O *applet* utilizado na Atividade 2 foi aprimorado a partir de uma consulta aos sites *www.geogebra.org* e *ogeogebra.com.br/site.* Nessa busca encontrou-se uma construção[3] muito próxima à proposta desta pesquisa. A partir dela, foi ampliado o número de setores em que o círculo estava sendo dividido, otimizando a potencialidade e dinamicidade do *software.* As duplas acessaram o *Applet 1_Área* pelo aplicativo *online* no seguinte endereço eletrônico: https://www.geogebra.org/m/MBxwMAnY.

A dinâmica presente no *software* favoreceu a investigação e a experimentação, como indica Scheffer (2015). Para a autora esses ambientes oferecem novas perspectivas ao uso da linguagem matemática. Nesse sentido, *o applet* da Atividade 2 permitiu coordenar os RLN, RFg e RAI para explorar o objeto matemático, além de submeter o círculo a tratamentos puramente figurais, caracterizando a mobilização das apreensões.

Figura 3 - Atividade 2: área do círculo com o GeoGebra

2) Analise o *Applet 1_Área.* Nesse *applet* você pode modificar a quantidade de lados do polígono inscrito no círculo utilizando o controle deslizante indicado por *n*.
2-a) Na atividade anterior você seccionou o círculo em até 32 setores circulares congruentes. Em quantas partes esses círculos podem ser seccionados no *Applet 1_Área*?
2-b) Com os círculos coloridos da atividade anterior você montou uma figura que se aproximava de um retângulo. O fato de seccionar o círculo em uma quantidade maior de partes acarretou na formação de que figura geométrica no *Applet 1_Área*? Por que você considera que essa ideia é correta?
2-c) Conforme observado no *Applet 1_Área*, como podemos representar a base da figura formada em função do raio do círculo inicial?
2-d) E a altura da figura formada pode estar relacionada com algum elemento do círculo? Qual?
2-e) A partir da identificação da base e da altura da figura formada expresse uma fórmula para calcular a área do círculo a partir do retângulo formado.
2-f) É possível utilizar essa expressão e calcular a área de qualquer círculo a partir de sua reconfiguração em um retângulo? Por quê?
2-g) Você já havia estudado esta expressão anteriormente? Em caso afirmativo descreva como você aprendeu a área do círculo.

Fonte: Autoria própria.

SEGUNDA FASE: A EXPLORAÇÃO DA SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES

Para Bardin (2016), na segunda fase da análise ocorre a sistematização das decisões tomadas na fase inicial. A partir da leitura e caracterização do material, considerou-se pertinente definir duas categorias de análise para essa etapa que permitissem aprofundar os dados coletados: evolução e abordagem dos conceitos evolvendo a área do círculo nas atividades; representações e apreensões mobilizadas nas atividades que exploram a área do círculo.

[3] STOJANOVSKA (2016).

Evolução e abordagem dos conceitos envolvendo a área do círculo nas atividades

Os alunos ainda não haviam estudado o conceito de "setor circular" presente na Atividade 1, o que exigiu uma primeira interferência. A pesquisadora caracterizou e exemplificou no quadro o que era um setor circular e essa definição foi facilmente compreendida pelas duplas e utilizada corretamente nas respostas.

O processo de reconfiguração da área dos três círculos foi devidamente justificado. A Dupla B se referiu àquela constituída pelos 32 setores circulares, pois, para ela, a figura *"[...] foi cortada em mais partes; por isso, a base ficou menor. Desta forma, ficou plana, ao contrário da de 8 setores, cuja base ficou arredondada"*. (DuplaB_1-d). Apesar do arco do setor circular não ser plano, pois, em caso positivo, seria um triângulo, a dupla apresentou um argumento significativo e plausível no que se refere às características visuais.

As três duplas ressaltaram que a área das figuras formadas correspondia à área do círculo, uma vez que, ao utilizar todos os setores, obrigatoriamente o retângulo deveria ter a mesma área do círculo. Por isso, ao apresentar uma expressão para obter a área da figura que se aproxima do retângulo, as Duplas A, B e C escreveram o registro algébrico $A = B \times h$. Porém, a Dupla C cometeu um equívoco ao acrescentar que essa multiplicação representa o comprimento do círculo, em vez de indicar a área do círculo, revelando não haver clareza entre esses dois conceitos matemáticos.

