

## O COMPORTAMENTO DE FUNÇÕES COM O ESTUDO DE DERIVADAS POR SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS EM OBJETO DE APRENDIZAGEM

### THE DEVELOPMENT OF FUNCTIONS WITH THE STUDY OF DERIVED BY DIDACTIC SEQUENCES IN A LEARNING OBJECT

LUIZ GONZAGA ALVES DA CUNHA\*  
JOÃO BOSCO LAUDARES\*\*

#### RESUMO

Neste artigo, são apresentados resultados de uma Pesquisa realizada num Mestrado em Ensino Superior sobre o comportamento de funções com o estudo de derivadas. Por meio do apoio de um projeto de financiamento foi desenvolvida em duas etapas: 1ª) produção de uma sequência didática de atividades inserida num Objeto de Aprendizagem informatizado. 2ª) aplicação do Objeto de Aprendizagem a estudantes de graduação para sua validação. Foi uma Pesquisa qualitativa em duas abordagens: experimental, com a construção de material didático, e empírica, na observação da aplicação do experimento com análise de dados. Após passar por duas versões (1) *PowerPoint - Microsoft*, (2) HTML, ambas com *applets* do GeoGebra, o Objeto de Aprendizagem foi implementado em ambiente WEB 2.0. Os resultados mostraram a efetividade da proposta metodológica em estimular, com a dinâmica do Objeto de Aprendizagem e a transição da representação algébrica para geométrica/gráfica, a participação do estudante na construção de seu conhecimento.

**Palavras-chave:** Sequência Didática; Informática Educacional; Objeto de Aprendizagem; Comportamento de funções com derivadas.

#### ABSTRACT

*In this article, are presented the results of a Research carried out in a Master's Degree in Higher Education about the behavior of functions with the study of derivatives. Through the support of a financing project was developed in two stages: 1st) production of a didactic sequence of activities inserted in a Computerized Learning Object. 2nd) application of the Learning Object to undergraduate students for their validation. It was a qualitative research in two approaches: experimental, with the construction of didactic material, and empirical, in the observation of the application of the experiment with data analysis. After passing through two versions (1) PowerPoint - Microsoft, (2) HTML, both with GeoGebra applets, the Learning Object was implemented in a WEB 2.0 environment. The results showed the effectiveness of the methodological proposal in stimulating, with the Learning Object dynamics and the transition from algebraic to geometric / graphical representation, the student's participation in the construction of his knowledge.*

**Keywords:** Didactic sequence; Educational Informatics; Learning Object; Development of Functions with Derivatives

\* Docente na Faculdade Única de Ipatinga (FUNIP), Ipatinga - MG. E-mail: prof Luizcunha@gmail.com

\*\* Docente na Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais (PUCMINAS). E-mail: jblaudares@terra.com.br

## INTRODUÇÃO

A Pesquisa apresentada está no campo do Ensino Superior. A dimensão da investigação neste nível de ensino, nos últimos anos, tem trazido uma crescente contribuição para educação matemática, especialmente após a criação do grupo de trabalho de Educação Matemática no Ensino Superior (GT4) no I Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática - SIPEM, que estimula a produção acadêmica nesta área. Assim, procura-se dar uma solidez aos estudos e investigações no nível superior, graduação e pós-graduação, para explorar a teoria cognitiva do pensamento matemático avançado.

As investigações acontecem em variadas temáticas com especificidade deste nível de ensino tais como: formação de professores, didática da matemática, novas tecnologias, entre outras. Os resultados da Pesquisa, apresentados neste artigo, privilegiam a prática educativa na tentativa de produzir um material didático de apoio para as ações em sala de aula, com o objetivo de aprimorar os processos de ensino e aprendizagem.

A Pesquisa realizada teve a seguinte estruturação: primeira etapa, abordagem experimental pela construção de material didático com a produção de atividades, numa sequência didática, com o objetivo de trazer entendimento dos conceitos envolvidos com variação das representações das funções: algébrica para geométrica/gráfica; determinação de estratégias embasadas na visualização com a utilização dos recursos da informática para se ter movimento na perspectiva da geometria dinâmica; criação de um Objeto de Aprendizagem, estruturado após levantamento da produção em Ensino Superior, relativamente ao tema em estudo - comportamento de funções (crescimento/decrescimento, pontos máximos e mínimos locais, concavidade, pontos de inflexão); após um estudo detalhado de design do Objeto de Aprendizagem, criou-se as telas para melhor manipulação do mesmo pelos estudantes. Autor 1 (2014)

A integração da representação algébrica para a gráfica se constituiu um ponto-chave para o método didático. Os referenciais teóricos da parte de desenvolvimento de material foram fundamentados em Zabala (1991) quanto a sequência didática, Wiley (2002) pela produção do objeto de aprendizagem, Frota (2009) quanto ao Ensino Superior e Duval (2009) quanto as representações.

Já numa segunda etapa, a abordagem da pesquisa foi empírica com observação, após o objeto de aprendizagem edificado, procedeu-se a uma aplicação do mesmo para sua validação. Foram identificados estudantes de um curso superior, como sujeitos da aplicação. Os referenciais teóricos da parte empírica foram de Borba (2013), quanto aos parâmetros da pesquisa qualitativa em educação matemática, e de Ludke e André (1986), quanto aos parâmetros da metodologia científica relativos à aplicação do Objeto de Aprendizagem com “observação participante” e análise de dados qualitativos.

A composição deste artigo se fez, inicialmente, com a apresentação dos referenciais teóricos que deram sustentação para as proposições trabalhadas, depois foram descritos o planejamento e a elaboração do Objeto de Aprendizagem e, em seguida, realizou-se a descrição analítica das observações ocorridas durante a aplicação do produto criado e análise dos resultados dessa aplicação.

## A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NO ENSINO SUPERIOR - O ENSINO DE CÁLCULO

A educação matemática está sendo enriquecida com estudos e investigações nos vários níveis de ensino desde a educação infantil ao Ensino Superior, graduação e pós-graduação. Assim, as questões levantadas se constituem objetos de pesquisa: como o estudante se relaciona com a mate-

mática conceitual e formal; quais são as estratégias para aprender com compreensão de uma forma significativa; a consistência da pesquisa da prática educativa e do ensino; como as tecnologias de informação, computacional e de comunicação podem ser instrumentos para a didática da matemática na educação básica e superior. Estas e outras questões pertinentes a educação matemática se tornam cada vez mais, motivo de preocupações para a eficácia didática.

Especificamente, quanto ao Ensino Superior a investigação significa, segundo Iglori e Silva (2001): estudo de fenômenos relacionados à formação do pensamento avançado, fatores que dificultam a compreensão e aquisição conceitual e procedimental, estratégias para a transposição didática. Assim, as teorias já consagradas para educação matemática básica são acrescidas de outras que buscam a consolidação de um corpo teórico para o ensino superior, o que afirma a mesma autora buscando suporte em Tall e Vinner (1981), Vinner (1991), entre outros. Iglori (2001) se baseou nos componentes do pensamento segundo Fishbein (1994), quanto a atividade matemática: o aspecto formal (axiomas, definições, teoremas, proposições simbólicas formalizadas), o componente algorítmico que capacita o estudante para os processos de resolução pela prática sistemática (o procedimental do cálculo), a utilização da intuição, que deve ser mais explorada no Ensino Superior (a intuição cognitiva aceita sem justificativa).

