VIDYA, v. 38, n. 1, p. 199-221, jan./jun., 2018 - Santa Maria, 2018. **ISSN** 2176-4603

PROVAS E DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS E O APLICATIVO GEOGEBRA: INCENTIVO À VISUALIZAÇÃO PARA ALUNOS DO 2º ANO DO ENSINO MÉDIO

MATHEMATICAL PROOF AND DEMOSNTRATION AND THE SOFTWARE GEOGEBRA: AN INCENTIVE FOR HIGH SCHOOL SECOND YEAR STUDENTS' VISUALIZATION

MARCELLA LUANNA DA SILVA LIMA*
ABIGAIL FREGNI LINS**
PATRICIA SANDALO PEREIRA***

RESUMO

O trabalho com as provas e demonstrações matemáticas utilizando GeoGebra é uma alternativa ao incentivo à conjecturas, argumentações, construção do raciocínio hipotético-dedutivo e articulações entre os níveis de pensamento geométrico. Neste artigo discutimos uma das atividades analisadas na pesquisa qualitativa desenvolvida em nosso Projeto OBEDUC em rede UFMS/UEPB/UFAL. A mesma objetivou investigar tipos de provas e demonstrações matemáticas e nível de pensamento geométrico de alunos do 2º ano do Ensino Médio a partir de uma proposta didática em ambientes lápis e papel e GeoGebra. Optamos pela técnica de triangulação de dados para análise. Os dados foram coletados a partir de redação, notas de campo, áudio e respostas da proposta didática. No artigo apresentamos o estudo de caso de um trio dos alunos da escola pública, localizada na cidade de Areia, Paraíba, onde nossa pesquisa de campo se deu. Concluímos que o trio de alunos se encontra nos níveis iniciais de pensamento geométrico para validar uma dada afirmação.

Palavras-chave: Educação matemática. Provas e demonstrações matemáticas. GeoGebra. Observatório da educação.

ABSTRACT

Working with mathematical proofs and mathematical demonstrations using GeoGebra is an alternative to incentive to conjectures, argumentations, hypothetical-deductive reasoning and articulation between levels of geometric thinking. In this article we discuss one of the analyzed activities of the qualitative research work developed under our OBEDUC Network Project UFMS/UEPB/UFAL. The research aimed to investigate the kind of evidence and mathematical demonstrations and level of geometric thinking of High School 2nd year students from a didactical proposal of pencil and paper and GeoGebra environments. Data triangulation was our analysis technique. The data was collected by written dissertation, field notes, audio and didactical proposal answers. In the article we present the case study of a trio of the students from a public school, located in the city of Areia, Paraíba, where our field work was done. We conclude that the trio of students is at the initial levels of geometric thinking to validate a given statement.

Keywords: *Mathematics education. Mathematical proof and demonstration. GeoGebra. Observatory of education.*

* Mestre. Universidade Estadual da Paraíba. mah.luanna@gmail.com.
** Doutora. Universidade Estadual da Paraíba. bibilins@gmail.com
*** Doutora. Universidade Federal do Mato Grosso do Sul. patriciasandalop@uol.com.br

PROJETO OBEDUC EM REDE UFMS/UEPB/UFAL

O presente artigo discute uma das atividades realizadas em nosso Projeto OBEDUC em rede UFMS/UEPB/UFAL em relação a uma pesquisa de mestrado (LIMA, 2015) desenvolvida no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, área de concentração Educação Matemática, Universidade Estadual da Paraíba.

Nosso Projeto colaborativo de pesquisa OBEDUC em rede, Edital 2012, financiado pelo Programa Observatório da Educação OBEDUC da CAPES, teve como objetivo prover, por práticas colaborativas, reflexão dos professores sobre trabalhos didáticos e pedagógicos e provocar ações educacionais voltadas à sala de aula de Matemática (LINS, PEREIRA e CARVALHO, 2016; PEREIRA, LINS e CARVALHO, 2017).

Centrado no desenvolvimento profissional do professor que ensina Matemática na educação básica, nosso projeto colaborativo de pesquisa em rede teve três Universidades públicas envolvidas, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul (UFMS), Universidade Estadual da Paraíba (UEPB) e Universidade Federal de Alagoas (UFAL). Pesquisadoras educadoras matemáticas, alunos de mestrado e doutorado em Educação Matemática, professores de Matemática e Pedagogia da educação básica em formação e em exercício foram os 46 membros de nosso projeto:

Tabela 1 - Distribuição dos membros Projeto OBEDUC em rede.

UNIVERSIDADES	UEPB	UFMS	UFAL	TOTAL
Coordenadoras das Universidades	01	01	01	03
Alunos de Mestrado	04	04	01	09
Alunos de Doutorado	----	----	01	01
Professores em Exercício	08	07	03	18
Professores em Formação	08	04	03	15
TOTAL	21	16	09	**46**

Fonte: Construção dos autores.

Na Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, UFMS, o grupo coordenado por Dra. Patricia Sandalo Pereira foi formado por alunos de mestrado e doutorado e professores de Matemática em formação e em exercício, trabalhando em Matemática do Ensino Fundamental I e II.

Na Universidade Estadual da Paraíba, UEPB, os vinte membros coordenados por Dra. Abigail Fregni Lins foram divididos em quatro equipes, compostas de um aluno de mestrado, dois professores de Matemática formados e dois professores de Matemática em formação. Cada equipe teve seu próprio tema, sendo eles Calculadoras e Argumentação, Robótica na Educação Matemática, Provas e Demonstrações Matemáticas e Deficiência Visual na Educação Matemática.

Na Universidade Federal de Alagoas, UFAL, o grupo coordenado por Dra. Mercedes Carvalho foi formado por professores de Matemática e Pedagogia em formação e em exercício, diretor e coordenador escolar, alunos de mestrado e doutorado, trabalhando em Matemática do Ensino Fundamental I.

Baseamo-nos em Ibiapina (2008) com relação ao nosso projeto colaborativo de pesquisa, quando afirma que no âmbito da pesquisa colaborativa de que professores trabalham em interação com pesquisadores, construindo teorias sobre as suas práticas profissionais e interpretam com os demais colegas suas compreensões a respeito da questão de investigação proposta por pesquisadores, não existindo, assim, hierarquia entre os participantes. Assim, "... a interação entre esses potenciais representa a qualidade da colaboração, quanto menor as relações de opressão e poder, maior o potencial colaborativo" (IBIAPINA, 2008, p. 20). Foi o que se deu em nosso projeto, não hierarquias, no qual todos trabalharam juntos para o desenvolvimento das pesquisas, compreendendo que o trabalho colaborativo satisfaz as necessidades de formação dos professores e as necessidades investigativas dos pesquisadores, já que envolve todos os participantes em processos de reflexão sobre suas práticas, proporcionando a partilha de experiências e ideias, mobilizando a ampliação do nível de aprendizagem docente.