Na Atividade 2, as três duplas reconheceram que, quanto mais setores houvesse, mais a figura formada se aproximava do retângulo e que essas secções se assemelhavam a triângulos. A Dupla A ainda complementou: *"[...] consideramos essa ideia correta pelo motivo de o arco circular de cada secção ser tão pequeno que, na junção de todas elas, os ângulos se tornam quase perfeitamente retos, característica mais evidente em um retângulo"* (DuplaA_2-b). A dupla tenta justificar que a justaposição dos setores se aproximava da forma de um retângulo, mas vale ressaltar que, não seria possível ter ângulos retos, tendo em vista que, a base do retângulo é formada a partir do comprimento e este não é uma reta e sim uma curva.

Verificou-se, no item 2-c), o qual solicitava relacionar a base e a altura desse retângulo a elementos do círculo, que todos os alunos estavam demonstrando dificuldade em diferenciar circunferência e círculo. Consequentemente, não relacionavam o contorno do círculo ao comprimento da circunferência. Nesse caso, foi necessário a pesquisadora intervir e conceituar esses dois objetos geométricos.

Assim, as Duplas A e C indicaram que a base do retângulo correspondia à metade do comprimento da circunferência, isto é, $C = \frac{2\pi r}{2}$. Já a Dupla B relacionou essa medida ao raio do círculo, pois, para eles, a base do retângulo correspondia ao lado de menor medida, enquanto a altura seria o comprimento dividido por 2. As demais duplas descreveram que a altura é relativa ao raio. Apesar disso, todos concluíram que a área de qualquer círculo pode ser calculada a partir de sua reconfiguração na forma aproximada de um retângulo, utilizando a fórmula $C = \frac{2\pi r}{2}$. A dupla A ainda simplificou a expressão, apresentando-a como $A = \pi r^2$.

Ao serem questionadas, ainda no item 2-g), se já haviam aprendido a expressão determinante da área do círculo e como ela foi apresentada, as duplas afirmaram que sim. A Dupla A apontou que a área do círculo foi aprendida diretamente pela fórmula, e as demais afirmaram que a área foi dada pela professora e aplicada na resolução de questões.

Representações e apreensões mobilizadas nas atividades que exploram a área do círculo

A fim de categorizar as respostas das três duplas em relação às apreensões mobilizadas, optou-se por especificar, nas Figuras 4 e 5, extratos dos protocolos contendo transcrições originais das respostas produzidas pelas duplas e em seguida, detalhando nos comentários os diferentes registros de representação semiótica e tratamentos empregados. Além disso, retomam-se questões expressas nas Figuras 2 e 3 no intuito de ampliar as análises em relação às representações, tratamentos e apreensões mobilizadas.

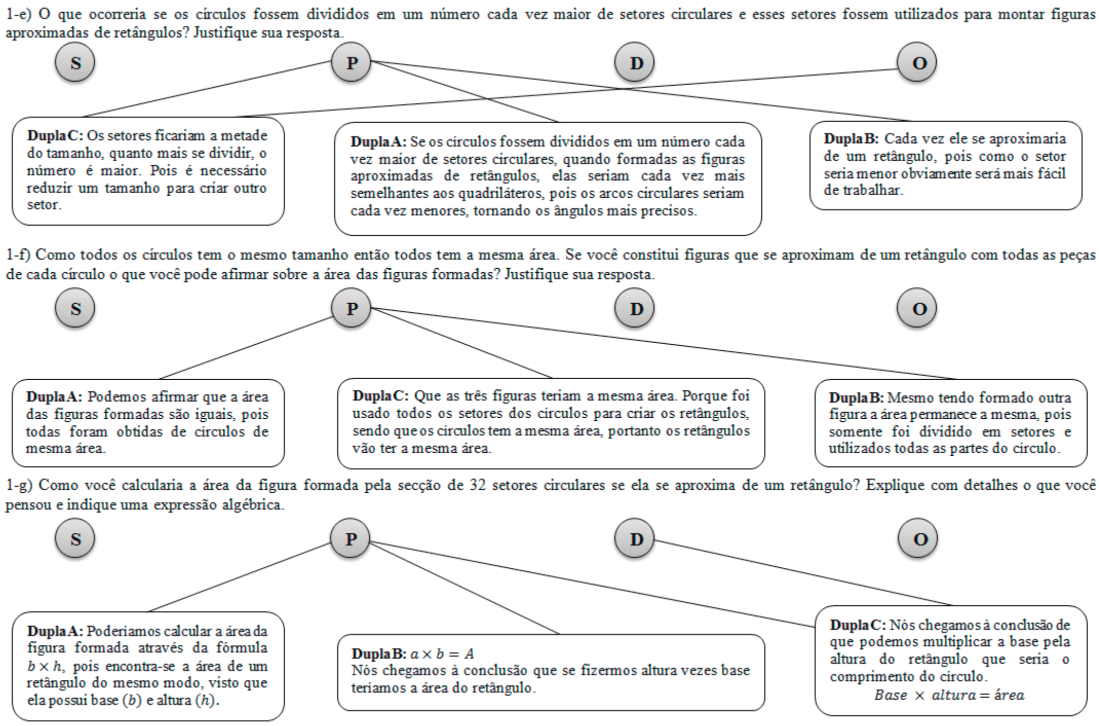
As três duplas não apresentaram dificuldades para desenvolver os quatro primeiros itens da Atividade 1, respectivamente 1-a), 1-b), 1-c) e 1-d), especificados na Figura 2. Os alunos mobilizaram a apreensão perceptiva e sequencial para efetuar as divisões solicitadas no RFg, baseando-se no conceito de setor circular e congruência. Além disso, a apreensão operatória também foi empregada ao resolver os itens 1-a) e 1-b) para dividir o círculo em setores congruentes. Essa divisão caracteriza tratamento figural, ou seja, uma modificação mereológica homogênea, pois os setores são congruentes, mas diferentes da figura inicial.