Leivas (2013), com base em Bishop (1989), salienta a importância de questões que são tratadas na educação matemática e que podem constituir-se em parâmetros do Ensino Superior: conceitos de visualização, imaginação, habilidade espacial, diagramas e intuição. Entretanto, ainda segundo o mesmo autor, os objetivos da formação docente e discente nos vários cursos superiores são diferenciados como, por exemplo, em cursos de licenciatura em matemática e nas engenharias.

Em concordância com as orientações e normas emanadas do *National Council of Teachers of Mathematics - NCTM* (2008) e, as transformando em objeto da pesquisa apresentada, enfatizou-se o pensamento visual para o entendimento do comportamento das funções na sua variação dos valores quanto a pontos extremos, em crescimento e decrescimentos na diversificação de tratamento, principalmente o algébrico e geométrico/gráfico.

O Cálculo Diferencial e Integral estuda o movimento e a variação, características dos fenômenos naturais e artificiais, podendo ser considerado a linguagem do paradigma científico e, como instrumento indispensável para quase todas as áreas científicas desde sua consolidação no final do século XVII com Newton e Leibniz. O ensino de Cálculo tem dois objetivos primordiais: levar o estudante a pensar de forma organizada e com mobilidade e, aprender utilizar as ideias deste ramo de conhecimento para resolução de problemas em situações da interdisciplinaridade e contextualização.

A pedagogia tradicional com a aula, exclusivamente expositiva, baseando-se na exposição oral de conteúdos tem dominado o ensino de Cálculo com exercícios repetitivos privilegiando a memorização, um ensino tradicional, pensado em termo de conteúdos disciplinares, espelhou, ao longo dos anos, uma concepção de aprendizagem como “acumular conteúdos”. Ao pensar o ensino e o currículo em termos de competências e habilidades, corre-se o risco de, novamente adotar uma concepção restrita do que é aprendizagem, onde “acumular conteúdos” é apenas substituído por “acumular habilidades” (Frota, 2002, p.11)

Pinto (2001, p. 123), com base em Tall (1991) e Dubinsky, Elterman e Gong (1988), quando da transição dos Cálculos para Análise Matemática, trata da didática da matemática enfatizando diretrizes metodológicas,

[...] na prática em sala de aula que também tem sido a do ensino dos Cálculos (muito embora a maioria dos livros-textos de Cálculo adotados nas universidades apresentem seu conteúdo de modo formalizado), a aquisição dos conceitos matemáticos são fundamentais em experimentações: descrição são feitas a partir de conceitos familiares, gráficos são usados para sugerir imagens virtuais, e argumentos para verificação das afirmações e teoremas, são elaborados a partir de tais imagens.

As investigações e estudos na Educação Matemática Superior, especificamente em Cálculo tem sido profícuas com parâmetros e diretrizes para futuras pesquisas, o que ocorreu com a Pesquisa realizada, que ora se apresenta. Assim, a criação das atividades e do Objeto de Aprendizagem teve uma base teórica obtida dos referenciais que a academia privilegia em seus estudos e investigações da Educação Matemática Superior.

## **A APRENDIZAGEM DE CÁLCULO COM DIVERSIDADE DE REPRESENTAÇÃO**

Os saberes são traduzidos com as linguagens oral e escrita, usando símbolos, grafos, diagramas, tabelas e gráficos. Duval (2009) trata, na sua produção, da cognição quanto a sua funcionalidade servindo-se da atividade matemática como de problemas. Seu modelo se baseia na mudança de registros de representação semiótica com intuito de favorecer a aprendizagem. Assim, a análise de conhecimento matemático é pela produção de representações.

A aprendizagem da matemática se constitui um espaço da cognição para análise de atividades cognitivas fundamentais como a conceitualização, o raciocínio, a resolução de problemas e mesmo a compreensão de textos. A particularidade da aprendizagem das matemáticas considera que essas atividades cognitivas requerem a utilização de sistemas de expressão e de representação além da linguagem natural. (Duval. p. 13).

O mesmo autor acrescenta que há outras representações de mesmo estatuto da linguagem natural como: figuras geométricas, representações em perspectivas, gráficos cartesianos, diagramas entre outros. Desta forma, a representação mental, conjunto de imagens do objeto de estudo, pode ser exteriorizada pelas representações semióticas, ou seja, enunciado em língua natural, formulação algébrica, gráfico. A pluralidade dos sistemas semióticos aumenta significativamente as capacidades cognitivas de um indivíduo com a diversificação das representações, especialmente quando há uma conversão de dois registros de representações, o que ocorre nas atividades propostas, da representação algébrica para geométrica/gráfica.

Em se tratando de geometria, as representações figurais de conceitos geométricos particulares estão compartilhadas com os conceitos geométricos abstratos dos quais são imagem: a componente figural. Assim, os conceitos, em geral, são representados por sua componente figural, a qual descreve as propriedades intrínsecas do objeto matemático, especialmente no tratamento gráfico. Desta forma, ao representar uma função, graficamente, buscaram-se suas propriedades, que serão mostradas, geometricamente, isto é, com qualidades conceituais. (D'Amore, 2007).

Em relação à função do conceito, D'Amore (2007) a define como uma representação, sendo de tipo final: expressar ou revelar a substância das coisas, de tipo instrumental; entre vários aspectos o de descrever os objetos.

Tall e Vinner (1981) para representar um objeto cognitivo lançam mão da diferenciação de imagem conceitual e definição conceitual, esta última uma representação na linguagem natural, isto é, uma forma de descrever em palavras um conceito.

A formação de um conceito é estruturada no campo de múltiplas situações, da mesma forma que numa situação pode-se ter a presença de muitos conceitos. Assim, situação e conceito são instrumentos para representação de um objeto cognitivo, que podem se manifestar em linguagem natural, por meio de um gráfico, uma fórmula algébrica (Pais, 2001).

O conhecimento via procedimental simbólica, reduzido aos cálculos e uso de algoritmo com apenas a manipulação algébrica, muitas vezes, não traz a compreensão da estrutura da função. A diversidade de representações pode facilitar o entendimento do comportamento funcional.

Especificamente, quanto a representações, Stewart (2013), na sua obra dá diretrizes para resolução de um problema pela regra das três abordagens<sup>1</sup>: (1) tratamento algébrico; (2) tratamento geométrico/gráfico; (3) tratamento numérico/tabelas de dados; depois acrescenta mais um tratamento que é da linguagem, a (4) descrição verbal na língua natural da situação em contexto e da problematização. O mesmo autor chama de regra das quatro abordagens.

A representação de um modelo matemático pode ser então, por: (1) equações, (2) gráficos, (3) tabela de dados ou (4) uma descrição em linguagem natural. Autor 2 et al (2017, p. 93) trata da matematização de fenômenos com equações diferenciais com diversidade de representações.

O conceito de fenômeno, como um acontecimento, um processo em ação, em transformação, com mudanças perceptíveis por observação, pode ser entendido como uma experimentação pelo “movimento” e pela “variação”. Ao observar um fenômeno, em seu processo de variação, procedemos a uma medição que requer uma analítica com instrumentação para aferir e tratar as informações com variáveis, com parâmetros, com sistema de unidades e escalas. Traduzir este processo inerente ao fenômeno em uma linguagem simbólica específica, numa tentativa de sintetizar características de sua dimensão, constitui o ato de matematizar o fenômeno, ou seja, a ação de matematização.

Para modelagem matemática, as equações diferenciais se apresentam como instrumento adequado para a representação de muitos fenômenos. Matematizar um fenômeno é buscar uma linguagem de representação, a qual possa traduzir as suas propriedades, as nuances, a estrutura, a qualidade e assim, permitir manifestar a sua totalidade. Matematizar não se reduz a produzir uma equação, em muitos casos uma representação gráfica pode mostrar com mais clareza o comportamento da função, que representa o modelo do fenômeno.