EQUIPE PROVAS E DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS NO NÚCLEO UEPB

Estudamos na Equipe Provas e Demonstrações Matemáticas no Núcleo UEPB vários artigos científicos, dissertações e livros referentes à utilização das provas e demonstrações no ensino e aprendizagem da Matemática básica, os níveis de pensamento geométrico, utilização de aplicativos em aula e o desenvolvimento de um trabalho colaborativo entre equipes de pesquisadores, professores em exercício e em formação.

Por meio das leituras realizadas verificamos que não se dá ênfase ao ensino de provas e demonstrações em Matemática (FUSCO, SILVA e ALMOULOUD, 2007). Ao contrário do que se pede nos PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais), a preocupação com a argumentação e a produção de uma prova pode ser encontrada, recomendando que o currículo de Matemática deva contemplar experiências e atividades que possibilitem aos alunos o desenvolvimento e a comunicação de argumentos matematicamente válidos (JAHN, HEALY e PITTA COELHO, 2007).

Quanto à Geometria, notamos que os PCN defendem que um dos objetivos de seu ensino e aprendizagem, o de possibilitar ao aluno comunicar-se matematicamente, ou seja, descrever, representar e apresentar resultados com precisão e argumentar sobre suas conjecturas, fazendo uso da linguagem oral e estabelecendo relações entre ela e diferentes representações matemáticas. Entretanto, isso quase não é observado nas escolas, uma vez que após o Movimento da Matemática Moderna, a Geometria, quando abandonada, passou a ter uma abordagem eclética (MIORIM, MIGUEL e FIORENTINI, 1993). Outros motivos do abandono da Geometria no Brasil estão relacionados ao currículo escolar, não respeitando a Geometria. O programa da disciplina é ministrado por displicência e com descaso; em muitas escolas a Geometria é ensinada somente no final do semestre, além da falta de material didático mínimo para professores e alunos (NASCIMENTO, 2012).

Acreditamos que o trabalho com provas e demonstrações matemáticas deva ser desenvolvido desde os primeiros anos, ao longo de toda escolaridade, em uma constante gradação dos níveis de argumentação, com o intuito de conduzir o aluno a construir justificativas que possam ser aceitas como provas de resultados matemáticos (AGUILAR JR e NASSER, 2012).

Quando trabalhamos atividades sobre provas e demonstrações matemáticas com o uso do aplicativo GeoGebra, proporciona-se uma alternativa ao incentivo de se conjecturar, argumentar, provocar raciocínio hipotético-dedutivo e articular níveis de pensamento geométrico. Partindo deste, e de nossa inquietação quanto ao ensino e aprendizagem da Geometria, acreditamos ser necessário os alunos serem incentivados a trabalhar com atividades que os possibilitem refletir, questionar, conjecturar, provar e demonstrar afirmações matemáticas.

A vista disso, nossa pesquisa teve como objetivo investigar que tipo de provas e demonstrações matemáticas e nível de pensamento geométrico de alunos do 2º ano do Ensino Médio poderiam ocorrer a partir de uma proposta didática em ambientes lápis e papel e GeoGebra.

Analisamos oito das atividades da proposta didática, elaborada pela Equipe. Neste artigo discutimos uma das atividades realizada no ambiente GeoGebra. Baseamo-nos em construtos teóricos advindos de Parzysz (2006) para os níveis de pensamento geométrico dos alunos e de Balacheff (2000) e Nasser e Tinoco (2003) para os tipos de provas utilizados por esses alunos.

NÍVEIS DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO

Bernard Parzysz (2006) buscou desenvolver um quadro teórico para estudar o raciocínio geométrico dos sujeitos, tentando estabelecer uma articulação entre a percepção e a dedução. Dessa forma, propôs uma forma de articulação entre os níveis de pensamento geométrico baseado nas pesquisas desenvolvidas por Van Hiele, Houdement e Huzniak, e Henry.

Van Hiele (1984 *apud* DIAS, 2009) estabeleceu cinco níveis do desenvolvimento do pensamento geométrico da criança: visualização, análise, dedução informal, dedução formal e rigor. No nível 0 (visualização) as figuras são identificadas unicamente pelos seus aspectos gerais, ou seja, o aluno reconhece as formas e modelos geométricos, compara-os e até mesmo classifica-os. No nível 1 (análise) os alunos começam a distinguir as propriedades dos objetos, mas não conseguem ainda esclarecê-las. No nível 2 (dedução informal) o aluno estabelece relações intra e interfigurais, mas não consegue realizar uma dedução formal. No nível 3 (dedução formal) o aluno já é capaz de realizar uma dedução e esta é vista como instrumento de validação dentro de um sistema axiomático. Por fim, no nível 4 (rigor) o aluno é capaz de se colocar nos diferentes sistemas axiomáticos e consegue fazer comparações entre os mesmos.

De acordo com Dias (2009), Parzysz, ao analisar os níveis de Van Hiele, coloca de um lado os níveis 0 e 1, nomeando-os como Geometria concreta, na qual os objetos são materiais e a validação é perceptiva e agrupa os níveis 3 e 4, classificando-os de Geometria teórica, na qual os objetos são abstratos e a validação é uma demonstração. Com relação ao nível 2, Parzysz (2006) afirma ser um nível intermediário entre as duas Geometrias, na qual o aluno se movimenta da validação perceptiva para a demonstração.

Parzysz (2006) também se apoia em Houdement e Kuzniak (1998 *apud* DIAS, 2009), os quais distinguem três paradigmas geométricos, caracterizados por sua relação com a intuição, a experiência e a dedução. O primeiro tipo diz respeito a uma Geometria natural (G I), na qual a Geometria se confunde com a realidade e a intuição norteia as observações. O segundo tipo é a Geometria axiomática natural (G II), a qual apresenta um esquema da realidade, tendo lugar para as experimentações. O último tipo é a Geometria axiomática formalista (G III), na qual não há mais vínculo com a realidade e os resultados são obtidos por meio da dedução.

Por fim, Parzysz (2006) também se apoia em Henry (1999 *apud* DIAS, 2009), o qual diferencia três tipos de relação com o espaço no ensino-aprendizagem da Geometria. Henry destaca, inicialmente, a situação concreta. Em seguida, uma primeira modelagem que se refere a uma abstração e simplificação da complexidade de uma situação real observada. Por fim, uma matematização elaborada a partir de um modelo anterior, feita no domínio teórico.