A Dupla A, após concluir as secções, constituiu os retângulos solicitados no item 1-c) de forma rápida, pois, um dos integrantes já havia tido um contato breve com essa demonstração no Programa de Iniciação Científica (PIC) a que está vinculado. As outras duplas, depois de algumas tentativas, conseguiram montar a figura que melhor se aproximava do retângulo.

No que se refere ao item 1-d), as duplas foram unânimes em afirmar que o círculo vermelho seccionado em 32 secções, ao ser reconfigurado, mais se aproximava de um retângulo. Portanto, a apreensão perceptiva foi empregada para identificar propriedades que justificassem, pelo menos visualmente, essa constatação. As Duplas A e C justificaram essa semelhança pelo fato de os setores serem cada vez menores. Já o argumento utilizado pela Dupla B ao referenciar a figura com 32 setores, indica que a base do setor fica menor e quase plana, diferentemente da figura de 8 setores. Esse argumento ainda dá indícios de uma interpretação discursiva dos elementos figurais que constituem o retângulo, pois, ao mencionar a planificação da base, a dupla está se referindo à menor variação na curvatura.

A Figura 4 destaca que a apreensão perceptiva predomina nos demais itens da Atividade 1, ao mesmo tempo que se verificam indícios significativos de apreensão discursiva e operatória nas respostas dos alunos. Em 1-e), todas as duplas articularam o RFg e o RLN para efetivar uma apreensão perceptiva, ao justificar que, quanto maior o número de setores circulares reconfigurados, mais essa figura se aproxima de um retângulo. O argumento da Dupla C foi o único que explicitou uma modificação mereológica, própria da apreensão operatória, que também representa um tratamento no RFg, ao indicar que as novas divisões devem considerar o setor já existente e dividi-lo ao meio.

Figura 4 - Exposição dos protocolos da Atividade 1



Fonte: Autoria própria, baseado nas respostas dos protocolos da Atividade 1.

As respostas apresentadas pelas duplas no item 1-f) foram muito semelhantes entre si e se restringiram à apreensão perceptiva, mobilizando o RFg e o RLN. Justificaram que, se foram utilizadas todas as partes do círculo inicial para formar uma nova figura, deverá ter obrigatoriamente a mesma área.

Ainda em relação a Figura 4, no último item, 1-g), as duplas deveriam converter corretamente o RFg para o RAl, a fim de representar a área do retângulo. A Dupla C relacionou a expressão que define a área com o comprimento da circunferência, explorando elementos característicos do processo de demonstração, que usualmente não é facilmente percebido pelos alunos, o que remete à apreensão discursiva.