Especificamente, quanto ao ensino de Cálculo, Nasser (2009), Frota e Couy (2009) enfatizam que muitos conceitos foram desenvolvidos com a linguagem visual apoiados com métodos intuitivos e visuais.

Na pesquisa realizada foram utilizadas duas formas de representação da função: algébrica para a gráfica. A derivada foi o parâmetro utilizado para entendimento do comportamento da função. O estudo da função, apenas na sua forma algébrica com as dificuldades de manipulação das operações, não revela todo comportamento da função, o qual pode ser mais bem estudado com a visualização

<sup>1</sup> Na tentativa de auxiliar os estudantes a descobrirem o cálculo, James Stewart no ímpeto da reforma do cálculo (Conferência de Tulane em 1986) dá ênfase na compreensão de conceitos e para atingir seu objetivo baseou-se na visualização, experimentação numérica e gráfica (regra dos três) e posteriormente, na verbalização (regra dos quatro).

gráfica. O mesmo pode ocorrer com o estudo por uma tabela dos valores da função que pode não trazer os seus pontos críticos, pois na composição e escolha dos pontos a constituir a tabela, pontos críticos podem estar fora do campo de dados que é tomado. O gráfico pode revelar com mais propriedade todo comportamento da função.

## **A DIDÁTICA DA MATEMÁTICA E A INFORMÁTICA EDUCATIVA**

A educação matemática é uma área de estudos e pesquisas cujo objeto é interpretar e descrever fenômenos referentes ao ensino e à aprendizagem na sua dimensão teórica e prática, compreendendo a didática como um espaço da

[...] elaboração de conceitos e teorias que sejam compatíveis com a especificidade educacional do saber escolar matemático, procurando manter fortes vínculos com a formação dos conceitos matemáticos, tanto em nível experimental da prática pedagógica, como no território teórico da pesquisa acadêmica (Pais, 2001, p. 11).

No campo da didática, entende-se a prática didática como a condução do fazer pedagógico nas relações professor, aluno e saber, intermediada pelas relações que acontecem na sala de aula, moldadas pelas características relativas ao próprio saber matemático.

Definir os conteúdos da didática tem sido uma preocupação teórica e instrumental, podendo não ser fácil justamente pela sua simplicidade e clareza, assim de acordo com D'Amore (2007, p. 23), “a didática é a parte das ciências da Educação que tem como objetivo o estudo dos processos de ensino e aprendizagem em sua globalidade independente da disciplina em questão.”

A didática pode ser considerada como ciência da produção, organização e gestão do sistema de ensino e aprendizagem, aí entendendo todos os processos do sistema escolar, compreendendo a didática geral, mais ampla no seu domínio, e a didática da disciplina, mais específica, com seus parâmetros, paradigmas e objetivos inerentes à problematização peculiar de cada conteúdo disciplinar tratado.

A didática da matemática nos seus processos de facilitação da aprendizagem requer a definição de linhas gerais paramétricas a considerar o trabalho conceitual e a prática procedimental. O conceito pode ser entendido como ideias gerais e abstratas para sintetizar uma classe de objetos, situações ou problemas no âmbito da disciplina e, formalizado por uma definição cuja representação pode ser de formas diversas, notada por um registro. A prática procedimental é desenvolvida pelos processos de cálculo e uso de algoritmo para aquisição de habilidades de aprendizagem dos processos algébricos e dos cálculos no tratamento de modelos, em situações nas quais se tem uma problematização a ser processada e equacionada.

Para o tratamento da formação dos conceitos e da prática procedimental requer-se a utilização de instrumentos pelos quais o trabalho do saber matemático é viabilizado, isto é, a presença das tecnologias. Desta forma, a identificação e a seleção tecnológica na prática didática dependem da natureza do conteúdo, bem como, da situação escolar quanto ao saber conceitual ou procedimental. Com a expansão da informática com suas ferramentas de comunicação e expressão, baseadas nos processos tecnológicos da eletrônica e da computação ficam facilitadas a diversificação de métodos e materiais informatizados.

A alternância dos processos didáticos pode trazer melhor interação professor - aluno e facilitar o diálogo com o saber, trazendo não só eficiência, mas também, a eficácia da aprendizagem. Nas várias

situações didáticas, na mediação entre o saber e os métodos de estudo, estão os materiais e artefatos tecnológicos, que os professores utilizam para viabilizar sua prática possibilitando a construção de múltiplos recursos metodológicos.

Com a informática educativa, a alternância dos processos didáticos se faz com possibilidades do professor deixar a exposição restrita e adotar a aula dialogada da construção do conhecimento, diminuindo a transmissão verticalizada com a mediação tecnológica da variação dos processos da aprendizagem. As tecnologias computacionais e da informática como o vídeo, a internet, entre outros, trazem facilidades de estratégias dos novos materiais didáticos. O trabalho do professor e do estudante fica mais atrativo com as possibilidades dinâmicas e de movimento que caracterizam o Cálculo como o uso, por exemplo, da geometria dinâmica computacional que permite a plotagem de grande número de gráficos para facilitar a compreensão das propriedades de um conceito ou de uma função. Este foi o objetivo da pesquisa desenvolvida, ora apresentada.

## **OBJETO DE APRENDIZAGEM E A SEQUÊNCIA DIDÁTICA E DE CONTEÚDO**

A organização de um plano de ensino requer um planejamento de sequências de conteúdos e de sequência didática. A construção destas sequências é realizada por unidades didáticas, as quais compreendem um conjunto de atividades ordenadas e articuladas. Por tipo de ordem das atividades entende-se, segundo Zabala (1988, p.53) “uma classificação entre métodos expositivos ou manipulativos, por recepção ou descoberta, indutivos ou dedutivos, etc.” A articulação das atividades se faz pela maneira de situar as mesmas umas em relações às outras, isto possibilitando identificações e caracterizações didáticas. Assim, definir os tipos de relações entre estudante e professor, estudante e estudante perante os saberes trabalhados é fundamental para o processo didático.

Desta forma, segundo o mesmo autor, identificar as fases de uma sequência didática, as atividades articuladas com o conteúdo e as relações entre os agentes do sistema ensino e aprendizagem, são os parâmetros para o planejamento, processamento e avaliação da aula com valor educacional. Os conteúdos, em diversas sequências, segundo Zabala (1988), a partir de uma aula expositiva unidirecional verticalizada a uma aula mais dialógica com participação ativa dos estudantes, podem ser definidos como conceitual, procedimental ou atitudinal. Assim, o conceitual mais relativo à compreensão das proposições antecedendo a formalização, o procedimental quanto ao uso de algoritmos e cálculos e os atitudinais, nas relações dos agentes do processo de aprendizagem e ensino.

D’Amore (2007), ao avaliar a complexidade do sistema de ensino de Matemática, o divide em teoria, desenvolvimento e prática, com três âmbitos: a ação prática reflexiva sobre os processos de ensino e aprendizagem da Matemática, a tecnologia didática que se propõe preparar materiais e a pesquisa científica para o entendimento do sistema de ensino. Pode se entender, segundo o mesmo autor, os dois primeiros âmbitos como pesquisa para ação e o terceiro, investigação para o conhecimento. A didática da Matemática está interessada nas teorias, desenvolvimento e prática a serem formatadas a partir das sequências de conteúdo e sequência didática.