A partir dos três estudos, Parzysz (2006) propôs outra articulação entre os níveis de pensamento geométrico, tomou como base a natureza dos objetos estudados na Geometria e seu tipo de validação. Dessa forma, considera dois tipos de Geometria: a não axiomática e a axiomática. De acordo com Dias (2009), nas Geometrias não axiomáticas o estudo é voltado para uma situação concreta, os objetos são modelos da realidade ou a uma representação deles por meio de maquetes ou desenhos. A validação de uma afirmação sobre propriedades destes objetos ou relações entre eles é feita por meio da percepção, ou seja, o aluno afirma que é verdadeiro porque assim ele vê ou percebe. Nas Geometrias axiomáticas, Dias (2009) afirma que os objetos são teóricos e podem se referir ao real. A validação é feita por meio de teoremas e axiomas. Diferentemente da não axiomática, nesta geometria uma afirmação que se origina de uma observação da realidade ou não, só será verdadeira se a mesma puder ser demonstrada. Desse modo, Parzysz (2006) propôs um quadro teórico que comporta um total de quatro paradigmas:

Quadro 1 - Quadro teórico de Parzysz

	Geometrias não axiomáticas		Geometrias axiomáticas	
Tipos de Geometria	Geometria concreta (G0)	Geometria spatio-graphique (G1)	Geometria proto-axiomática (G2)	Geometria axiomática (G3)
Objetos	Físicos		Teóricos	
Validação	Perceptiva		Dedutiva	

Fonte: Parzysz (2006) (tradução nossa).

Parzysz (2006) afirma que os elementos que repousam sobre sua proposta são, por um lado, a natureza dos objetos em jogo (físico vs teórico) e, por outro, os modos de validação (perceptiva vs dedutiva).

Nesse sentido, de acordo com Dias (2009), as Geometrias não axiomáticas são subdivididas em duas outras: a Geometria concreta (G0) e a Geometria gráfico-espacial (G1). Em G0, “os objetos são físicos e suas características físicas influenciam as observações e constatações. A validação é baseada somente na percepção” (DIAS, 2009, p. 24). Em G1, “os objetos, que eram físicos em G0, ganham uma representação gráfica, que pode ser um esboço ou um desenho construído por processos geométricos”. Isso já é um primeiro passo para o processo de abstração, uma vez que os alunos necessitam reconhecer as propriedades que são características do objeto para determiná-los e, assim, fazer sua representação gráfica. Em G1 a validação é baseada em comparação visual e sobreposições, realizadas por meio da régua graduada, com compasso e esquadros. Além disso, Dias (2009) salienta que em G1 é requerido ao aluno, por parte do professor, identificar objetos geométricos por meio de suas representações, podendo ser físicas ou desenhos construídos por processos geométricos ou não, e não por suas definições.

Segundo Dias (2009), as Geometrias axiomáticas se subdividem em Proto-axiomática (G2) e Axiomática (G3). Em G2, “ainda pode-se recorrer a objetos físicos, tais como representações feitas por processos geométricos, mas a sua existência é garantida pelas definições, axiomas e propriedades entre figuras, no interior de um dado sistema axiomático” (DIAS, 2009, p. 24-25). A validação dessa Geometria se dá por meio de um discurso dedutivo aplicado aos dados do problema, se apoiando nos postulados e axiomas da Geometria Euclidiana. Em G3, “os objetos são teóricos e a tentativa de representa-los pode incorrer em deformações do objeto representado. A existência dos objetos geométricos, bem como as relações entre si, é baseada em axiomas, definições e teoremas, que podem mudar de uma geometria para outra”.

Parzysz (2006) apresenta uma articulação entre os níveis G1 e G2, a qual aponta alguns tipos ou gêneros de tarefas geométricas referentes a essas duas geometrias. Um desses tipos diz respeito à validação de uma dada conjectura, a qual Parzysz (2006) afirma que existem, no mínimo, duas maneiras de consegui-la:

> a) utilizar como técnica uma demonstração (eventualmente facilitada por uma figura) e se fundamentar em uma tecnologia constituída, por um lado, por uma geometria parcialmente axiomatizada, e, por outro, por um raciocínio hipotético-dedutivo, o conjunto pertencente à geometria G2 (a teoria correspondente sendo uma geometria euclidiana axiomatizada do tipo G3);
> b) utilizar como técnica a realização de um objeto gráfico (figura) e se apoiar em uma tecnologia constituída de um corpus de construções geométricas (saídas mais ou menos diretamente de G2) associada a validação perceptiva, o conjunto pertencente da geometria G1 (a teoria correspondente sendo a geometrografia) (PARZYSZ, 2006, p. 134).

Nesse sentido, a tecnologia é utilizada como suporte para auxiliar na verificação de um determinado objeto, por meio das propriedades inerentes àquele objeto, as quais os alunos já são capazes de argumentarem sobre elas (G2), ou pela observação das construções geométricas, estando relacionada apenas a análise da figura de maneira perceptiva (G1).

PROVAS E DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

As provas e demonstrações matemáticas têm papel importante, uma vez que é a partir delas que confirmamos se algo é válido ou não. Sabemos que na Matemática nada é aceito sem se ser questionado, provado ou demonstrado, ou seja, a demonstração é o coração do pensamento matemático, do argumento dedutivo, o qual tem sua base teórica no processo de provar, diferenciando assim a Matemática das Ciências Empíricas. Nesse sentido, Almouloud (2007) enfatiza que demonstrar é um procedimento de validação que caracteriza a Matemática e a distingue das Ciências Experimentais.

Balacheff (2000) distingue explicação de prova e demonstração. Para ele, a explicação se situa no nível do sujeito locutor, estabelece e garante a validade de uma proposição, estando enraizada em seus conhecimentos, no que constitui sua racionalidade, ou seja, suas próprias regras de decisão da verdade. Quando a explicação é reconhecida como convincente para uma comunidade, adquire um estatuto social e se constitui uma prova para esta comunidade, podendo ser verdadeira ou não. Desse modo, provas são explicações aceitas em um determinado momento, podendo ter estatuto de prova para uma comunidade, mas pode também ser rejeitada por outra. Para Balacheff (2000), quando uma prova faz referência a um enunciado matemático, esta se denomina demonstração. Isto é, demonstrações tratam de uma série de enunciados que se organizam seguindo um conjunto bem definido de regras. O que caracteriza demonstrações como gênero de discurso é a forma estritamente codificada. Com relação a essa diferenciação, consideramos em nossa pesquisa que provas e demonstrações não são palavras sinônimas, assim como Balacheff (2000) propõe. Além disso, tomamos prova com significado mais amplo, a qual pode ser entendida como discurso para estabelecer a validade de uma afirmação, que não necessariamente seja aceita por matemáticos puros. Ou seja, as justificativas encontradas nas produções dos alunos serão aceitas no contexto escolar dos mesmos, em termos do raciocínio envolvido, mesmo sabendo que muitas vezes esses alunos não consigam atingir a formalização necessária. Já a demonstração, ou prova formal, será considerada tipo de prova aceita pela comunidade dos matemáticos, a qual é baseada em um conjunto de axiomas e de outras propriedades já demonstradas, devendo ser obtida por meio de processo hipotético-dedutivo (GRINKRAUT, 2009).

