VIDYA, v. 37, n. 2, p. 499-513, jul./dez., 2017 - Santa Maria, 2017. **ISSN** 2176-4603

# ESTIMULANDO O DOMÍNIO DO PROCESSO DEDUTIVO NO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

## *STIMULATING THE DOMAIN OF THE DEDUCTIVE PROCESS IN THE PRE-SERVICE COURSE FOR MATHEMATICS TEACHERS*

**LILIAN NASSER***
**MAGNO LUIZ FERREIRA****
**RAFAEL FILIPE NOVOA VAZ*****

**RESUMO**

Este artigo apresenta sugestões de atividades de Geometria, em que licenciandos são estimulados a criar conjecturas sobre alguns teoremas clássicos e verificar sua validade, usando o geoplano ou o software Geogebra. A motivação para o trabalho surgiu da observação de que grande parte dos professores de Matemática da Educação Básica não valoriza as tentativas de demonstração e as justificativas informais apresentadas por seus alunos. Tampouco se preocupam em desenvolver a habilidade de argumentação em suas turmas. Desse modo, os estudantes não têm o hábito de explicar as estratégias escolhidas em suas resoluções, nem justificá-las. As atividades permitem que os futuros professores vivenciem atividades que desenvolvam o seu raciocínio dedutivo e, ao mesmo tempo, despertam a necessidade de explorar tarefas em sala de aula, com o objetivo de valorizar estratégias de justificativa e argumentação dos estudantes, levando, se possível, à elaboração de provas conceituais.

**Palavras-chave:** Licenciatura em Matemática; processo dedutivo; argumentação.

***ABSTRACT***

*This article presents suggestions of Geometry activities, where undergraduate students are stimulated to create conjectures about some classic theorems and to verify their validity, using the geoplane or the Geogebra software. The motivation for the work came from the observation that great part of the Mathematics teachers at Basic Education does not value the attempts of demonstration and informal justifications presented by their pupils. Neither they are worried in developing the ability of argumentation in their classes. Therefore, students are neither used to explain the strategies chosen in their solutions, nor to justify them. The activities allow future teachers to engage in experiences that develop the domain of the deductive thinking and, at the same time, awaken the need to explore tasks, aiming to value strategies of justification and argumentation, leading, if possible, to the elaboration of conceptual proofs.*

***Keywords:*** *Formation of Mathematics teachers; deductive process; argumentation.*

* PhD em Educação Matemática. Projeto Fundão (IM/UFRJ). E-mail: lnasser.mat@gmail.com
** Msc em Ensino de Matemática. IFRJ-CVR; Projeto Fundão-UFRJ. E-mail: magno.ferreira@ifrj.edu.br
*** Msc em Ensino de Matemática IFRJ-CPAR; Projeto Fundão-UFRJ. E-mail: rafael.vaz@ifrj.edu.br

## INTRODUÇÃO

Durante anos, o ensino de Geometria foi deixado em segundo plano, o que contribuiu, e ainda contribui, para a ausência do domínio do processo dedutivo e a falta de ênfase em atividades que estimulassem o raciocínio lógico em sua resolução.  Como consequência, observa-se que, atualmente, os alunos da Escola Básica não são estimulados a pensar ou raciocinar, limitando-se a aplicar fórmulas ou algoritmos, sem a necessidade de justificar os procedimentos adotados (LOPES e NASSER, 1996).

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997, p.26), um dos objetivos do ensino de Matemática no Ensino Fundamental é o "desenvolvimento no educando da capacidade/habilidade de comprovação, argumentação e justificação, com vistas à formação do cidadão crítico". Além disso, recomenda que a Matemática seja reconhecida pelo estudante como uma disciplina que possibilita o desenvolvimento de seu raciocínio. A fim de atingir essas recomendações, é preciso que o ensino de Matemática utilize estratégias que explorem o raciocínio lógico-dedutivo, e isso é feito, em geral, em conteúdos geométricos.

Nesse sentido, atividades que desenvolvam o processo de argumentação devem constar dos Cursos de Licenciatura em Matemática, possibilitando reflexões sobre a importância de abordar esse tipo de atividade em sala de aula.

Alguns estudos têm investigado o ensino de Geometria e a visão de estudantes, licenciandos ou professores de Matemática em relação ao uso de argumentação e provas na justificativa de afirmativas ou soluções de situações geométricas. Com isso, o tema de "argumentações e provas" vem se constituindo como uma forte linha de pesquisa em Educação Matemática.

Pietropaulo (2005) investigou a significação das demonstrações no currículo da Educação Básica, assim como sua importância nos cursos de Formação de Professores. O autor defende que as provas não devem ser usadas apenas com a função de compreender ou validar um resultado, mas também para refletir a "evolução" do pensamento matemático por meio de uma perspectiva didática, curricular e histórica. Mais recentemente, Ferreira (2016) propôs uma organização didática acerca dos quadriláteros, de modo a aprimorar o domínio de demonstrações geométricas de alunos de licenciatura do Estado da Bahia.

Estudos sobre o desenvolvimento da habilidade de argumentação mostram que grande parte dos professores de Matemática não valoriza argumentos informais de seus alunos.  Influenciados pelo rigor da academia, os professores esperam que os estudantes da Escola Básica apresentem justificativas formais. Como esses raciocinam nos primeiros níveis de van Hiele (NASSER, 1992) e o domínio do processo dedutivo só ocorre no último nível, não são capazes de criar demonstrações. No entanto, têm condições de justificar informalmente suas resoluções, o que indica que é possível progredir para atingir o domínio do raciocínio dedutivo. Essa habilidade deve ser incentivada, solicitando que o aluno justifique sempre suas resoluções de problemas ou explique porque escolheu uma determinada estratégia. O professor deve levar o aluno a raciocinar sempre, em todas as tarefas desenvolvidas. Desse modo, este será capacitado para acompanhar as demonstrações apresentadas pelo professor, analisar argumentações apresentadas por seus colegas e elaborar suas próprias justificativas.