Um instrumento valioso que pode abrigar as sequências de conteúdo e de aprendizagem é o Objeto de Aprendizagem. Para Wiley (2002), objetos de aprendizagem são elementos de um novo tipo de instrução baseados em computadores e são fundamentados na programação orientada a objeto (POO) no campo da ciência da computação e visa valorizar a elaboração de pequenos componentes instrucionais que podem ser reutilizados em vários contextos educacionais.

O conceito de material didático passa por mudanças da rigidez para o movimento, à interatividade, à ação. Essa nova tendência credencia o Objeto de Aprendizagem com tais características para se constituir um dispositivo de fácil manipulação e com possibilidades de eficácia da aprendizagem. Agregando tecnologia computacional, da Informática e da Comunicação, para Wiley (2002) os Objetos de Aprendizagem se constituem um recurso digital rico para a didática, permitindo diversidade de procedimentos de ensino.

As ferramentas normalmente utilizadas para a criação do Objeto de Aprendizagem são diversas mídias como *applets*, vídeos, *website*, envolvendo programas mais elaborados, alguns exigindo linguagem de programação. Entretanto, por sua potencialidade com diversidade e versatilidade para diferentes ambientes de aprendizagem, com possibilidades de animação e simulação, o Objeto de Aprendizagem é um recurso que pode ser estruturado com as mais diferentes sequências didáticas, renovando as práticas educativas por meio da interação com os objetos de estudo, permitindo-se assim, que professores e estudantes possam criar situações desafiadoras.

O papel do professor está em todas as fases da sequência didática: criação das atividades (conteúdo e didática), identificação das mídias e sua compatibilização com as atividades, aplicação com a função de mediador e avaliador, e agente de reprogramação, pois o Objeto de aprendizagem tem uma importante propriedade da operabilidade em diferentes espaços de aprendizagem como, por exemplo, com o auxílio da *WEB 2.0*.

Programar na *WEB2.0* significa interfaces mais elaboradas e de fácil utilização onde o aluno pode se apropriar de uma autonomia criativa e, por outro lado, possibilita o professor ampliar suas estratégias de ensino. Novas informações são criadas pelos próprios usuários numa rede de conhecimentos, gerando assim uma nova inteligência coletiva.

Avançaremos mais se soubermos adaptar os programas previstos às necessidades dos alunos, criando conexões com o cotidiano, com o inesperado, se transformarmos a sala de aula em uma comunidade de investigação. (Moran, Masseto e Berhens, 2000, p. 20)

Enfim, ao programar um Objeto de Aprendizagem, a partir de uma sequência didática, são criadas situações que facilitam as discussões e debates num ambiente educacional com recursos de diferentes mídias.

## **ANÁLISE DO OBJETO DE PESQUISA EM LIVROS DIDÁTICOS**

No intuito de definir uma metodologia que contemple a visualização, a experimentação numérica/gráfica e a simulação, realizou-se uma análise em livros de Cálculo, atualmente editados. Dessa forma, selecionou-se 3 (três) livros, conforme o Quadro 1.

Em seguida, para discorrer acerca do estudo do comportamento de funções por meio de derivadas, foram selecionados os tópicos das atividades da sequência didática, conforme o Quadro 2.

**Quadro 1 - Livros didáticos avaliados**

Código	Título	Autores	Editora	Edição	Ano
L1	Cálculo (v.1)	Howard Anton -IrBivens Stephen Davis	Bookman	8 <sup>a</sup>	2007
L2	Cálculo (v.1)	George B. Thomas Jr.- Maurice D. WeirJoel Hass - Frank R. Giodano	Addison Wesley	11 <sup>a</sup>	2009
L3	Cálculo (v.1)	James Stewart	Cengage Learning	7 <sup>a</sup>	2013

Fonte: Elaborado pelos autores.

**Quadro 2 - Tópicos analisados.**

Código	Tópicos
T1	Definição de Derivada de uma função
T2	Análise do crescimento e decrescimento da função por meio da derivada
T3	Análise dos pontos críticos da função em um intervalo por meio da derivada
T4	Análise da concavidade da curva por meio da derivada

Fonte: Elaborado pelos autores.

E finalmente, foram elencados como cada livro aborda os tópicos acima relacionados, conforme Quadro 3.

**Quadro 3 - Abordagens analisadas (por tópico).**

Código	Abordagem
A1	Existência de motivação para o estudo do tópico
A2	Apresentação de pré-requisitos antes de abordar o tópico
A3	O autor apresenta os tópicos de forma algébrica
A4	O autor apresenta os tópicos de forma geométrica
A5	Há número de exemplos satisfatório
A6	Os exercícios são graduados em níveis de dificuldade
A7	Há exercícios que contemplam aplicações em diversas áreas
A8	Há exercícios que estimulam a utilização da tecnologia

Fonte: Elaborado pelos autores

O resultado, das análises realizadas nos livros-texto citados no Quadro 1 de acordo com os tópicos e abordagens definidos nos Quadros 2 e 3, está apresentado no quadro 4, a seguir:

**Quadro 4 - Avaliação dos livros segundo a abordagem de cada tópico**

	L1				L2				L3			
	T1	T2	T3	T4	T1	T2	T3	T4	T1	T2	T3	T4
A1	B	B	R	R	N	N	N	N	F	F	F	F
A2	B	B	B	R	R	B	R	B	F	F	F	F
A3	B	R	R	R	B	R	R	R	B	B	B	B
A4	B	B	B	B	B	B	R	B	O	O	O	O
A5	B	B	B	R	B	B	R	B	O	O	O	O
A6	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O
A7	O	B	R	R	O	O	O	O	O	O	O	O
A8	R	R	R	R	O	O	O	O	O	O	O	O

N (NÃO POSSUI)<sup>1</sup> / F (FRACO)<sup>2</sup> / R (REGULAR)<sup>3</sup> / B (BOM)<sup>4</sup> / O (ÓTIMO)<sup>5</sup>

**Fonte:** Elaborada pelos autores

Pode-se observar que, de forma geral, os livros utilizam mais a representação algébrica do que a representação geométrica com traçado e análise gráfica. Não estimulam a diversidade de representações com atividades pelas quais o estudante possa passar de uma representação para outra, obtendo maior compreensão nessa transição. Não há relação entre a abordagem algébrica com as operações de cálculos e o traçado de gráfico. Os livros indicam *softwares* para uso da tecnologia sem a construção de atividades informatizadas, as quais podem explorar múltiplas situações pela versatilidade e facilidades da informática educativa com recursos de várias mídias.

A Pesquisa experimental apresentada, com a criação do Objeto de Aprendizagem, objetivou atender estas demandas.

## A ESTRUTURA DA PESQUISA DESENVOLVIDA

As categorias de pesquisa científica foram cumpridas como descrito:

**(1)** Levantamento bibliográfico da produção acadêmica do tema em estudo, para criação do referencial teórico metodológico, já apresentado:

- A educação matemática no Ensino Superior - O ensino de cálculo,
- A aprendizagem de Cálculo com diversidade de representação,
- A didática da Matemática e a informática educativa,
- Objeto de aprendizagem e a sequência didática e de conteúdo.

**(2)** Análise do objeto estudado em Livros Didáticos de Cálculo para conhecer as suas abordagens segundo autores contemporâneos, já apresentada.

A partir destes fundamentos, a Pesquisa foi desenvolvida em 2(duas) etapas:

1<sup>a</sup> ETAPA: Produção de atividades em sequências de conteúdo e didática armazenadas num Objeto de Aprendizagem criado para esta finalidade;

2<sup>a</sup> ETAPA: Aplicação do Objeto de Aprendizagem para sua validação.

## DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA

### Primeira etapa: Produção de atividades em sequências de conteúdo e didática armazenadas num Objeto de Aprendizagem criado para esta finalidade

#### a) Produção das sequências com as atividades

Para a produção das atividades da sequência didática, elencou-se fundamentos baseados em Zabala (1988) onde métodos expositivos e manipulativos, por recepção ou descoberta, indutivos ou dedutivos pudessem ser explorados. Dessa forma, buscou-se articular as atividades dando sentido a cada uma delas. Essa articulação se faz pela maneira de situar em relacionamento entre as atividades possibilitando as caracterizações didáticas.

Inicialmente, com base nos parâmetros teóricos metodológicos foram produzidas sequências com atividades, definindo as representações de algébrica para geométrica/gráfica, isto é, a conversão de dois registros de representações, apoiados por um Objeto de Aprendizagem baseados em applets construídos a partir do software livre de geometria dinâmica, o GeoGebra. Este O.A. procurou abranger elementos que favorecessem a construção e posterior aquisição de conceitos. Sua organização permitiu que cada sujeito envolvido pudesse compreender a relação entre o comportamento da função e sua derivada.

Tais atividades serão constituídas das seguintes sequências de atividades:

Sequência 1: Definindo o crescimento/decrescimento da função em um intervalo.

Sequência 2: A relação entre o crescimento/decrescimento da função e sua derivada.

Sequência 3: Testando conhecimentos adquiridos nas atividades 1 e 2.

Sequência 4: Análise dos pontos máximos e mínimos da função.

Sequência 5: Análise dos pontos de inflexão.

Sequência 6: Análise da concavidade da curva.

Sequência 7: Testando conhecimentos adquiridos nas atividades 4 a 6.

Sequência 8: Testando conhecimentos: Testes finais.

Devido à presença de uma quantidade significativa de elementos visuais, em comparação às demais atividades, serão apresentadas neste artigo as atividades 3 (três) da segunda sequência e 5 (cinco) da quarta sequência.

#### Sequência 2 (Atividade 3)

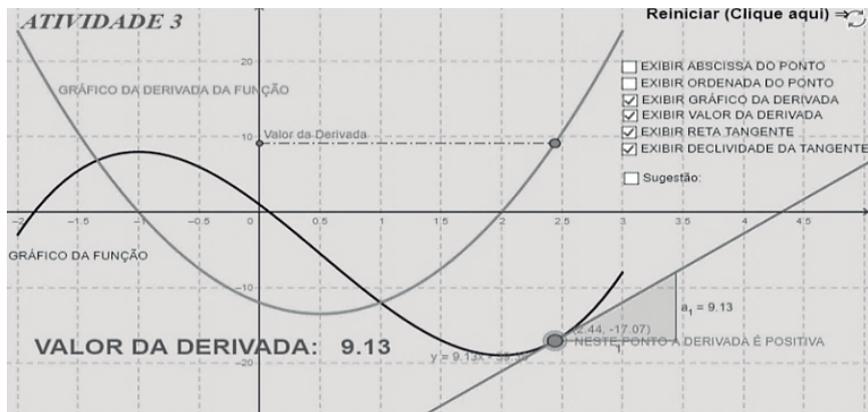
**Título:** A relação entre o crescimento/decrescimento da função e sua derivada.

**Conteúdo:** Análise o crescimento/decrescimento da função por meio da derivada.

**Objetivos:** Estimular discussões e promover a elaboração de conjecturas por meio de investigações, em gráficos de funções, acerca da relação existente entre o sinal da derivada de uma função e seu comportamento crescente ou decrescente. Proporcionar ao aluno a visualização da derivada como medida da declividade da reta tangente à curva.

O gráfico presente nesta atividade apresenta recursos que irão auxiliar os alunos em suas observações, conforme apresentado na figura 1.

**Figura 1** - Gráfico da Atividade 3 (com recursos ativos).



Fonte: Elaborado pelos autores (*Software GeoGebra*).

Com o gráfico da atividade 3(três) disponível, o aluno é levado a realizar observação e elaborar conjecturas acerca da relação entre o comportamento da função e o sinal da derivada. Após a finalização das observações, com a intenção de validar as conjecturas realizadas, o aluno é levado a responder questões contidas num Caderno de Atividades. Podem-se ver algumas dessas questões na figura 2.

**Figura 2** - Questões para registros / Sequência 2 (Atividade 3).

1ª Questão

De acordo com as observações realizadas, qual o seu julgamento para o fato da derivada no intervalo  $[-2,-1]$  ser POSITIVA?

2ª Questão

De acordo com as observações realizadas nas atividades nº 1 e nº 2 da sequência anterior, qual relação você julga haver entre o comportamento da função e o sinal da derivada no intervalo  $[-2,-1]$ ?

Fonte: Elaborado pelos autores (Caderno de Atividades).

## Sequência 4 (Atividade 5)

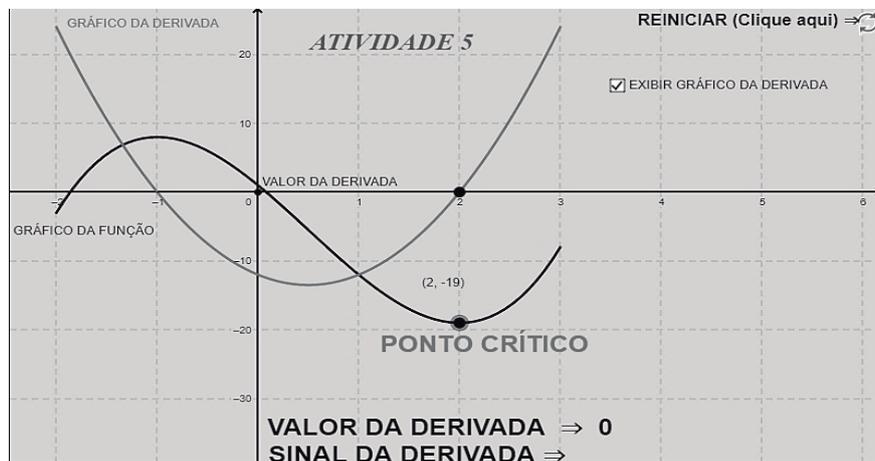
**Título:** Análise dos pontos máximos e mínimo da função.

**Conteúdo:** Localização dos pontos de máximos e mínimos no gráfico, por meio de derivadas.

**Objetivos:** Estimular o aluno a investigar em gráficos de funções a relação entre derivada de uma função e os pontos críticos (de máximo e mínimo). Promover discussões e criação de conjecturas acerca da localização dos pontos de máximos e mínimos por meio de derivadas da função. Promover a compreensão acerca da influência da derivada na localização dos pontos críticos de máximo e mínimo.

De forma análoga à atividade anterior, esta atividade é dividida em fase exploratória e de registro e, também se utiliza gráfico com recursos que auxilia o aluno em suas observações, conforme Figura 3.

**Figura 3 - Gráfico da Atividade 5.**



Fonte: Elaborado pelo autor (Software GeoGebra).

A atividade 5, em sua fase exploratória, leva o aluno a realizar observações e a conjecturar relação entre o comportamento da função e o sinal da derivada e, após as observações realizadas, inicia-se a fase de registro na qual o aluno é levado a responder questões contidas no Caderno de Atividades. Podem-se ver algumas dessas questões na figura 4.

**Figura 4 - Questões para registros / Sequência 4 (Atividade 5).**

1ª questão

De acordo com o observado, como a 1ª derivada de uma função pode nos ajudar a encontrar um PONTO MÍNIMO na curva?