Sabemos que provar é uma característica essencial da Matemática e que produz uma nova compreensão matemática, uma vez que possibilita ao aluno produzir novas ligações conceituais e novos métodos para resolver determinados problemas. Além disso, Balacheff (2000) afirma que o esquema de provar de um sujeito consiste em averiguar e convencer a si próprio, ou seja, o averiguar e o persuadir são totalmente subjetivos, uma vez que varia de sujeito para sujeito, de geração para geração, em uma mesma civilização. Nesse sentido, Balacheff (2000) identifica dois tipos básicos de provas: pragmática e intelectual. A prova pragmática diz respeito àquela prova em que o aluno recorre a testes de validade, busca de regularidades, exemplos ou desenhos para justificar um determinado resultado que, de acordo com Balacheff (2000), são recursos de ação. Dessa forma, as provas pragmáticas são aquelas em que os alunos podem verificar uma conjectura construída por meio de ações experimentais sobre os objetos estudados. Se o resultado for positivo, então o aluno pode considerar a conjectura válida. Já na prova intelectual, os alunos não recorrem aos recursos de ação no momento de formular as propriedades envolvidas e as possíveis relações entre elas, ou seja, se apoiam em formulações de propriedades e tomam consciência do caráter genérico das situações consideradas. As provas intelectuais são aquelas em que o discurso a ser utilizado pelo aluno é teórico, não necessitando observações experimentais como argumentos para validar uma conjectura, mas apenas resultados teóricos já observados, como definições, teoremas, axiomas, entre outros.

A partir dessas provas, Balacheff (2000) distinguiu quatro tipos principais de provas: empirismo ingênuo, experiência crucial, exemplo genérico e experiência mental. Segundo Balacheff (2000), o empirismo ingênuo consiste em assegurar a validade de um enunciado depois de tê-lo verificado em alguns casos, ou seja, consiste em afirmar a validade de uma conjectura após observação de um pequeno número de casos. Esse tipo de prova é a mais rudimentar, uma das primeiras formas no processo de generalização. De acordo com Balacheff (2000), a experiência crucial diz respeito à experimentação cujo resultado permite escolher entre duas hipóteses, sendo verdadeira somente uma delas, ou seja, consiste em afirmar a validade da proposição após verificação para um caso especial, geralmente não familiar. Nesse tipo de prova, o aluno realiza experiências e toma consciência de que busca por um resultado geral. Balacheff (2000) afirma que o exemplo genérico consiste na explicação das razões de validade de uma conjectura para validação de operações ou transformações de um objeto na qualidade de representante característico de determinada classe, isto é, o aluno trabalha sobre um objeto particular, mas tem em mente a classe de objetos do qual o primeiro é um representante. Nesse tipo de prova, o aluno busca uma generalização baseada em exemplos, mas procura justificá-la com a teoria relacionada a essa proposição. A experiência mental, segundo Balacheff (2000), se centra na ação, interiorizando-a e separando-a de sua execução sobre um representante particular, ou seja, consiste em afirmar a verdade de uma proposição de forma genérica, mas baseada no estudo de alguns casos específicos. Nesse tipo de prova, o aluno não faz mais referência ao caso particular, uma vez que a afirmação é elaborada para uma classe de objetos e a validação é inteiramente sustentada pela teoria.

Consideramos também outros tipos de prova, propostos por Nasser e Tinoco:

> Justificativa pragmática: o aluno atesta a veracidade de uma afirmativa com base em apenas alguns casos particulares;
> Recorrência a uma autoridade: o aluno afirma que o resultado é verdadeiro porque o professor falou, ou porque está no livro texto;
> Exemplo crucial: o aluno desenvolve através de um exemplo o raciocínio que poderia ter sido feito no caso geral;

> Justificativa gráfica: o aluno mostra numa figura por que o resultado é verdadeiro (NASSER e TINOCO 2003, p. 4).

Entendemos por prova formal quando a prova tem um desenvolvimento formal, que parte de pressupostos (hipóteses) e através do encadeamento do raciocínio e de resultados já conhecidos, ou de teoremas, chega-se ao resultado que se quer mostrar verdadeiro (tese) (NASSER e TINOCO, 2003). As autoras afirmam que atualmente observa-se que a maioria dos alunos não domina esse tipo de prova, nem quando chegam à universidade, nem quando concluem, e ainda, nem quando começam a exercer o magistério.

Assim como Hanna (1995), defendemos a ideia de prova ingênua, a qual diz respeito a uma argumentação aceitável, que pode ter diversos níveis de rigor, dependendo da idade e do ano de escolaridade do aluno. Dessa forma, não devemos restringir que a única forma válida de uma prova é a formal, uma vez que o grau de conhecimento matemático varia de aluno para aluno, e com isso devemos entender que cada aluno apresentará uma justificativa, ou uma prova, para determinada afirmação que condiz com seu desenvolvimento cognitivo.

Segundo Aguilar Jr. e Nasser (2012), para que os professores desenvolvam esse raciocínio com seus alunos é importante que compreendam e aceitem os diversos níveis de argumentação e justificação que seus alunos possam vir a apresentar para provar um determinado resultado matemático. Hanna (1990 *apud* AGUILAR JR, 2012) afirma que o nível de aprendizagem do aluno e o nível de exigência quanto ao valor do argumento dado para a comprovação de uma declaração matemática não devem necessariamente seguir os padrões de rigidez quanto à validade de proposições, como é defendida na academia.

Portanto, a construção de prova no contexto escolar é diferente daquela direcionada aos matemáticos na academia, uma vez que na escola o aluno buscará convencer alguém, ou a si mesmo, que determinada afirmação matemática é verdadeira. Porém, para isso a qualidade dos argumentos necessários para esse convencimento, assim como o nível de generalidade de uma prova são variáveis, já que o aluno pode se convencer da validade de um teorema apenas utilizando casos particulares (GRINKRAUT, 2009).