Um grupo do Projeto Fundão (IM/UFRJ) desenvolveu uma pesquisa para investigar meios de aprimorar a habilidade de argumentação de alunos a partir do 6º ano do Ensino Fundamental, contando com a colaboração de professores das redes municipal e estadual do Rio de Janeiro, e licenciandos do Instituto de Matemática da UFRJ. Várias estratégias com esse objetivo foram testadas em sala de aula, com resultados positivos. Nasser e Tinoco (2001) compilaram os resultados desse estudo, que sugere uma valorização da experimentação e argumentação informal, como etapas iniciais para o domínio do processo dedutivo.

No nosso estudo também foram testadas atividades exploratórias utilizando dobraduras, em que cada etapa deveria ser justificada com o apoio de resultados conhecidos pelos licenciandos. Neste artigo apresentamos somente as atividades que exploram teoremas clássicos (GERDES e CHERINDA, 1991) com resultados simples, mas que não constam dos livros didáticos e não são, portanto, estudados na Escola Básica. Foram disponibilizados recursos didáticos apropriados para exploração dos Teoremas de Pick, Varignon, Napoleão e Morley. A abordagem adotada requer o estabelecimento de uma conjectura e a busca de estratégias para verificar sua validade ou exibir contraexemplos para refutá-la. Enquanto o geoplano é o recurso adequado para a exploração do Teorema de Pick, para os Teoremas de Varignon, Napoleão e Morley foram criados aplicativos no Geogebra, para a análise de várias situações em computadores, individualmente ou em duplas.

Essas atividades foram aplicadas a professores e licenciandos, que demonstraram grande interesse. Embora tenham conseguido chegar aos resultados dos teoremas por meio da verificação com os recursos didáticos, tiveram dificuldades nas conclusões das demonstrações. Isso comprova a necessidade de aprimorar o processo dedutivo durante o curso de formação inicial dos professores, estimulando os licenciandos a desenvolver tais habilidades em suas turmas no futuro.

## REFERENCIAL TEÓRICO

A pesquisa sobre argumentação e provas no ensino de Matemática cresceu muito nas últimas décadas. Percebendo a multiplicidade de abordagens sobre o tema, Reid e Knipping (2010) apresentam um levantamento dos autores e discutem as principais linhas de pesquisa e trabalhos envolvendo as demonstrações em Matemática, e suas diversas interpretações. Na introdução do seu livro, eles afirmam que

> a pesquisa sobre o ensino e aprendizagem de prova e demonstração se expandiu nas últimas décadas. Isso reflete o crescimento da educação matemática em geral, mas também uma ênfase crescente em prova na educação matemática. Esse desenvolvimento é bem-vindo para aqueles interessados no tópico, mas também lança um desafio, especialmente para professores e novos acadêmicos. Tornou-se mais e mais difícil obter um panorama do campo e identificar os conceitos chave usados na pesquisa em provas e demonstrações (REID e KNIPPING, 2010, p. xiii).

O precursor e autor mais citado quando se estuda o tema de argumentação, prova e demonstração no ensino de Matemática é Nicholas Balacheff, cuja primeira publicação sobre o tema data de 1982, bem antes de apresentar sua tese de doutorado em Grenoble, na França, em 1988 (BALACHEFF, 1982, 1988).

Balacheff (1988, p. 217) classificou as provas em pragmáticas ou conceituais. Para o autor, prova pragmática é aquela que recorre a testes de validade, busca de regularidades, exemplos ou desenhos para justificar um determinado resultado, chamados pelo autor de “recursos de ação”, enquanto a prova conceitual não recorre a tais recursos no momento de formular as propriedades envolvidas e as possíveis relações entre elas. Segundo ele, há vários tipos de provas pragmáticas, que devem ser valorizadas na Escola Básica, e que contribuem para o domínio das provas conceituais. O autor destaca quatro modalidades de prova: *empirismo ingênuo* (naive empiricism), *experimento crucial* (crucial experiment), *exemplo genérico* (generic example), e *experimento mental* (thought experiment). Estes quatro desdobramentos se originam dos movimentos existentes entre os tipos de prova: o empirismo natural e o experimento crucial são tipos de prova pragmática, e o experimento mental reside no campo da prova conceitual. Já o exemplo genérico faz a transição entre os dois tipos.

Para exemplificar estes tipos de prova, considere possíveis justificativas (a seguir) dadas pelos alunos, relacionadas à questão: verificar se a soma de dois números pares é sempre um número par.

Justificativa 1: o aluno afirma que a afirmação é verdadeira, e justifica por meio da experimentação de alguns exemplos, como $4 + 8 = 12$; $12 + 16 = 28$. É uma resposta que se enquadra no "empirismo ingênuo", em que o aluno acredita na veracidade da afirmativa apenas com base na verificação de poucos exemplos.

Justificativa 2: o aluno verifica a afirmativa para números bem grandes, como $824 + 642 = 1466$, acreditando que se a afirmativa é verdadeira em tal caso, vale em todos os casos. Balacheff classifica esse tipo de raciocínio como um "experimento crucial".

Justificativa 3: ainda trabalhando com exemplos numéricos, o aluno apresenta um raciocínio que se aplica a um caso geral, como $48 + 64 = 2\ (24 + 32) = 2 \times 56$, garantindo que a soma de dois números pares é um número par. Na classificação de Balacheff, esse tipo de argumentação é um "exemplo genérico".

Justificativa 4: o aluno consegue apresentar uma prova conceitual, por meio de um "experimento mental", raciocinando que se *m,n* são pares, então existem números naturais p e q, tais que $m=2p$ e $n=2q$. Verifica, então, que $m + n = 2p + 2q = 2\ (p+q)$, que é par, já que $p+q$ *é um número natural.*

Esta justificativa pode ser classificada como uma prova conceitual, bem próxima das provas formais, aceitas na academia.

Na década de 1990, Celia Hoyles e seu grupo desenvolveram uma pesquisa ampla com professores da Grã Bretanha, analisando sua reação a diferentes tipos de provas produzidos por alunos.