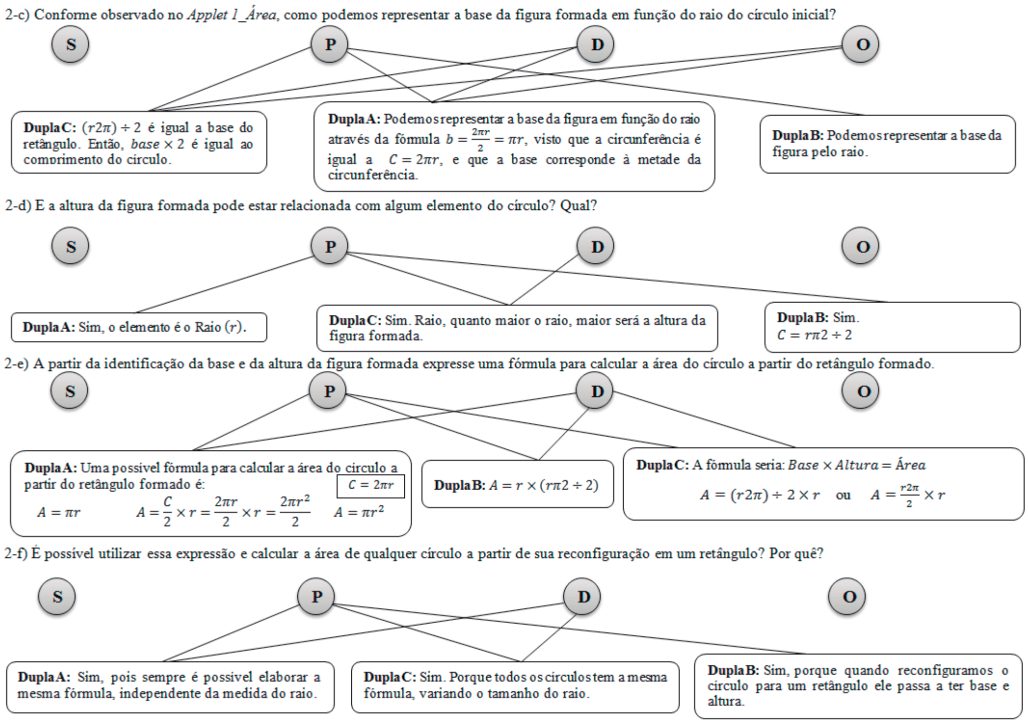
No que tange a Atividade 2 (Figura 3), especificamente em relação aos itens 2-a) e 2-b), , as duplas indicaram corretamente que o nº de secções era 199, mobilizando a apreensão perceptiva a partir do RFg e do RNm. Por sua vez, no item 2-b), que previa inferir sobre a figura constituída a partir das secções do círculo, verificou-se que todas as duplas reafirmaram que a figura formada se aproximava de um retângulo e buscaram justificar essa semelhança na apreensão discursiva. Apontaram que o fato do *applet* permitir um maior número de secções fazia com que o arco do setor se parecesse com a base do triângulo, argumento também revelado com o material manipulável.

Na Figura 5, foram identificados os outros itens da Atividade 2 e os respectivos protocolos contendo transcrições das respostas produzidas pelos alunos. Detectou-se que as duplas chegaram a conclusões semelhantes no que se refere ao registro algébrico da área. As Duplas A e C expressaram corretamente a medida da base em função do raio do círculo, mobilizando as apreensões perceptiva e discursiva. Para tanto, utilizaram RAl e RLN e demonstraram como essa medida estava sendo obtida, partindo do RFg. A Dupla A, ao indicar que essa expressão corresponde à metade da circunferência, empregou, de forma mais explícita, a apreensão operatória-mereológica. Ainda, empregou corretamente o tratamento no RAI para simplificar a expressão $b = \frac{2\pi r}{2}$.

Verificou-se, nos itens 2-c) e 2-d), que a Dupla B diferiu das demais, pois assumiu o raio como a base do retângulo. Isso não interferiu na interpretação da questão, pois considerou, coerentemente, a altura como a metade do comprimento da circunferência.

No item 2-f), o qual questiona sobre a possibilidade de se calcular a área de um círculo após sua reconfiguração em um retângulo, as Duplas A e C mobilizaram a apreensão discursiva, uma vez que generalizaram a expressão, independentemente da medida do raio, articulando RFg, RAI e RLN.

Figura 5 - Exposição dos protocolos da Atividade 2



Fonte: Autoria própria, baseado nas respostas dos protocolos da Atividade 2.

TERCEIRA FASE: TRATAMENTO DOS RESULTADOS, INFERÊNCIA E INTERPRETAÇÃO DA SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES

Bardin (2016) indica que na última fase da análise os resultados devem ser aprimorados e sistematizados a fim de torná-los válidos e significativos. Nesse caso, os itens das Atividades 1 e 2 foram categorizados, de acordo com as apreensões mobilizadas pelos alunos em suas respostas, os sistemas representacionais e os tratamentos.

O Quadro 1 apresenta um levantamento das apreensões e representações mobilizadas pelas duplas, além dos tratamentos empregados a partir da análise dos respectivos protocolos. Considerou-se pertinente não incluir o item 2-g) na quantidade total de itens resolvidos nas duas atividades, pois questionava apenas se os alunos já haviam estudado a expressão que define a área de um círculo. Nesse caso, esse item está grafado em cinza e o total a ser considerado equivale a 39 respostas.