APLICATIVO GEOGEBRA

Janzen (2011) afirma que para que o aluno tenha uma boa compreensão da Matemática é necessário que tenha representações mentais ricas de conceitos, uma vez que lhe permitirá maior flexibilidade na resolução de problemas. À medida que isso é necessário, percebe-se que há falta de compreensão nos alunos, uma vez que se fizermos qualquer mudança na estrutura de um problema, ou na sua formulação, já lhes tira a capacidade de resolução. Ou seja, os alunos, em geral, se limitam a usar uma única representação do conceito e assim falham em resolver o problema em questão (JANZEN, 2011). Nesse sentido, para que os alunos venham a ter uma boa compreensão matemática, tendo representações mentais ricas de conceitos, uma possível abordagem no ensino seria a de se usar diversas representações do objeto, desde o início, interligando uma à outra. Desse modo, os ambientes computacionais são uma ferramenta útil para tal, pois neles há o recurso de visualização, ou seja, o aluno pode olhar cada parte da figura, buscando configurações e relações que podem ser exploradas (JANZEN, 2011).

Optamos por trabalhar com um aplicativo de geometria dinâmica, uma vez que esse tipo de aplicativo torna as aulas mais dinâmicas e interativas; possibilita que o aluno interligue a Geometria com a Álgebra, já que para uma figura geométrica há sua representação algébrica e vice-versa. Podemos aplicar movimento a seus elementos e as relações geométricas impostas à figura são preservadas, como enriquecem também as imagens mentais associadas às propriedades geométricas.

Petla (2008) afirma que o termo Geometria Dinâmica (GD) é utilizado para especificar a Geometria implementada em computadores, ou seja, a Geometria que permite os objetos serem movidos, mantendo todos os vínculos estabelecidos inicialmente na construção. Essa nomenclatura é entendida como uma oposição à Geometria tradicional de régua e compasso, estática, uma vez que o aluno, após realizar uma construção, desejar analisá-la com alguns dos objetos em outra disposição terá que construir um novo desenho. Já a Geometria Dinâmica possui um recurso de transformação contínua em tempo real quando utilizamos o simples arrastar nas construções.

Os aplicativos de Geometria Dinâmica oferecem possibilidade de movimento e os tornam dinâmicos uma vez que as figuras podem ser arrastadas e modificadas, enriquecendo assim a concepção de figura, uma vez que podemos ter várias representações de um mesmo objeto sem que o mesmo perca as propriedades geométricas. A possibilidade que os aplicativos de Geometria Dinâmica proporcionam com a função arrastar é grandiosa, uma vez que sugere novas maneiras de raciocinar, operar, de até mesmo conceber a Geometria, uma vez que apresentam o caráter relacional dos objetos geométricos. Assim, para Janzen (2011), nesses ambientes há múltiplas construções possíveis para um mesmo objeto geométrico e assim os alunos passam a compreender que a partir de certos fatos declarados (hipóteses) outros desses decorrem, os fatos estáveis implícitos (a tese do teorema), então passíveis de explicação. Para a autora, esta compreensão é parte fundamental para a construção de uma demonstração.

Há uma problemática com relação aos conceitos de desenho e figura adequados à Geometria Dinâmica ao utilizar a função arrastar. Segundo Olivero (2002, *apud* JANZEN, 2011), o desenho pode representar um objeto geométrico, com relações internas, porém se alteram em outros objetos pelo arrastar. Figuras são invariantes geométricos que se mantém mesmo com o arrastar de alguma de suas partes. Parzysz (2006) afirma que figura é um objeto geométrico teórico definido por um enunciado e desenho é uma representação material deste objeto teórico sobre um suporte plano, que pode ser uma folha de papel, tela de computador, entre outros.

Assim, com todas essas possibilidades, optamos por trabalhar com o aplicativo GeoGebra, criado pelo austríaco Markus Hohenwarter, produto de seu doutorado na University of Salzburg e que continua a desenvolvê-lo na Florida Atlantic University com uma equipe internacional de programadores para a Educação Matemática nas escolas. O nome GeoGebra reúne GEOmetria, ÁlGEBRA e Cálculo. GeoGebra é um aplicativo gratuito e de multiplataforma para todos os níveis de ensino, combinando Geometria, Álgebra, tabelas, gráficos, Estatística e Cálculo em um único sistema. Além disso, os gráficos, Álgebra, e tabelas construídas estão interconectados e possuem características dinâmicas; sua interface é amigável, com vários recursos sofisticados; é possível reproduzir as construções em páginas WEB e está disponível em vários idiomas.

O aplicativo GeoGebra pode ser adquirido gratuitamente pelo site <http://www.geogebra.org/cms/> com link para download a última atualização, versão 5.0. Qualquer usuário pode fazer a instalação individual do programa de forma fácil e rápida, desde que seja para fins não comerciais.

A *interface* desse aplicativo é composta de uma janela gráfica, dividida em uma janela de Álgebra, uma janela de visualização, menu principal, barra de ferramentas e um campo de entrada de comandos. Todas as representações de um mesmo objeto estão ligadas dinamicamente e adaptam-se automaticamente às mudanças realizadas em qualquer delas, independentemente da forma como esses objetos foram inicialmente criados. Na janela de visualização é possível realizar construções geométricas utilizando as ferramentas disponíveis na barra de ferramentas. Cada objeto criado na janela de visualização tem também sua representação na janela de Álgebra. Nesta janela, os objetos matemáticos são organizados por classes: objetos livres e objetos dependentes. Ou seja, se criarmos um novo objeto sem que para tal tenhamos utilizado qualquer objeto já existente, será classificado como objeto livre. Caso contrário, o novo objeto criado terá algum recurso de objetos já existentes, e será chamado de objeto dependente.

Gravina e Santarosa (1998) afirmam que a aprendizagem matemática, em especial da Geometria, dependerá de ações que caracterize o fazer matemático, ou seja, os alunos poderão experimentar, interpretar, visualizar, induzir, conjecturar, abstrair, generalizar e demonstrar. Nesse sentido, Bennet (2004) afirma que o uso do GeoGebra poderá auxiliar no processo de transformação daquilo que é abstrato para o concreto (visível), uma vez que o ambiente de Geometria Dinâmica encorajará os alunos descobrirem novas representações, isto é, o aluno perceberá como um matemático, inicialmente, visualiza e analisa um determinado problema, fazendo conjecturas anterior a provar e demonstrar. Assim, o GeoGebra estimula o caráter investigativo das tarefas, permitindo aos alunos levantarem hipóteses, criarem conjecturas e verificarem se essas são ou não verdadeiras. Nesse sentido, quando trabalhamos com provas e demonstrações matemáticas utilizando o GeoGebra, estas aparecem como alternativa de incentivo a conjecturar, argumentar, ao raciocínio hipotético-dedutivo e níveis de raciocínio geométrico. Quando o aluno trabalha com o aplicativo GeoGebra, poderá verificar as propriedades existentes naquela figura construída e ao fazer movimentações ampliará seu leque de conceitos. Além disso, o GeoGebra permite que o aluno descubra se uma conjectura está certa, uma vez que se estiver errada, ficará óbvio quando manipular as construções na janela de visualização de forma dinâmica. Já, se estiver certa as construções permanecem consistentes, seja qual for a forma de mexer a figura. Portanto, observamos, assim como Hofstadter (1997 apud DE VILLIERS, 2001), que esses trabalhos no GeoGebra não são demonstrações, uma vez que demonstrações é algo crítico do conhecimento matemático.