2ª Questão

De acordo com o observado, como a 1ª derivada de uma função pode nos ajudar a encontrar um PONTO MÁXIMO na curva?

**Fonte:** Elaborado pelos autores (Caderno de Atividades).

## b) Criação do Objeto de Aprendizagem

As atividades foram elaboradas em sequências didáticas e de conteúdo, com a criação do Objeto de Aprendizagem utilizando o *software* GeoGebra. A opção em utilizar este *software* objetivou dar dinamismo ao objeto de estudo. A facilidade de sua aquisição e sua interface amigável facilita-lhe a manipulação. Com a viabilização de seus *applets*, a ação do estudante fica ainda mais simples pelo fato de o aluno não ter necessidade de dominar todos os seus comandos.

Desde sua gênese, na Pesquisa de Mestrado, o Objeto de Aprendizagem passou por atualizações com o intuito de aprimorar sua interface com o usuário e expandir sua aplicabilidade. As sequências didáticas com as atividades permaneceram as mesmas com a mesma metodologia e objetivos. Tal atualização e aprimoramento se deram em consonância com as inovações tecnológicas e a produção de novas mídias, o que é desejável na atualização de produtos educacionais informatizados. As versões foram as seguintes:

- 1ª versão (*PowerPoint -Microsoft/Applets GeoGebra*)

Na primeira versão, o Objeto de Aprendizagem foi elaborado por meio do *software PowerPoint da Microsoft* em conjunto com *applets* (pequenos programas na linguagem JAVA<sup>2</sup>) que, por sua vez, foram construídos por meio de um *software* livre de geometria dinâmica, o GeoGebra. Este proporciona dinamismo ao objeto de estudo, é de fácil aquisição e sua interface é amigável facilitando a manipulação por parte do estudante. Essa configuração se tornou necessária devido às limitações técnicas dos laboratórios de informática disponíveis e, nessa versão, sua instalação se tornou viável e possibilitou aos pesquisadores a aplicação das atividades propostas de forma ágil.

- 2ª versão (*Software -HTML/Applets GeoGebra*)

Nesta versão, com o intuito de facilitar a sua instalação e disponibilizar para download, o Objeto de Aprendizagem foi otimizado por meio de programação na linguagem HTML (*Hyper Text Markup Language*) e ainda, baseado em *applets*. Essa configuração se mostrou mais dinâmica e proporcionou ao estudante uma maior interação com o Objeto de Aprendizagem em comparação com a versão anterior já que, tanto as atividades quanto os gráficos eram de fácil acesso.

- 3ª versão (*WEB 2.0*)

Nesta versão, as sequências didáticas presentes neste O.A. se apresentam da mesma forma que na versão *software* e seu desenvolvimento. Demanda a utilização de computadores com acesso à internet, possibilitando assim os alunos a realizarem as atividades em qualquer tempo e lugar sem nenhuma restrição e, além disso, por meio de chat, fóruns, e-mails e videoconferências podem continuar a interagir com o professor, tirando dúvidas e, com os colegas, socializando suas descobertas. O desenvolvimento dessa versão promoveu a interatividade desejada e também propiciou que as discussões transcendessem os limites espaciais e temporais de uma aula presencial.

## **Segunda etapa: Aplicação do Objeto de Aprendizagem para sua validação e análise dos resultados**

Nesta Pesquisa, o monitoramento da aplicação das atividades, foi realizado por meio de vários instrumentos, como questionários, registro das atividades desenvolvidas e resolvidas pelos alunos com o auxílio da informática e observação direta pelo pesquisador. Dessa forma, o trabalho realizado proporcionou uma coleta de dados detalhados, contribuindo, assim, com o aprofundamento das análises e com conclusões mais confiáveis.

A técnica de pesquisa na aplicação foi a observação participante que ocorreu de forma sistemática e controlada, para se tornar um válido e fidedigno instrumento de investigação científica, segundo Ludke e André (1986).

---

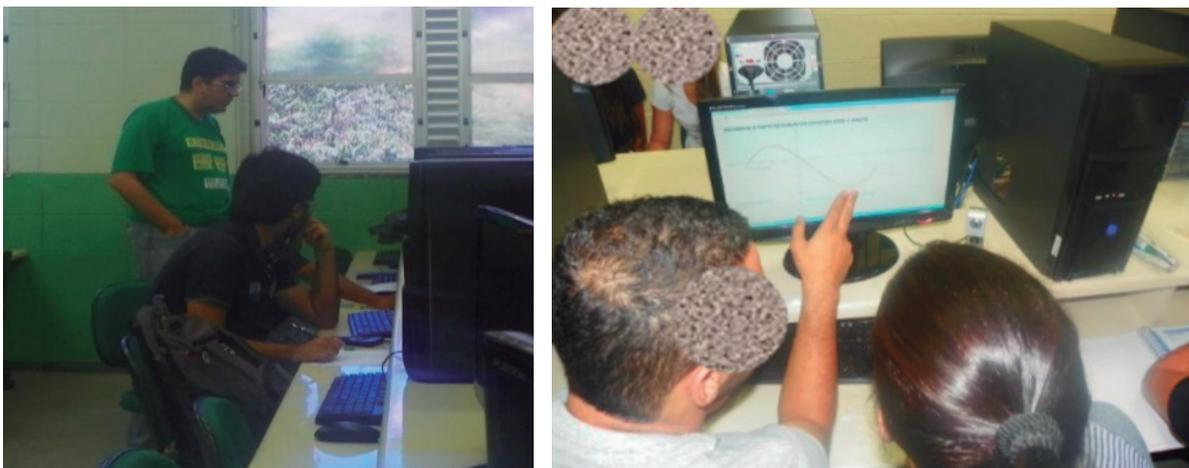
<sup>2</sup>JAVA (Java é uma linguagem de programação e plataforma computacional lançada pela primeira vez pela Sun Microsystems em 1995).

As sequências de atividades foram aplicadas durante o mês de fevereiro de 2014, em três encontros totalizando seis horas-aulas e foram aplicadas em uma turma de 34 (trinta e quatro) alunos do segundo período do curso de Engenharia Civil de uma Faculdade no interior de Minas Gerais. Não foi possível obter a totalidade dos alunos em todos os encontros e, assim, foram levados em consideração apenas os resultados dos alunos com 100% (cem por cento) de frequência, ou seja, 28 (vinte e oito) alunos.

Para a realização da Pesquisa, os alunos foram deslocados para um dos laboratórios de informática da Faculdade e distribuídos em duplas. Após todos estarem acomodados em seus lugares, os estudantes iniciaram a execução das atividades.

O acompanhamento das atividades pelos pesquisadores se deu com dois objetivos. O primeiro de mediador do processo de ensino e aprendizagem e, o segundo, como observador, fazendo a coleta de comentários, observações e situações que ocorreram durante os encontros. Verificou-se a postura ativa dos alunos, conforme a figura 7.

**Figura 7** - Observação do pesquisador / Alunos discutindo acerca das atividades.



Fonte: Acervo dos pesquisadores.

Foi solicitado aos estudantes que fizessem anotações de suas observações e, dessa forma, realizou-se a coleta de dados para posterior análise qualitativa da prática adotada. Ao final de cada encontro, eram recolhidos os Cadernos de Atividades. Nos encontros seguintes, os Cadernos eram devolvidos para a conclusão das atividades anteriores e começo de novas atividades. Deve-se ressaltar que, ao longo de cada encontro, grupos de alunos interagiam para socialização das conclusões e compartilhamento de resultados.