> Os estudantes foram apresentados a conjecturas matemáticas e a uma série de argumentos para justificá-los; eles foram convidados a fazer duas seleções desses argumentos - o argumento que seria mais próximo das suas próprias abordagens e o argumento que eles acreditavam que receberia a melhor nota dos seus professores (HEALY e HOYLES, 2000, p. 399).

Esse trabalho rendeu várias publicações, e serviu de modelo para pesquisas em diversos países. No Brasil, destacam-se o projeto AprovaME (Argumentação e Prova na Matemática Escolar), do Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), coordenado por Healy (2005) e a dissertação de Aguillar Jr (2012), apresentada ao Programa de Mestrado em Ensino de Matemática da UFRJ.

O Projeto AProvaME tinha como objetivo buscar um melhor entendimento de diversas questões em relação ao processo de ensino-aprendizagem da prova usando recursos tecnológicos. Contou com a participação de professores da Pós-Graduação em Educação Matemática da PUC-SP, vinte e oito professores, mestrandos e alunos adolescentes de escolas públicas e particulares do Estado de São Paulo. No contexto do AProvaME, o problema do ensino e aprendizagem da prova compreendia dois aspectos. O primeiro referia-se à elaboração de situações de aprendizagem pelos professores, envolvendo a investigação das possibilidades oferecidas pelos ambientes computacionais, nos quais os professores precisam explicitar as propriedades e relações na linguagem formal do sistema. Pretendia-se investigar como esta experiência com o computador poderia influenciar na compreensão da prova, na distinção entre os argumentos dedutivos e evidências empíricas e no desenvolvimento de habilidades para lidar com argumentos matemáticos expressos de diferentes formas. O segundo enfoque centrava-se no professor, uma vez que a adoção de uma nova abordagem na sala de aula somente torna-se possível mediante um processo de adaptação, cujo agente principal é o professor.

Os resultados indicam que a participação no AProvaME proporcionou maior conhecimento das questões que envolvem a importância da argumentação e da prova para um ensino mais efetivo da Matemática, destacando a importância e o potencial de uso da informática no desenvolvimento das atividades envolvendo a construção da prova.

A pesquisa de Aguilar Jr (2012) envolve a temática da prova matemática na sala de aula sob dois aspectos: os tipos de argumentação apresentados pelos alunos e a visão do professor sobre o desafio de desenvolver no aluno da Escola Básica a habilidade de argumentar e provar em Matemática. O pesquisador investigou como o professor valoriza e aceita os diversos níveis e tipos de argumentação apresentados pelos estudantes.

Na primeira etapa, foram analisadas respostas de alunos do Ensino Fundamental a questões aplicadas em suas turmas, que exigiam a construção de argumentos que comprovassem a validade das afirmações matemáticas. A partir das respostas obtidas, algumas foram selecionadas e categorizadas segundo os modelos e tipos de prova para montar um formulário que foi aplicado a 59 professores, seguindo a metodologia da pesquisa de Hoyles (1997). Da análise dos dados, o pesquisador constatou que, nesse grupo, os professores, de maneira geral, não estavam inclinados ao desenvolvimento de atividades que possibilitassem a construção, em sala de aula, das habilidades de argumentar e provar em Matemática. Além disso, a preferência desses docentes, em termos de avaliação de respostas discentes, é pelas argumentações mais próximas ao modelo de prova conceitual de Balacheff (1988), que é aprova rigorosa, formal, praticada e aceita na *academia.*

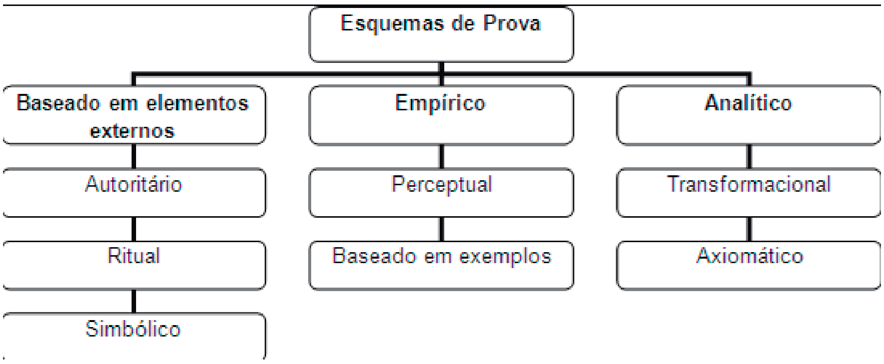
Em resumo, os resultados da pesquisa de Aguilar Jr.(2012) indicam que a Universidade não prepara o professor para o ensino-aprendizagem da argumentação matemática em sala de aula e, consequentemente, o ensino de prova não faz parte da prática pedagógica da maioria dos professores da Escola Básica.

Apesar de não ter sido alvo de sua pesquisa, Aguilar Jr. analisou também as respostas dadas ao questionário por 10 alunos de Licenciatura que participaram da oficina em que foram coletados os dados dos professores. Na comparação entre as respostas dos estudantes de graduação e dos professores, o autor concluiu não haver muitas distinções entre os dois grupos, o que contribuiu para a realização deste trabalho:

> a Academia não contribui como deveria na formação de uma consciência pedagógica sobre a prova matemática, isto é, na formação docente que ressalte a importância da prova matemática para o desenvolvimento e construção do raciocínio-lógico dedutivo, uma vez que a forma de pensar e analisar do estudante de graduação é bem similar com a de professores formados e com certa experiência profissional. (AGUILAR JR, 2012, p. 116)

Harel e Sowder (1998) definem esquemas de prova como argumentos convincentes, classificados em três classes: esquemas externos, empíricos e analíticos de prova. A figura 1 mostra os desdobramentos desses esquemas.

**Figura 1 -** Os esquemas de prova.




Fonte: HAREL E SOWDER, apud AGUILLAR JR, 2012, p. 33.