ASPECTOS METODOLÓGICOS DE NOSSA PESQUISA

Com as leituras realizadas na Equipe Provas e Demonstrações Matemáticas, e de forma individual, nos mostramos inquietos quanto ao trabalho sobre provas e demonstrações matemáticas e suas verificações no aplicativo GeoGebra. Com isso, buscamos investigar tipo de provas e demonstrações matemáticas e nível do pensamento geométrico de alunos do 2º ano do Ensino Médio a partir de uma proposta didática nos ambientes lápis e papel e GeoGebra.

Optamos por uma abordagem qualitativa para o desenvolvimento de nossa pesquisa, que segundo D'Ambrósio (2004) tem como foco entender e interpretar dados e discursos, mesmo quando envolve grupos participantes, ou seja, a pesquisa qualitativa depende da relação observador-observado e sua metodologia repousa sobre a interpretação e várias técnicas de análise de discurso.

Bogdan e Biklen (2003) afirmam que a pesquisa qualitativa se destaca pelo uso da descrição, da indução, da teoria fundamentada e do estudo das percepções pessoais. Nossa pesquisa qualitativa configura-se como estudo de caso, o qual "consiste na observação detalhada de um contexto, ou um indivíduo, de uma única fonte de documentos ou de um acontecimento específico" (BOGDAN e BIKLEN 2003, p. 89).

Yin (2001) afirma que um estudo de caso é uma investigação empírica, a qual investiga um fenômeno contemporâneo dentro de seu contexto da vida real, especialmente quando os limites entre o fenômeno e o contexto não estão claramente definidos. Dessa forma, o estudo de caso como estratégia de pesquisa compreende um método que abrange tudo, desde a lógica de planejamento, incorporando abordagens específicas para coleta, e análise dos dados. Portanto, o estudo de caso não é uma tática para coleta de dados, nem meramente uma característica de planejamento, mas sim uma estratégia de pesquisa abrangente (YIN, 2001).

Nossa pesquisa de campo se deu na Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Carlota Barreira, localizada na cidade de Areia, Paraíba, com vinte alunos do 2º ano do Ensino Médio, turno da tarde, na qual a maioria é da zona rural e utiliza transporte público disponibilizado pela Prefeitura para frequentar a Escola. Durante a coleta dos dados aplicamos uma redação sobre Provas e Demonstrações Matemáticas, composta por linhas e com o título Provas e Demonstrações Matemáticas, na qual os alunos se sentiram livres a dissertar o que sabiam, pensavam e entendiam sobre o tema.

A Equipe Provas e Demonstrações Matemáticas elaborou uma proposta didática sobre três assuntos da Geometria: Teorema de Pitágoras, Teorema da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo e Teorema do Ângulo Externo. Elegemos esses assuntos pelo motivo dos alunos do Ensino Médio já conhecerem os mesmos. Assim, a proposta de 18 atividades foi dividida em quatro partes. A primeira parte de 8 atividades sobre o Teorema de Pitágoras; a segunda de 3 atividades sobre o Teorema da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo; a terceira de 2 atividades sobre o Teorema do Ângulo Externo; e a quarta de 5 atividades a serem desenvolvidas no aplicativo GeoGebra com espaço aos alunos para fazer observações a respeito do Teorema de Pitágoras e do Teorema da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo. As atividades foram elaboradas com o intuito de fazer com que os alunos justificassem e argumentassem suas respostas, raciocinassem e refletissem sobre propriedades, conceitos e construções geométricas. Nas aplicações da redação e da proposta utilizamos observação participante, notas de campo, imagens e gravações em áudio. A proposta didática se deu em três momentos, três tardes, entre 13h e 17h.

No primeiro momento explicamos aos alunos nosso intuito e solicitamos a colaboração dos mesmos, a qual foi positiva. Logo após esse momento, foi proposto aos alunos redigir a redação sobre suas visões, opiniões, entendimento sobre provas e demonstrações matemáticas. Após este, fizemos uma pequena intervenção, na qual explicamos o que é um objeto matemático, a definição de Teorema e a explanação de uma demonstração, como também revisamos alguns conteúdos relacionados a triângulos, como definição, classificações quanto aos lados e ângulos, tipos de triângulos, tipos de ângulos, entre outros. Vale salientar que nesse momento não trabalhamos com os três assuntos que norteiam a proposta didática. Ainda nesse primeiro momento fizemos outra intervenção, na qual apresentamos o aplicativo GeoGebra, explicando o que é, quem desenvolveu, a *interface* do aplicativo, as opções de ferramentas na barra de botões, entre outros. Por fim, realizamos algumas atividades utilizando as ferramentas disponíveis na barra de botões e uma construção referente à função afim, na qual observamos o gráfico da função ao movimentarmos os seletores a e b.

No segundo momento trabalhamos as partes I e II da proposta didática sobre os assuntos de Teorema de Pitágoras e Teorema da Soma dos Ângulos Internos de um triângulo. Nesta tarde os alunos foram orientados a resolver as onze primeiras atividades da proposta.

Após a aplicação das duas primeiras partes, verificamos se os cinco arquivos do GeoGebra a serem utilizados no terceiro momento abririam nos computadores da Escola. Verificamos que eles não abriam, pois eram construções realizadas no GeoGebra 4.0 e 4.2 e o GeoGebra instalado nos computadores da Escola era de versão anterior. Como no site do Tube GeoGebra tem a opção de baixar arquivos off-line, o fizemos e levamos também nossos *notebooks*, por segurança.

No terceiro, e último momento, trabalhamos as partes III e IV da proposta sobre o Teorema do Ângulo Externo e atividades a serem realizadas no GeoGebra. Os alunos resolveram as sete últimas atividades. Nesse dia chegamos mais cedo à Escola e verificamos se os arquivos off-line funcionam. Deu certo apenas em dois computadores, os quais estavam conectados. Com isso, trabalhamos com os dois computadores da Escola e com nossos notebooks.