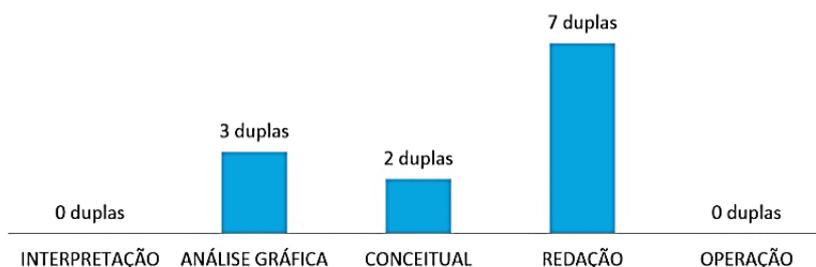
### **Análise dos dados.**

Serão apresentadas as análises dos resultados da aplicação das atividades das sequências 2 (dois) e 4 (quatro) do Objeto de Aprendizagem desta Pesquisa.

## Sequência 2 - Relação entre o crescimento/decrescimento da função e sua derivada

Após a execução das atividades, os alunos deveriam registrar suas observações e suas conclusões. E após análise dos registros, constataram-se ocorrências de dificuldades conforme o Gráfico 1.

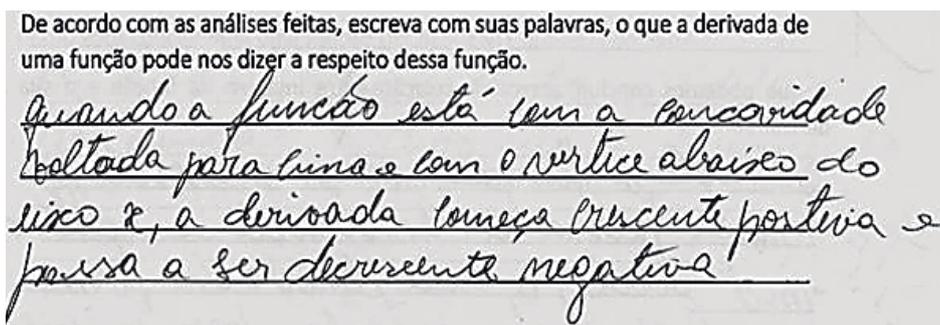
**Gráfico 1** - Ocorrência das dificuldades<sup>3</sup> ocorridas na sequência 2.



Fonte: Dados da pesquisa.

As análises dessa sequência confirmam o problema na escrita dos estudantes, apesar de um número menor de ocorrências. Segundo os dados, 7 (sete) duplas não redigiram de forma satisfatória suas observações. Esperava-se que, para o caso de uma função crescente, os registros contemplassem a associação do sinal positivo da derivada de uma função e, por outro lado, associassem o sinal negativo da derivada de uma função com o comportamento decrescente de uma função. A Figura 8, apresenta o registro da dupla 3 que, por se perder em sua análise gráfica, utilizou todos os elementos visualizados como justificativa para sua conclusão.

**Figura 8** - Registro da dupla 2.



Fonte: Dados da pesquisa.

<sup>3</sup>INTERPRETAÇÃO - Os alunos interpretaram o enunciado da questão de forma errada.

ANÁLISE GRÁFICA - Os alunos interpretaram os dados do gráfico e forma errada.

CONCEITUAL - Os alunos não apresentaram conhecimentos dos pré-requisitos.

REDAÇÃO - Os registros foram elaborados de forma vaga e sem sentido.

OPERAÇÃO - Os alunos apresentaram dificuldade na manipulação do Objeto de Aprendizagem.

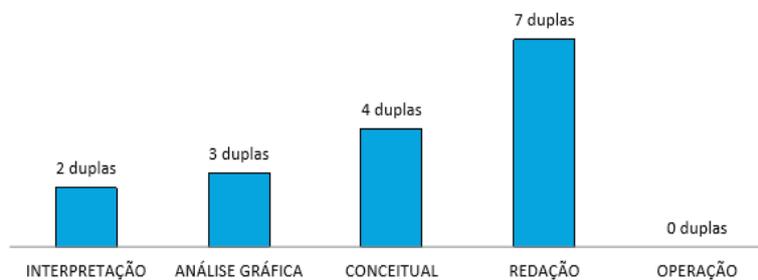
Em decorrência disso, a redação ficou confusa e sem sentido por terem utilizados termos matemáticos fora do contexto. Nesse caso, uma análise gráfica equivocada afetou a redação e a construção dos conceitos.

De maneira geral, excetuando os erros de redação e a ausência de formalidade nas respostas, esta atividade não apresentou muitos problemas acerca da compreensão do tema proposto.

#### Sequência 4 - Análise dos pontos máximos e mínimos da função

Após a execução das duas atividades, os alunos deveriam registrar suas observações e suas conclusões. Após análise dos registros, constataram-se ocorrências de dificuldades, conforme o Gráfico 2.

**Gráfico 2** - Ocorrência das dificuldades<sup>4</sup> ocorridas na sequência 4.



Fonte: Dados da pesquisa.

As análises dessa sequência confirmam o problema da escrita dos estudantes e o número de ocorrências da última sequência foi mantido. Esperava-se que os alunos registrassem essas descobertas. Nessas atividades, os alunos percebiam pela análise gráfica que, ao passar pelos pontos críticos, a derivada alterava seu sinal. Porém, alguns alunos tiveram a dificuldade de perceber que, nos pontos críticos, a derivada assumia o valor 0 (zero). Assim, não conseguiam encontrar os pontos críticos por meio da derivada.

O professor, ao perceber que a análise estava no caminho certo, mas que os alunos estavam com dificuldade de concluir acerca do valor nulo da derivada, interferiu proporcionando o seguinte diálogo:

**Professor:** Leiam com atenção o registro feito por vocês e verifiquem se não conseguem tirar alguma conclusão a mais.

**Alunos:** Como assim professor?

**Professor:** Vejam bem! Analise primeiro o ponto mínimo. O que vocês perceberam?

**Alunos:** A função desce e depois sobe.

**Professor:** Tem alguma forma diferente de expressar isso? Pense na primeira atividade.

<sup>4</sup>INTERPRETAÇÃO - Os alunos interpretaram o enunciado da questão de forma errada.

ANÁLISE GRÁFICA - Os alunos interpretaram os dados do gráfico e forma errada.

CONCEITUAL - Os alunos não apresentaram conhecimentos dos pré-requisitos.

REDAÇÃO - Os registros foram elaborados de forma vaga e sem sentido.

OPERAÇÃO - Os alunos apresentaram dificuldade na manipulação do Objeto de Aprendizagem.

**Alunos (Após alguns segundos):** A função é decrescente e depois é crescente.

**Professor:** Ok! Agora pensem no ponto máximo.

**Alunos:** A função sobe e depois desce, a função cresce e depois decresce.

**Professor:** Ok! O que ocorre quando a função é crescente? Pensem nas atividades realizadas até agora.

**Alunos (Após alguns momentos de silêncio):** A imagem cresce? A derivada cresce? A derivada é positiva.

**Professor:** Ok! O que ocorre quando a função é decrescente?

**Alunos:** A derivada é negativa.

**Professor:** Ok! Agora pensem o que está ocorrendo com a derivada no ponto máximo e no ponto mínimo e tirem alguma conclusão.