Ao analisar os dados do Quadro 1, identificou-se que a apreensão perceptiva foi empregada em todas as soluções, pois as atividades exigiam o reconhecimento das propriedades das figuras e a inserção destas em determinada situação geométrica. A apreensão discursiva, mobilizada em 33,33% das respostas, foi evidenciada nas justificativas apresentadas pelas duplas, bem como nas situações articulando o RLN e o RAI, caracterizando indícios de demonstração.

A apreensão operatória foi mobilizada em 30,77% das soluções, e todas caracterizaram uma modificação mereológica. Esta, por sua vez, foi explicitada nas operações de decomposição e reconfiguração e exigida na secção do círculo, bem como na construção da forma que se aproximava de um retângulo.

Quadro 1 - Síntese da análise das atividades da sequência de atividades.

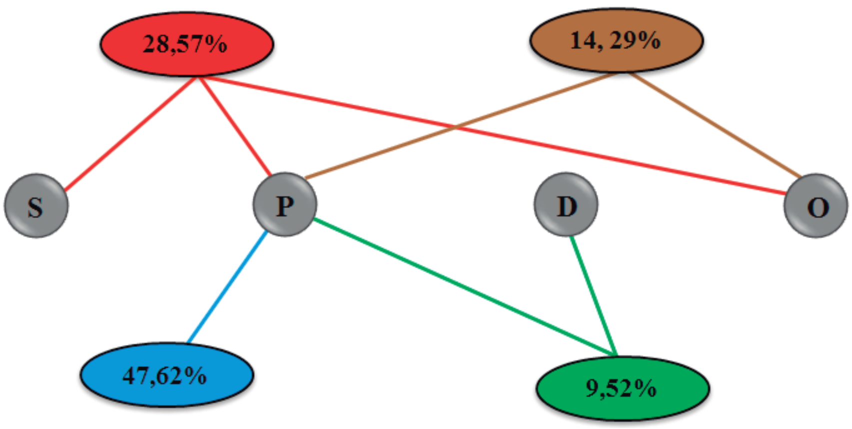
	Item	Duplas	Apreensões				Representações mobilizadas				Tratamentos			
			S	P	D	O	RLN	RFg	RNm	RAI	RLN	RFg	RNm	RAI
ATIVIDADE 1	1-a)	Duplas A, B, C	X	X	-	X	X	X	X	-	-	X	-	-
	1-b)	Duplas A, B, C	X	X	-	X	-	X	-	-	-	X	-	-
	1-c)	Duplas A, B, C	-	X	-	X	-	X	-	-	-	X	-	-
	1-d)	Dupla A	-	X	-	-	X	X	-	-	X	-	-	-
		Dupla B	-	X	X	-	X	X	-	-	X	-	-	-
		Dupla C	-	X	-	-	X	X	-	-	-	-	-	-
	1-e)	Duplas A, B	-	X	-	-	X	X	-	-	X	-	-	-
		Dupla C	-	X	-	X	X	X	-	-	X	X	-	-
	1-f)	Duplas A, B, C	-	X	-	-	X	X	-	-	X	-	-	-
	1-g)	Duplas A, B	-	X	-	-	-	X	-	X	-	-	-	-
		Dupla C	-	X	X	-	-	X	-	X	-	-	-	-
ATIVIDADE 2	2-a)	Duplas A, B, C	-	X	-	-	-	X	X	-	-	X	-	-
	2-b)	Duplas A, B, C	-	X	X	-	X	X	-	-	X	-	-	-
	2-c)	Dupla A	-	X	X	X	X	X	-	X	X	X	-	X
		Dupla B	-	X	-	-	X	X	-	-	-	-	-	-
		Dupla C	-	X	X	X	X	X	-	X	X	X	-	-
	2-d)	Dupla A	-	X	-	-	X	X	-	-	-	-	-	-
		Dupla B	-	X	-	-	X	X	-	X	-	-	-	-
		Dupla C	-	X	X	-	X	X	-	-	X	-	-	-
	2-e)	Dupla A	-	X	X	-	-	X	-	X	-	-	-	X
		Duplas B, C	-	X	X	-	-	X	-	X	-	-	-	-
	2-f)	Duplas A, C	-	X	X	-	X	X	-	-	X	-	-	-
		Dupla B	-	X	-	-	X	X	-	-	X	-	-	-
	2-g)	Duplas A, B, C	-	-	-	-	X	-	-	-	-	-	-	-
Total		39	6	39	13	12	24	39	6	9	17	15	0	2

Fonte: Autoria própria, baseado na análise dos protocolos das Duplas A, B e C.