Esses autores observam que é necessário um trabalho cuidadoso com os alunos para desenvolver o processo dedutivo, afirmando que

> a maior razão para as sérias dificuldades dos alunos na compreensão, apreciação e produção de provas é que nós, professores, acreditamos que sabemos o que constitui evidência aos olhos deles. Em vez de gradualmente refinar as concepções dos estudantes acerca do que constitui evidência e justificativa em matemática, nós impomos a eles métodos e regras de implicação que, em muitos casos, são estranhos para convencê-los (HAREL e SOWDER, 1998, p. 237).

Dois autores se destacam no estudo das funções da prova: Hanna (1990, 1995) e de Villiers (1990). Hanna chama atenção para o fato de que na Educação Básica muitas vezes uma demonstração tem mais valor como explicação do que como validação de um resultado. Além disso, faz distinção entre provas que provam e provas que explicam, destacando que “uma prova que prova mostra que um teorema é verdadeiro. Uma prova que explica também faz isso, mas a evidência que apresenta deriva do fenômeno em si” (HANNA, 1995, p. 48). De Villiers (1990, p. 17) observa que “tradicionalmente, a função da prova tem sido exclusivamente em termos de verificação (convicção ou justificativa) da validade de afirmações matemáticas. A ideia é que a prova é usada principalmente para remover uma dúvida pessoal e/ou dos céticos”.

Reid e Knipping (2010) fazem um levantamento dos trabalhos sobre os papéis da prova, destacando suas principais funções: verificação/validação, explicação, exploração/descoberta, sistematização e comunicação. De Villiers (1990, p. 22) comenta que a prova é a única maneira de comunicar resultados matemáticos. Esta comunicação, segundo o autor, ocorre entre matemáticos profissionais, professores e estudantes e entre os próprios estudantes.

Na prática, os professores devem ajudar os alunos a desenvolver a habilidade de argumentação, valorizando suas tentativas de provas pragmáticas, dando oportunidade de evoluírem na direção das provas conceituais. É importante permitir que os estudantes explorem conjecturas usando ferramentas diversas, verificando a sua validade, antes de proceder à sua demonstração. As atividades sugeridas a seguir são desse tipo: os enunciados dos teoremas são apresentados somente após a exploração, em que conjecturas são validadas ou refutadas experimentalmente, por meio dos recursos disponibilizados. Só então, é incentivada a busca por uma demonstração formal.

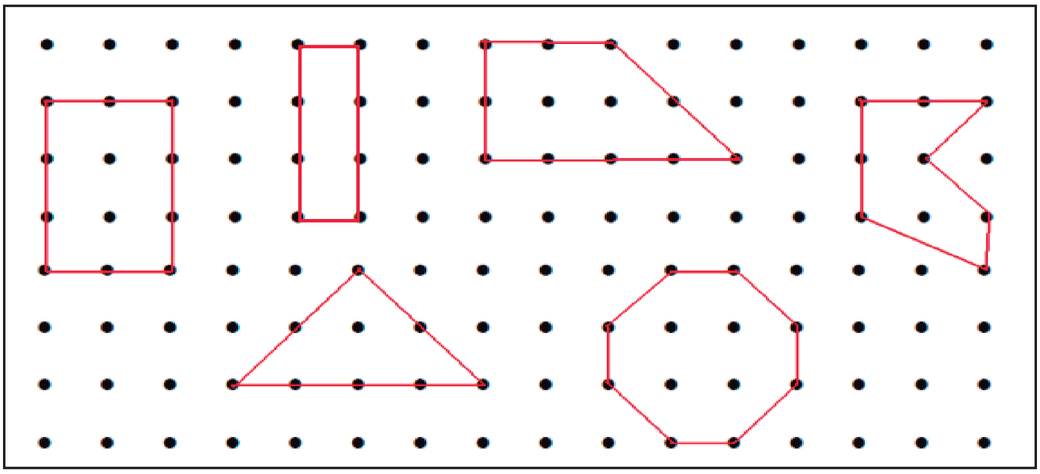
## ATIVIDADES SUGERIDAS

De acordo com os objetivos deste trabalho, são apresentadas a seguir sugestões de atividades a serem trabalhadas com licenciandos de Matemática, contribuindo para o desenvolvimento do raciocínio dedutivo. São teoremas que devem ser explorados no geoplano ou usando o Geogebra, com a recomendação de que os enunciados completos só sejam disponibilizados após os licenciandos fazerem suas tentativas de conjecturas, trabalhando com os recursos adequados.

## ATIVIDADE 1: TEOREMA DE PICK

O teorema foi descoberto em 1899 por Georg A. Pick e permite calcular a área de um polígono desenhado numa malha pontilhada ou visualizado num Geoplano. A área depende do número dos seus pontos de fronteira e do número dos seus pontos interiores. É uma boa oportunidade de iniciar o trabalho com funções de duas variáveis na Escola Básica. A figura 2 mostra alguns dos polígonos a serem explorados.

**Figura 2 -** Usando o geoplano para deduzir o Teorema de Pick.



Fonte: Elaborada pelos autores.

O objetivo desta atividade é levar os licenciandos a chegar à regra para o cálculo da área dos polígonos, trabalhando em etapas: primeiro com polígonos que não possuem pontos no seu interior, depois com polígonos que possuem apenas um ponto no seu interior, dois pontos no interior, e assim por diante. Os resultados devem ser registrados em tabelas, para facilitar a observação de um padrão, que leve à fórmula geral.

**Figura 3 -** O Teorema de Pick.

Teorema de Pick

Seja P um polígono simples formado no geoplano.