Contamos com a presença dos 20 alunos do 2º ano do Ensino Médio, 10 duplas nos dois primeiros momentos. Porém, no último momento tivemos outro pequeno imprevisto. As outras escolas estaduais do município de Areia decretaram ponto facultativo e os ônibus disponibilizados pela Prefeitura não trabalharam. Dessa forma, como a maioria dos alunos era da zona rural, e outros não quiseram ir para a Escola, só contamos com a participação de 7 alunos do referido 2º ano. Portanto, nesse dia formamos duas duplas e um trio de alunos.

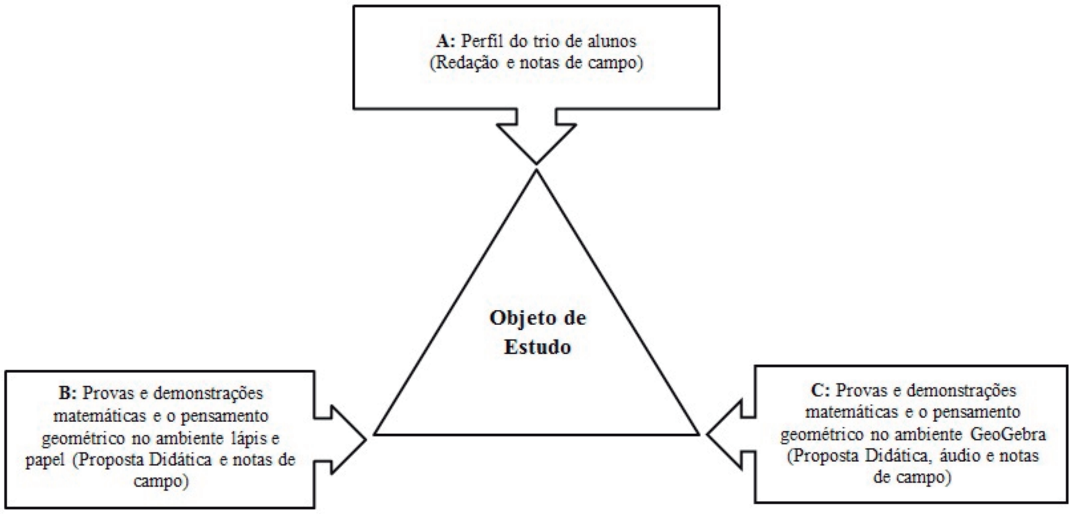
Durante a aplicação das partes I e II da proposta didática notamos que a maioria dos alunos não conseguiu resolver as atividades e estava deixando as mesmas em branco. Como no terceiro momento só contamos com a participação de duas duplas e um trio de alunos e estes participaram de todos os momentos, decidimos não trabalhar as atividades dos outros 13 alunos, uma vez que estavam incompletas. Ao observarmos as atividades completas dos 7 alunos, decidimos analisar oito atividades respondidas pelo trio de alunos por terem sido as mais ricas em termos de tentativa de respondê-las.

Para organização e análise dos dados de nossa pesquisa, optamos pela técnica de triangulação. A triangulação significa olhar para o mesmo fenômeno, ou questão de pesquisa, a partir de mais de uma fonte de dados, nas quais contêm informações advindas de diferentes ângulos que podem ser utilizadas para corroborar, elaborar ou iluminar o problema de pesquisa:

> o uso de várias fontes de evidências nos estudos de caso permite que o pesquisador dedique-se a uma ampla diversidade de questões históricas, comportamentais e de atitudes. A vantagem mais importante, no entanto, é o desenvolvimento de linhas convergentes de investigação, um processo de triangulação (...). Assim, qualquer descoberta ou conclusão em um estudo de caso provavelmente será muito mais convincente e acurada se se basear em várias fontes distintas de informação, obedecendo a um estudo corroborativo de pesquisa (YIN, 2001, p. 121).

Focamos especificamente na triangulação de fontes de dados (triangulação de dados), uma vez que exploramos diferentes fontes a fim de obtermos uma descrição mais rica e detalhada de nosso objeto de estudo. Tomamos como base a ideia de convergência, apresentada por Yin (2001), e a estrutura elaborada por Lins (2003) referente à convergência de evidências para a triangulação de dados:

Figura 1 - Triangulação dos dados.