As apreensões foram mobilizadas em todos os itens das Atividades 1 e 2 e, apesar de a apreensão perceptiva prevalecer, na maioria das vezes, ela esteve aliada a outras apreensões figurais. Para esclarecer esse fato, atenta-se aos esquemas representados nas Figuras 6 e 7 que enfatizam na forma de percentual a mobilização dessas apreensões.

Na Atividade 1, reelaborada a partir da introdução proposta pelo LD para o estudo da área do círculo (Figura 1), mobilizaram-se todas as apreensões, em maior ou menor grau. Nesse sentido, apenas na questão 1-f) as três duplas mobilizaram exclusivamente a apreensão perceptiva.

Figura 6 - Mobilização das apreensões na Atividade 1.

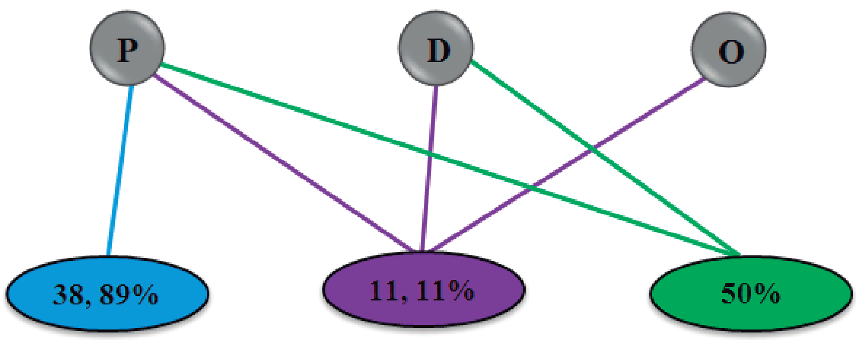


Fonte: Autoria própria, baseado nos protocolos das atividades.

Como já mencionado, ampliou-se, na Atividade 2, a discussão sobre a área do círculo, a partir de sua reconfiguração na forma aproximada de um retângulo utilizando um *applet* no *software* GeoGebra. Nesse caso, as duplas estabeleceram algumas inferências acerca da generalização desse procedimento para a área de qualquer círculo e, assim, expressaram algebricamente uma possibilidade para obter essa área.

A manipulação do *applet* auxiliou a coordenação dos registros de representação explorados na sequência e foi essencial nas situações que exigiam analisar elementos do retângulo e do círculo após um número muito grande de setores. Nesse sentido, evidenciou-se, nos protocolos, que houve um avanço na compreensão da área do círculo com base nas interferências da pesquisadora e da exploração heurística possibilitada pelo material manipulável e pelo *software*.

Figura 7 - Mobilização das apreensões na Atividade 2.



Fonte: Autoria própria, baseado nos protocolos das atividades.

Na Figura 7, é importante atentar ao percentual que representa a mobilização da apreensão discursiva na Atividade 2: em 61,11% dos itens, promoveu-se essa apreensão, aliada à operatória e/ou à perceptiva. Essas questões elevaram de modo significativo o índice de respostas que empregaram tratamentos no RLN, utilizando a língua natural em justificativas ou descrições dos procedimentos de resolução. Esse fato propiciou a articulação de diferentes apreensões simultaneamente e inseriu de forma gradativa princípios da demonstração geométrica, por meio da manipulação de diferentes recursos didáticos.

Os dados do Quadro 1 permitem inferir ainda que nos itens 1-d), 2-c) e 2-d), as três duplas mobilizaram apreensões figurais distintas. Ao verificar o teor dessas questões (Figura 8), observou-se que elas requeriam argumentos próprios para justificar encaminhamentos lógicos e algumas expressões algébricas, o que resultou na sistematização de diferentes conceitos e apreensões figurais por parte de cada dupla. Vale ressaltar que esse tipo de atividade não é usual nas aulas de matemática, pois, em geral, essa análise é orientada e conduzida pelo professor, e não é dada ao aluno a oportunidade de explicitar individualmente suas conclusões.

Figura 8 - Atividades que resultaram na mobilização de diferentes apreensões e registros

1-d) Qual das três figuras visualmente mais se aproxima de um retângulo? Por quê?
2-c) Conforme observado no *Applet 1_Área*, como podemos representar a base da figura formada em função do raio do círculo inicial?
2-d) E a altura da figura formada pode estar relacionada com algum elemento do círculo? Qual?