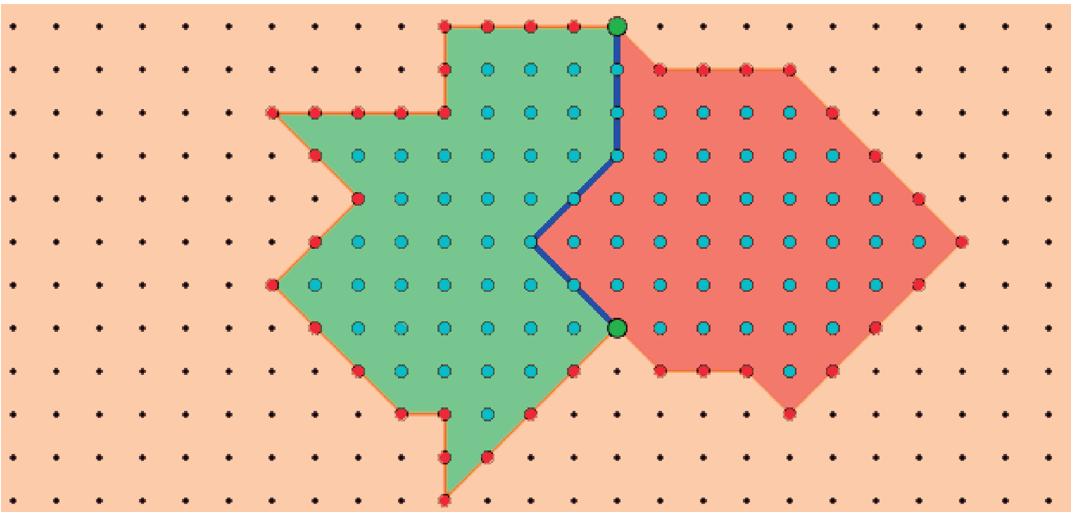
Se o polígono P tem ***b*** pontos na sua fronteira e ***i*** pontos no seu interior, então a área de P é dada por:

$$A(P) = \frac{1}{2}\, b + i - 1$$

Fonte: Elaborada pelos autores.

A demonstração do Teorema de Pick é feita em etapas. Primeiramente, deve-se provar que o teorema de Pick preserva a aditividade, isto é, se o teorema vale para dois polígonos, então vale para o polígono obtido pela justaposição deles, como pode ser observado na figura 4; a seguir, observa-se que qualquer polígono pode ser decomposto em triângulos. Basta, pois, provar o teorema de Pick para um triângulo arbitrário com vértices no reticulado.

**Figura 4 -** Ilustrando a aditividade do Teorema de Pick.



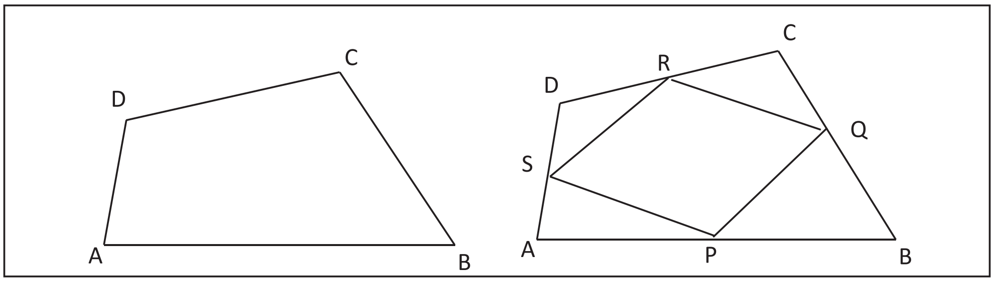
Fonte: <http://cmup.fc.up.pt/cmup/pick/pick2.html>.

Para um triângulo básico, com 3 pontos na fronteira e sem pontos no seu interior, seu número de Pick é , que coincide com sua área. Seguindo o raciocínio, observa-se que um triângulo qualquer pode ser completado para obter um triângulo retângulo, justapondo-lhe ou retângulos ou novos triângulos retângulos. E, por último, um retângulo é a justaposição de dois triângulos retângulos. Tudo isto permite concluir que basta provar o teorema de Pick para retângulos! Mas, estes são obtidos pela justaposição de quadrados de lado 1. E para estes últimos, o teorema de Pick é trivial. De fato, para um quadrado de lado 1, a área é 1. Sendo i = 0 e b = 4, seu número de Pick é .

**ATIVIDADE 2: TEOREMA DE VARIGNON (1654-1722)**

Este teorema, descoberto por Pierre Varignon, relaciona um quadrilátero qualquer com o quadrilátero formado unindo seus pontos médios (figura 5).

**Figura 5 -** União dos pontos médios em um quadrilátero.




Fonte: Elaborada pelos autores.

De acordo com Gerdes e Cherinda (1991), este teorema contribuiu muito para a divulgação do Cálculo Diferencial e Integral na França. Os licenciandos devem conjecturar se o quadrilátero obtido tem características especiais.

Estas conjecturas devem ser exploradas por meio do Geogebra, permitindo confirmar sua veracidade e visualizar um caminho para a demonstração. Casos particulares também devem ser examinados, como quando o quadrilátero original for um retângulo ou um quadrado.

**Figura 6 -** Teorema de Varignon.

Teorema de Varignon

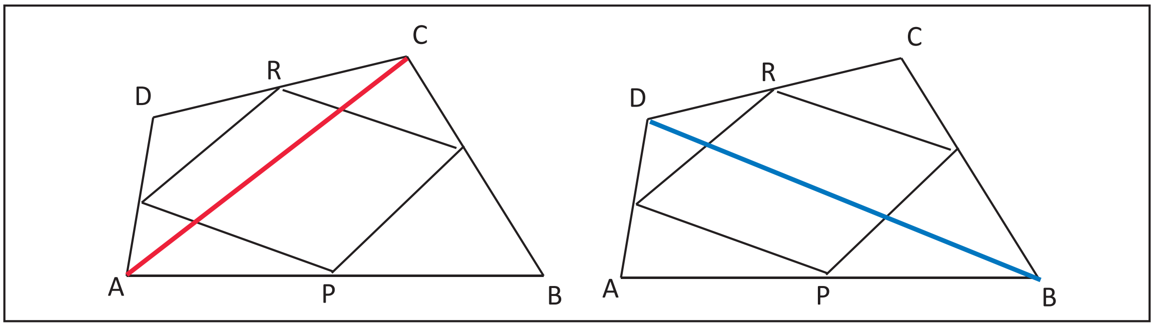
Seja ABCD um quadrilátero qualquer e considere P, Q, R e S os pontos médios de seus lados.