**Alunos (após algumas discussões):** Professor! No ponto máximo e no ponto mínimo a derivada muda de sinal.

**Professor:** Tudo bem! E aí? Agora é com vocês.

Após essa intervenção e com alguns debates entre os estudantes, a maioria conseguiu expressar em seus registros como a derivada contribui para localizar os pontos críticos e, mais precisamente, os pontos de máximo e mínimo.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

A estruturação da Pesquisa foi baseada em parâmetros obtidos do diálogo entre pesquisadores da Educação Matemática Superior acerca de práticas educativas no Ensino de Cálculo, por meio da utilização de tecnologias.

A construção do Objeto de Aprendizagem foi estruturada com sequências didáticas com parâmetros de Zabala (1998), e mudanças de representações de algébricas para geométricas/gráficas para melhor eficiência no exercício da habilidade de visualização e a conseqüente aquisição de conceitos. Segundo Duval (2009), a mudança de representações, em pelo menos duas, facilita a compreensão com aprendizagem significativa, o que ocorreu segundo a análise dos registros apresentada.

A análise dos dados qualitativos, segundo os parâmetros Ludke e André (1986), além de Borba (2013) confirma a eficácia do experimento. Assim, a partir dos posicionamentos dos alunos e nos resultados das observações, apontam-se contribuições proporcionadas pelo Objeto de Aprendizagem às aulas, exclusivamente expositivas, tais como: a possibilidade de visualização de algumas propriedades que, tradicionalmente, são manipuladas apenas algebricamente; a abertura para conjecturas e discussões; o ambiente dinâmico que contrasta com os modelos estáticos apresentados nos livros didáticos; a abordagem intuitiva de conceitos que tradicionalmente são explorados de uma maneira formal; a mudança para uma postura mais ativa dos alunos. A utilização do Objeto de Aprendizagem informatizado proporcionou uma interação docente/estudante, estudante /estudante fundamental para que os estudantes sejam levados a uma contínua reflexão, mais participantes na construção de seus próprios conhecimentos, quanto as mediações. Moran et al (2000).

O Objeto de Aprendizagem cumpriu o seu papel uma vez que permitiu, além da melhor comunicação dos agentes do processo de ensino e aprendizagem, experimentações e simulações. O uso da informática educativa por meio de um software dinâmico permitiu a exploração e formalização de conceitos a partir de movimentação de pontos, variação de abscissas e de ordenadas, dos valores e sinais das derivadas e dos comportamentos dos gráficos das funções, com a interpretação e análise reflexivas.

Destaca-se que, durante a aplicação do Objeto de Aprendizagem, foram constatadas na observação participante, mudanças consideráveis na atitude dos alunos, quanto a sua autonomia e postura crítica e, à medida que a familiarização com o *software* aumentava, tais características se tornaram mais evidentes. Os estudantes foram levados a conjecturar em contínua reflexão, quando se tornarem mais ativos na construção do próprio conhecimento.

Essa mudança de postura se refletiu no ambiente em sala de aula, quando questionamentos e reflexões se tornaram mais frequentes e, dessa forma, houve uma postura mais ativa perante o desenvolvimento do conteúdo, a partir de várias mediações.

A utilização de um Objeto de Aprendizagem em ambientes informatizados com uma sequência didática pode contribuir para a flexibilização das práticas docentes, o que comprovou os resultados da Pesquisa, ora apresentada.

## REFERÊNCIAS

ANTON, H. **Cálculo**. v.1. 8.ed. Porto Alegre-RS: Bookman, 2007.

BISHOP, A.J. Review of research on visualization in Mathematics education. **Focus on Learning Problems in Mathematics**, v. 11, n. 1-2, 1989. p. 7-16.

BORBA, M. C.; ARAUJO, J. L. Pesquisa qualitativa em Educação Matemática: notas introdutórias. In: BORBA, M. C., ARAÚJO, J. L. (orgs). **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica. 2013. p. 23-29.

### AUTOR 1 (2014).

D'AMORE, B. **Elementos de Didática da Matemática**. São Paulo: Editora Livraria da Física. 2007.

DUBINSKY, E.; ELTERMAN, F.; GONG, C. The Student's Constrution of Qualification. *For the Learning Mathematics*, v. 8, n. 2, 1988, p. 44-51 .

DUVAL, R. **Semiósis e Pensamento Humano**. São Paulo: Editora Livraria da Física. 2009.

FISCHBEIN, E. The interaction between the formal, the algorithmic and the intuitive components in a mathematical activity. **Didactics of mathematics as a scientific discipline**. 1994. p. 231-245.

FROTA, M. C. R. **O pensar matemático no ensino superior: concepções e estratégias de aprendizagem dos alunos**. 2002. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação da UFMG, Programa de Pós-Grduação em Educação: Conhecimento e Inclusão Social. Belo Horizonte.

FROTA, M.C.; COUY, L. Estratégias para o Ensino e Aprendizagem de Funções com um Foco no Pensamento Visual. In: **Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, 4, 2009, Brasília. Anais... Brasília: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2009. p. 1-20

IGLIORI, S. C.; SILVA, A. B. Concepções dos alunos sobre os números complexos. In: Autor 2 (2001)

### AUTOR 2 (2017)

LEIVAS, J. C. P.; SOARES, M. T. C. Números Complexos e Geometria: uma envolvente conexão. In: FROTA et. Al.(orgs.) **Marcas da Educação Matemática no Ensino Superior**. Campinas: São Paulo, 2013. p. 253-276.

LUDKE, M.; ANDRÉ, M. **Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas**. São Paulo: EPU,1986.

MORAN, J. M.; MASSETTO, M. T.; BEHRENS, M. A. **Novas tecnologias e mediação pedagógica**. Campinas - SP: Papirus, 2000.

NASSER, L. Uma Pesquisa sobre o Desempenho de Alunos de Cálculo no Traçado de Gráficos. In: **Educação Matemática Superior: pesquisas e Debates**. REZENDE, M. C., NASSER, L. (orgs). Recife, Pernambuco: SBEM, 2009. p. 43-56.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (NCTM). **Princípios e Normas para a Matemática Escolar**. Lisboa: APM, 2008.

PAIS, L. C. **Didática da Matemática- Uma Análise da Influência Francesa**. Belo Horizonte: Autêntica.2001

PINTO, M. M. F. Discutindo a Transição dos Cálculos para Análise Real. In: LAUDARES, J.B., LACHINI,J. (orgs.). **A Prática Educativa sob o Olhar de Professores de Cálculo**. Belo Horizonte: Fumarc, Gráfica e Editora. 2001. p. 123-145.

TALL, D. O. *Advanced Mathematical Thinking*. Netherlands: Kluwer, 1991.

TALL, D.; VINNER, S. **Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity**. *Educational Studies in Mathematics*, n. 12. p. 151-169, 1981.

THOMAS, G. B. T. J. **Cálculo**. 11. ed. São Paulo-SP: Addison Wesley, 2009.

STEWART, J. **Cálculo**. v.2. São Paulo: Pioneira Thonson Learning, 2013.

VINNER, S. The role of definition in teaching and learning mathematics. In: TALL, D.O. (Ed.). **Advanced Mathematical Thinking**. Dordrecht Kluwer, 1991. p. 65-81.

WILEY, D.A. Impediments to Learning Object Reuse and Openness as a Potential Solution. **Revista Brasileira de Informática na Educação**, v. 17, n. 3. 2002. Disponível em: <<https://goo.gl/c73oKu>>. Acesso em 01 Fev. 2012.

ZABALA, A. **A prática educativa: como ensinar**. Porto Alegre: Artmed, 1998

---

**RECEBIDO EM:** 28 ago. 2017.

**CONCLUÍDO EM:** 09 out. 2017.