Fonte: Autoria própria.

No que se refere às dificuldades apresentadas pelas duplas, verificou-se que as Duplas B e C demonstraram maiores limitações nas situações que exigiam a coordenação de vários registros, identificando que se tratava do mesmo objeto matemático, a área do círculo, nas diferentes representações semióticas. De acordo com Duval (2012b), isso ocorre porque o ensino privilegia com frequência a formação e o tratamento e pouco leva em conta a operação de conversão. Por isso, esta última atividade geralmente se apresenta como primeira fonte de dificuldade à compreensão em matemática.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O ensino de geometria aliado aos registros de representação semiótica tem se constituído nesta pesquisa como uma possibilidade para o estudo da área do círculo no Ensino Fundamental. Nesse sentido, a proposta do LD que é um recurso acessível à Escola, se mostrou pertinente, pois, promoveu a exploração figural da área do círculo, aliando diferentes registros de representação semiótica e apreensões.

Ainda, evidenciou-se que a utilização do material manipulável e do GeoGebra motivou a participação dos alunos e, especialmente no que se refere ao *software*, pois, possibilitou estabelecer diversas inferências acerca da área do círculo. Com o *applet* ampliou-se significativamente o número de secções do círculo permitindo uma melhor aproximação da região reconfigurada com a forma de um retângulo, o que não seria possível evidenciar utilizando apenas o material manipulável.

Com base nos protocolos que continham as resoluções das duplas de alunos, constatou-se que 58,97% das respostas mobilizaram concomitantemente mais de uma apreensão no estudo da área do círculo. Para Moretti e Brandt (2015), este é um elemento favorável ao ensino e aprendizagem da geometria, pois quando empregadas de forma simultânea favorecem a mobilização do RLN, do RFg e dos tratamentos que privilegiam essas representações. Nesse sentido, as atividades promoveram a coordenação de diferentes registros de representação, especialmente o RLN e RFg, identificada em 61,54% das soluções apresentadas pelos alunos.

Portanto, a adaptação da proposta apresentada pelo LD para introduzir a área do círculo propiciou uma abordagem na perspectiva das apreensões e pode contribuir para o ensino e a aprendizagem da geometria na sala de aula. Dessa forma, a problematização apresentada pelo LD está em consonância com a proposta de Duval (2011, 2012a, 2012b). Esse fato sugere que o LD pode conter outras propostas ou atividades que venham a contribuir com o ensino da geometria em diferentes níveis escolares, sob diferentes perspectivas, como é o caso das apreensões.

As atividades exploradas ainda permitiram propor encaminhamentos didáticos relacionados ao método da exaustão, que consiste em esgotar a área de uma figura dada por meio de outras áreas conhecidas. Esse método, originário na busca pelas quadraturas de formato curvilíneo, possibilita ainda aproximar a área do círculo com a área de um polígono regular inscrito no círculo, com um número de lados cada vez maior. Esse aspecto apresenta um raciocínio similar ao uso de limites, considerando que o número de lados do polígono inscrito é cada vez maior e consequentemente a área desse polígono se aproxima da área do círculo.

Ainda, com o propósito de discutir outros aspectos referentes á área do círculo, a partir do polígono inscrito, outras atividades didáticas envolveram a exploração de propriedades geométricas desse polígono, mobilizando além dos registros em língua natural, figural, algébrico e numérico, evidenciados nas Atividades 1 e 2, outros sistemas representacionais como o gráfico e o tabular. Além disso, essa estratégia exigiu a articulação das diferentes apreensões, com ênfase na discursiva e operatória, que nesta fase do Ensino Fundamental se relaciona de forma intrínseca ao processo inicial de demonstração em geometria.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, J. A. A.; NACARATO, A. M. Tendências didático-pedagógicas para o ensino de geometria. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 27., 2004, Caxambu-MG. **Anais eletrônicos**... Caxambu: ANPEd, 2004. p. 1-18. Disponível em: <https://bit.ly/2QAIBNZ>. Acesso em: 28 out. 2016.

ARCEGO, P. **Representações semióticas mobilizadas no estudo da área do círculo no Ensino Fundamental**. 2017. 155 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2017.

BARDIN, L. Análise de Conteúdo. São Paulo: Edições 70, 2016.

BRASIL. Lei n.º 5.692, de 11 de agosto de 1971. Fixa Diretrizes e Bases para o ensino de 1° e 2º graus, e dá outras providências. **Diário Oficial da União**, Brasília, DF, Seção 1, 12 ago. 1971.

______. Lei n.º 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. **Diário Oficial da União**, Brasília, DF, 23 dez. 1996.

______. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** matemática - 1° e 2° ciclos. Brasília: MEC/SEF, 1997.

______. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** matemática - 3° e 4° ciclos. Brasília: MEC/SEF, 1998.

______. **Base Nacional Comum Curricular.**. Brasília, DF: MEC, 2017.

CLEMENTE, J. C.; BEDIM, A. A. P.; RODRIGUES, A. C. D.; FERREIRA, H. L.; SOUZA, J. M. S. S.; SANTOS, L. G.; COHN, M. A. F.; DIAS, M. F. M.; TOMÉ, N. M. A.; CARNEIRO, R. F. Ensino e aprendizagem da geometria: um estudo a partir dos periódicos em Educação Matemática. In: ENCONTRO MINEIRO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2015, São João del Rei, MG. **Anais Eletrônicos**... São João del Rei, MG: UFSJ, 2015. Não paginado. Disponível em: <https://bit.ly/2NIB1Zu>. Acesso em: 7 nov. 2016.

DELLAJUSTINA, F. J.; MARTINS, L. C. Poderia Arquimedes ter calculado π com areia e um bastão? **Revista Brasileira de Ensino de Física**, Joinville, v. 36, n. 3, p. 1-9, 2014.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano:** registros semióticos e aprendizagens intelectuais. Tradução Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

______. **Ver e ensinar a matemática de outra forma:** entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. São Paulo: PROEM, 2011.

______. Abordagem cognitiva de problemas de Geometria em termos de congruência. Tradução Méricles Thadeu Moretti. **REVEMAT**, Florianópolis, v. 7, n. 1, p. 118-138, 2012a.

______. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução Méricles Thadeu Moretti. **REVEMAT**, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012b.

GRAVINA, M. A. O potencial semiótico do GeoGebra na aprendizagem da geometria: uma experiência ilustrativa. **Vidya Revista Eletrônica**, Santa Maria, v. 35, n. 2, p. 237-253, 2015.

LEIVAS, J. C. P. Educação Geométrica: reflexões sobre o ensino e aprendizagem em Geometria. **Educação Matemática em Revista**, v. 1, n. 13, p. 9-16, 2012.

______. Visualização: um caminho para o ensino e aprendizagem em geometria. In: CURY, Helena Noronha (Org.). Erros na aprendizagem de matemática: relatos de pesquisas e reflexões. 1. ed. Santa Maria: Centro Universitário Franciscano, 2016. p. 121-144.

LORENZATO, S. Porque não ensinar Geometria? **Educação Matemática em Revista**, v. 3, n. 4, p. 3-13, 1995.

______. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: LORENZATO, S. (Org.). **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. 3. ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2010. p. 3-37.

______. (Org.). **Aprender e ensinar geometria**. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2015.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em Educação:** abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

MACIEL, T. S. **A História da Matemática e o estabelecimento de elos entre o Ensino Superior e a Educação Básica.** 2011. 60 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, PB, 2011.

MORAN, M. **As apreensões em Geometria:** um estudo com professores da Educação Básica acerca de Registros Figurais. 2015. 249 f. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência e a Matemática) - Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2015.

MORETTI, M. T.; BRANDT, C. F. Construção de um desenho metodológico de análise semiótica e cognitiva de problemas de geometria que envolvem figuras. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 17, n. 3, p. 597-616, 2015.

PAVANELLO, R. M. **O abandono do ensino da geometria**: uma visão histórica. 1989. 201 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1989.

______. O abandono do ensino de Geometria no Brasil: causas e consequências. **Zetetiké**, v. 1, n. 1, p. 7-17, 1993.

SENA, R. M.; DORNELES, B. V. Ensino de Geometria: Rumos da Pesquisa (1991-2011). **REVEMAT**, Florianópolis, v. 8, n. 1, p. 138-155, 2013.

SCHEFFER, N. F. As TIC na formação do professor de matemática: um olhar para a investigação de conceitos geométricos. In: LOSS, A. S.; CAETANO, A. P. V.; PONTE, J. P. (Orgs.). **Formação de Professores no Brasil e em Portugal**: Pesquisas, Debates e Práticas. 1. ed. Curitiba, PR: Appris, 2015. p. 273-288.

STOJANOVSKA, L. F. **Area of a Circle:** Wedge/Sector Demonstration. GeoGebra. 2016. Disponível em: <https://bit.ly/2MFYWxr>. Acesso em: 14 jul. 2017.

RECEBIDO EM: 09 nov. 2017
CONCLUÍDO EM: 13 fev. 2018