Então, o quadrilátero PQRS é um paralelogramo.

Fonte: Elaborada pelos autores.

A demonstração deste teorema é um exemplo do tipo de provas "que explicam" (HANNA, 1995). A exploração por meio do Geogebra permite perceber que os lados opostos do quadrilátero, cujos vértices são os pontos médios do quadrilátero original, são sempre paralelos a uma das diagonais (Figura 7). A partir da identificação de triângulos semelhantes é possível perceber que lados opostos desse quadrilátero são paralelos e medem a metade da diagonal correspondente. Isso prova o teorema.

**Figura 7 -** Encaminhamento para a demonstração do Teorema de Varignon.

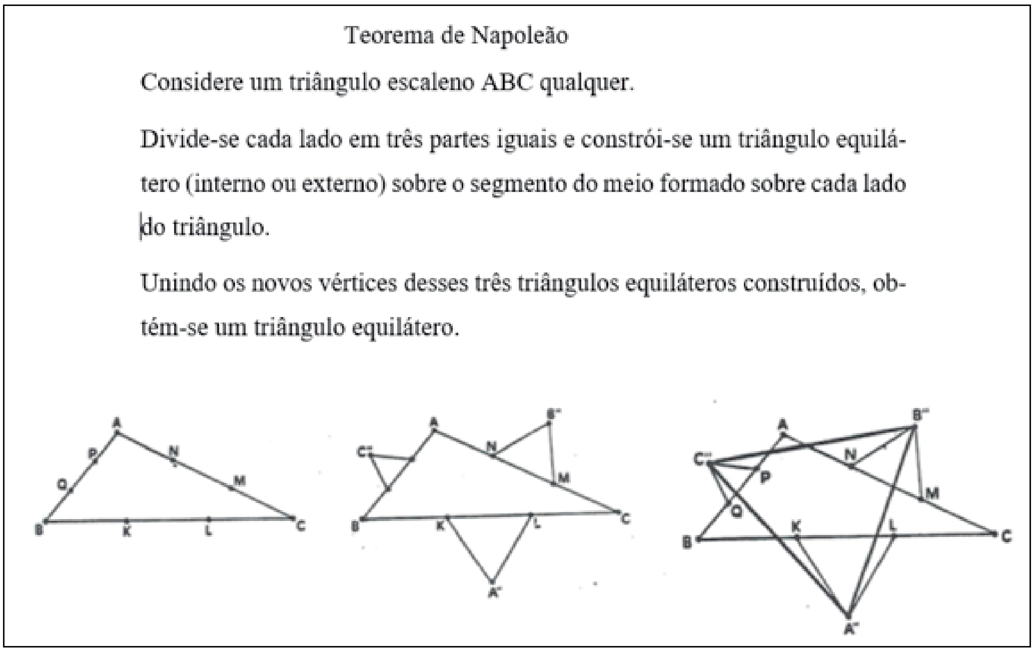



Fonte: Elaborada pelos autores.

## ATIVIDADE 3: TEOREMA DE NAPOLEÃO (1769-1821)

Segundo Gerdes e Cherinda (1991, p. 73), "a descoberta deste teorema é vulgarmente (desde 1917) atribuída ao imperador francês Napoleão Bonaparte (1769-1821), embora não haja nenhuma certeza se o imperador de facto o descobriu ou mesmo conheceu".

**Figura 8 -** Teorema de Napoleão.


Teorema de Napoleão

Considere um triângulo escaleno ABC qualquer.

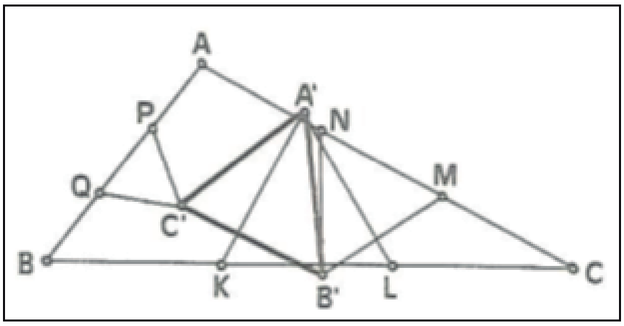
Divide-se cada lado em três partes iguais e constrói-se um triângulo equilátero (interno ou externo) sobre o segmento do meio formado sobre cada lado do triângulo.

Unindo os novos vértices desses três triângulos equiláteros construídos, obtém-se um triângulo equilátero.

Fonte: Gerdes; Chirinda (1991, p. 72).

O teorema também é válido caso os triângulos construídos sejam internos. (Figura 9). Por meio da exploração do teorema no geogebra, é possível visualizar as possibilidades para o triângulo construído interna ou externamente ao triângulo original.

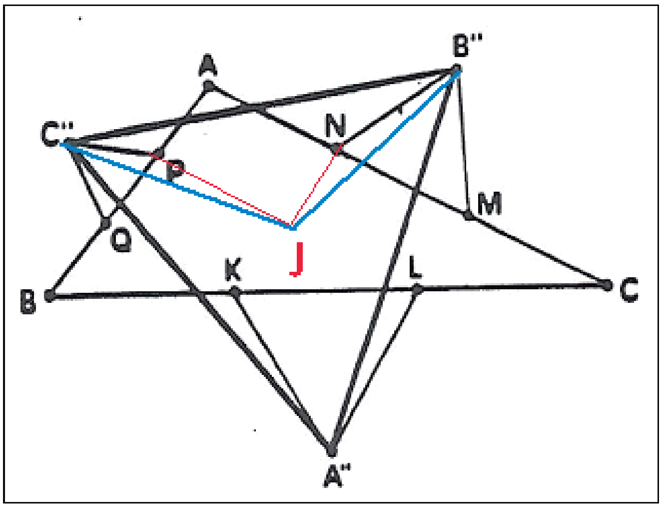
**Figura 9 -** Teorema de Napoleão para triângulos internos.




Fonte: Gerdes; Chirinda (1991, p. 73).

O caminho para a demonstração parte da identificação de triângulos congruentes na figura, e da soma dos ângulos internos de um triângulo. A figura 10 indica os primeiros passos para a demonstração, onde A''B''C'' é triângulo formado pelos vértices dos três triângulos construídos.

**Figura 10 -** Demonstração do Teorema de Napoleão.



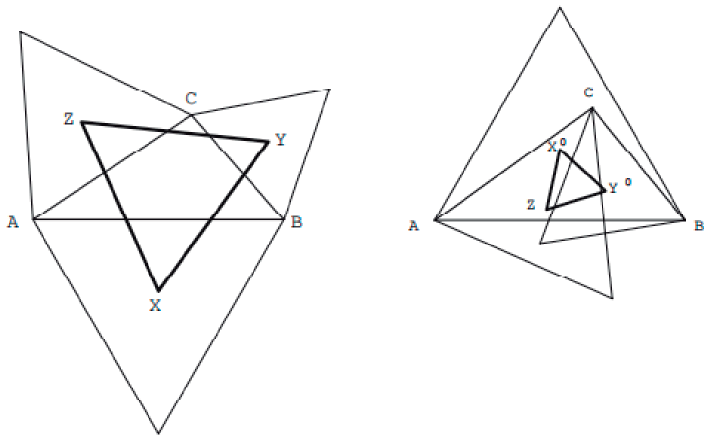

Fonte: Elaborada pelos autores.

Considere J o ponto de interseção das retas paralelas aos lados AB e AC, passando respectivamente pelos pontos P e N. Então ANJP é um paralelogramo.

- Segue que os triângulos C'JP e B'JN são congruentes (por LAL).
- Considerando os ângulos correspondentes B'JN = C'JP = $\alpha$ e JB'N = JC'P = $\theta$, segue que JNB' + $\alpha$ + $\theta$ = JPC' + $\alpha$ + $\theta$ = 180º => (A + 60º) + $\alpha$ + $\theta$ = 180º. Portanto, A + $\alpha$ + $\theta$ = 120º e C'JB' = 120º.
- Analogamente, mostra-se que A'JC' = A'JB' = 120º.
- Isso indica que A', B' e C' são vértices de um triângulo equilátero inscrito numa circunferência de centro J que os contém.

Esse teorema também é encontrado na versão que afirma que o triângulo formado pelos ortocentros dos três triângulos equiláteros (internou ou externos) construídos sobre os lados de um triângulo qualquer é um triângulo equilátero. A figura 11 ilustra esta versão do teorema.

**Figura 11 -** Teorema de Napoleão a partir dos ortocentros




O triângulo externo de Napoleão O triângulo interno de Napoleão

Fonte: <http://www.sbembrasil.org.br/files/viii/pdf/03/MC82723800997.pdf>.

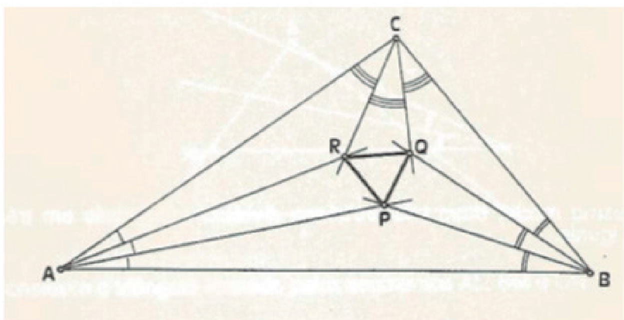
## ATIVIDADE 4: TEOREMA DE MORLEY (1899)

Frank Morley (1860-1937), matemático norte-americano de origem britânica, descobriu, em 1899, o seguinte teorema, ilustrado na figura 12.

**Figura 12 -** Teorema de Morley.

Teorema de Morley

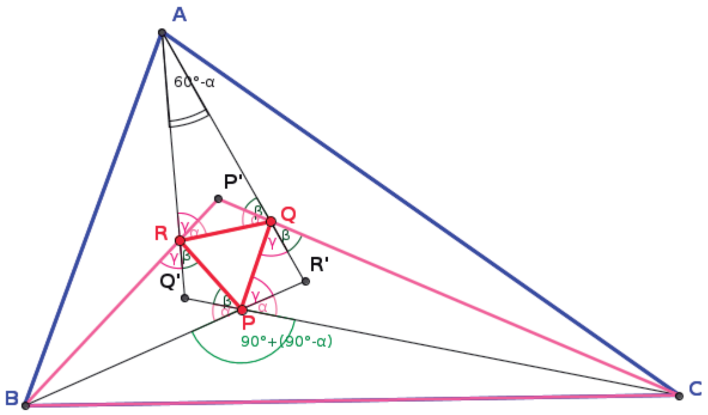
Os pontos de interseção P, Q e R das trissetrizes (que dividem um ângulo em três partes iguais) adjacentes dos ângulos de um triângulo qualquer formam um triângulo equilátero.




Fonte: Gerdes; Chirinda (1991, p. 92).

Embora o resultado seja de simples compreensão e visualização por meio do Geogebra, a demonstração deste teorema requer várias etapas, e pode ser elaborada por diversos caminhos. A figura 13 indica uma dessas demonstrações, usando triângulos isósceles formados pelas trissetrizes dos ângulos do triângulo ABC com os lados do triângulo PQR.

**Figura 13 -** Demonstração do Teorema de Morley.




Fonte: <http://www.matematicainteractiva.com/teorema-de-morley>.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho tem como objetivo disseminar o desenvolvimento da habilidade de argumentação e provas em Matemática, em especial entre licenciandos de Matemática. A fim de atender às recomendações dos PCN (BRASIL, 1997), é preciso que os futuros professores aprimorem seu raciocínio dedutivo, ao mesmo tempo em que se conscientizam da necessidade de abordar na Escola Básica questões que requerem justificativas.

São apresentadas situações geométricas que exigem criatividade e raciocínio lógico. Além de usar o geoplano de modo diferente do usual, incentivam a busca por estratégias de resolução usando geometria dinâmica. Seu principal objetivo é focar na argumentação e preparação para o domínio do processo dedutivo. Os teoremas clássicos abordados, de Pick, de Varignon, de Napoleão e de Morley, trazem resultados simples, mas que não constam dos livros didáticos. Sua exploração aguça a curiosidade dos alunos, levando-os a fazer conjecturas que devem ser validadas ou refutadas por meio de contraexemplos, usando recursos apropriados.

Nesse tipo de atividade, os estudantes formulam uma conjectura e exploram a situação para verificar sua veracidade. No caso do teorema de Pick, devem deduzir a fórmula para a área de um polígono representado no geoplano, com base na observação de vários exemplos, começando com os casos mais simples, e progressivamente aumentando o número de pontos no seu interior. A partir dessa exploração é que devem tentar justificar ou exibir um contraexemplo para cada conjectura. Esse processo desenvolve o raciocínio, levando ao domínio do pensamento dedutivo.

No caso dos teoremas de Varignon, Napoleão e Morley, a exploração é feita por meio de construções disponibilizadas usando o software Geogebra. Movimentando as figuras e observando as dimensões mostradas na tela, facilmente, chega-se aos resultados desses teoremas.

Mas é preciso conscientizar os licenciandos de que essas explorações não demonstram os teoremas. É necessário construir uma prova formal, partindo de resultados já provados e conhecidos, até chegar à conclusão. É nesse ponto que os estudantes apresentam dificuldades, já que não dominam o processo dedutivo. Acreditamos que as atividades sugeridas neste trabalho podem contribuir para o desenvolvimento desse processo.

De acordo com a teoria de van Hiele (NASSER, 1992), a aprendizagem de Geometria ocorre em níveis hierárquicos de desenvolvimento, e o domínio do processo dedutivo só ocorre no quinto e último nível. Portanto, é preciso passar por todos os níveis anteriores antes de dominar completamente os processos de argumentação e prova. Isso indica que a habilidade de argumentação deve ser desenvolvida desde o início da Escola Básica, ao longo de todos os anos de escolaridade.

Os professores universitários responsáveis pela formação inicial dos professores que dão aulas de Matemática, em todos os níveis, devem se conscientizar de que é preciso mostrar aos futuros professores a possibilidade de considerar as justificativas informais e as tentativas de argumentação dos alunos da Escola Básica. Ao corrigir uma tarefa dos alunos apenas como certo ou errado, sem considerar as tentativas e estratégias utilizadas, mesmo não chegando ao resultado correto, o professor da Escola Básica impede os alunos de observar métodos distintos de resolução.  Além disso, é aconselhável que seja requisitado aos alunos que sempre justifiquem suas estratégias de resolução, pois o domínio do processo dedutivo dos alunos deve ser construído, ao longo de toda a sua vida escolar.

## REFERÊNCIAS

AGUILAR JR., C. A. **Postura de docentes quanto aos tipos de argumentação e prova matemática apresentados por alunos do Ensino Fundamental.** Dissertação de Mestrado apresentada no PEMAT do Instituto de Matemática da UFRJ, 2012.

BALACHEFF, N. Preuve et demonstration en mathématiques au college. **Recherches des Didactiques et Mathématiques**, n. 3, v. 3, p. 261-304.

BALACHEFF, N. Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In: PIMM, D. (Ed.). **Mathematics, teachers and children.** Hodder & Stoughton, Londres, Inglaterra, 1988, p. 216-235.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.** Secretaria de Ensino Fundamental - SEF/MEC - Brasília, 1997.

DE VILLIERS. M. The role and function of proof in mathematics. **Pythagoras**, 24, p. 17-24.

FERREIRA, M. B. C. **Uma organização didática em quadrilátero que aproxime o aluno de licenciatura das demonstrações geométricas.** Tese de Doutorado em Educação Matemática apresentada à PUC-SP, 2016.

GERDES, P.; CHERINDA, M. **Teoremas famosos da Geometria.** Instituto Superior Pedagógico, Moçambique, 1991.

HANNA, G. Some Pedagogical Aspects of Proof. Interchange. **The Ontario Institute for Studies in Education**, v. 21, n. 1, p. 6-13, 1990.

HANNA, G.: Challenges to the Importance of Proof. **For The Learning Mathematics**, n. 15, v. 3, p. 42-49, 1995.

HAREL, G.; SOWDER, L. Students' proof schemes. In E. Dubinsky, A. Schoenfeld, & J. Kaput (Eds.), **Research on Collegiate Mathematics Education***,* v. III AMS, 1998, p. 234-283.

HEALY, L. **Argumentação e Prova na Matemática Escolar.** Projeto de pesquisa apresentado ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico (CNPq) pelo Programa de Estudos Pós- Graduados em Educação Matemática (PROEM - PUC/SP), 2005.

HEALY, L.; HOYLES, C. A study of proof concepts in Algebra. Journal for Research in Mathematics Education, v. 31, n. 4, 2000, p. 396-428.

HOYLES, C. The Curricular Shaping of Students' Approaches to Proof. **For the Learning of Mathematics**, v. 17, n. 1, 1997, p. 7-15.

LOPES, M. L. L. e NASSER, L. **Geometria na era da imagem e do movimento.** Instituto de Matemática/Projeto Fundão, UFRJ, 1996.

NASSER, L. **Using the van Hiele Theory to Improve Secondary School Geometry in Brazil.** Tese de doutorado apresentada n Universidade de Londres, 1992.

______.; TINOCO, L. **Argumentação e Provas no Ensino de Matemática**. Instituto de Matemática/Projeto Fundão, UFRJ, 2001.

PIETROPAULO, R. C. **(Re)Significar a demonstração nos currículos da educação básica e da formação de professores de matemática.** Tese de doutorado apresentada à Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2005.

REID, D. A.; KNIPPING, C. **Proof in Mathematics Education.** Sense Publishers, Canadá, 2010.

**RECEBIDO EM:** 22 ago. 2017.
**CONCLUÍDO EM:** 15 out. 2017.