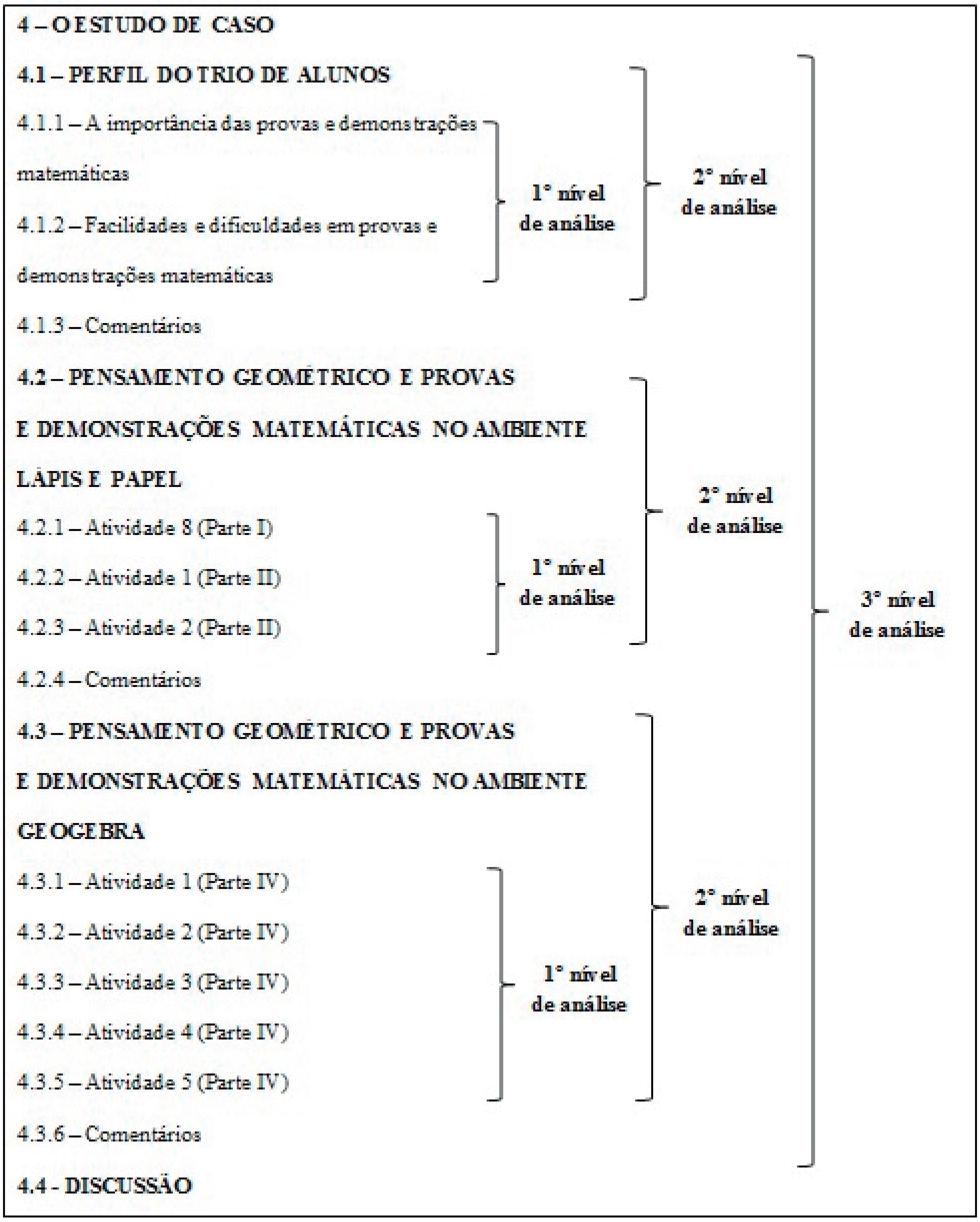


Fonte: Estrutura adaptada de Lins (2003).

A análise teve como objetivo responder a pergunta que norteou nossa pesquisa, sendo ela *Que tipo de provas e demonstrações matemáticas e nível do pensamento geométrico podem ocorrer a partir de uma proposta didática por alunos do 2º ano do Ensino Médio?*

Conforme Figura 1, o vértice A teve como objetivo traçar o perfil do trio de alunos pesquisados em relação às provas e demonstrações matemáticas. A coleta dos dados ocorreu por meio de redação. O vértice B objetivou analisar qual(is) tipo(s) de provas e demonstrações matemáticas os alunos conseguem desenvolver e qual(is) nível(is) do pensamento geométrico os mesmos se encontram ao trabalharem atividades no ambiente lápis e papel. Para isso, a coleta dos dados se deu por meio da aplicação da proposta didática e notas de campo. Já o vértice C visou analisar qual(is) tipo(s) de provas e demonstrações matemáticas os alunos conseguem desenvolver e qual(is) nível(is) do pensamento geométrico os mesmos se encontram ao trabalharem atividades no ambiente GeoGebra. Para isso, a coleta dos dados se deu a partir das respostas dos alunos com relação às atividades da proposta didática, áudio e notas de campo. Para a análise dos vértices B e C nos baseamos em Balacheff (2000) e Nasser e Tinoco (2003) para os tipos de provas e demonstrações matemáticas e Parzysz (2006) para os níveis do pensamento geométrico. Assim, a análise dos dados se deu em três níveis. O primeiro partindo das categorias, o segundo nível dos comentários, e o terceiro da discussão do estudo de caso como um todo. Os vértices se deram como categorias, sendo eles Perfil do trio de alunos, Pensamento Geométrico e Provas e Demonstrações Matemáticas no ambiente lápis e papel e Pensamento Geométrico e Provas e Demonstrações Matemáticas no ambiente GeoGebra. Em cada categoria foram geradas algumas subcategorias:

Figura 2 - Esboço das Categorias e Subcategorias



Fonte: Estrutura adaptada de Lins (2003).

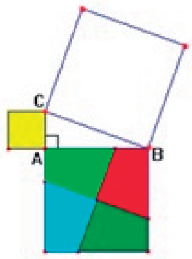
ANALISANDO UMA ATIVIDADE DO TRIO DE ALUNOS

Apresentamos neste artigo a Atividade 5 da parte IV da proposta didática (vértice C), na qual observamos os níveis de pensamento geométrico e os tipos de provas e demonstrações desenvolvidos pelo trio de alunos.

A Atividade 5 é uma adaptação de Ferreira Filho (2007) e diz respeito ao Teorema de Pitágoras. Esperávamos que o trio de alunos percebesse a relação entre as áreas dos quadrados construídos sobre os catetos com a área do quadrado construído sobre a hipotenusa:

Figura 3 - Atividade 5 (parte IV) resolvida pelo trio de alunos.

(5) (adaptado de Ferreira Filho, 2007)



Abram o arquivo *Montagem – Perigal* e observem, antes de fazer qualquer movimento, a imagem atenta e detalhadamente.

Na figura temos 5 peças coloridas, 4 dentro do quadrado médio e uma no quadrado menor. Arrastem cada uma das peças, encaixando-as dentro do quadrado maior.

Façam o que se pede:

a) O que vocês observaram? Relacionem as áreas dos quadrados construídos sobre os catetos com a área do quadrado construído sobre a hipotenusa. O que vocês concluíram?

b) Representem a medida da hipotenusa do triângulo retângulo por a, e por b e c as medidas de cada cateto. Relacionem as três medidas.

c) A verificação feita com esse arquivo é confiável, suficiente e dá certeza de que a relação obtida no item b é sempre válida em qualquer triângulo retângulo? Justifiquem.

d) No GeoGebra, construam um triângulo retângulo ABC qualquer. Com a ferramenta "distância, comprimento ou perímetro", meçam os lados de seu triângulo e com uma calculadora verifiquem a relação percebida anteriormente. O que vocês concluíram?

e) A verificação feita no item d garante que a relação vale sempre para qualquer triângulo retângulo? Justifiquem.

Fonte: Proposta didática.

Nessa atividade a maior dificuldade que o trio de alunos enfrentou ao realizar as movimentações foi a de arrastar os quadriláteros sem deformá-los, pois quando arrastados foram deformados e perderam as propriedades iniciais. O trio teve que desfazer a operação e começa-la novamente.

Esperávamos que o trio de alunos percebesse que era uma verificação para o Teorema de Pitágoras. Dessa forma, no item *a* o trio deveria explicar suas observações, ou seja, deveria observar o que aconteceu com a construção ao movimentar as peças dos quadrados médio e menor para o quadrado maior, percebendo, assim, a relação entre as áreas dos quadrados construídos sobre os catetos com a área do quadrado construído na hipotenusa.

No item *b* o trio deveria reconhecer, algebricamente, a relação existente entre as áreas dos quadrados construídos sobre os catetos com a área do quadrado construído na hipotenusa.

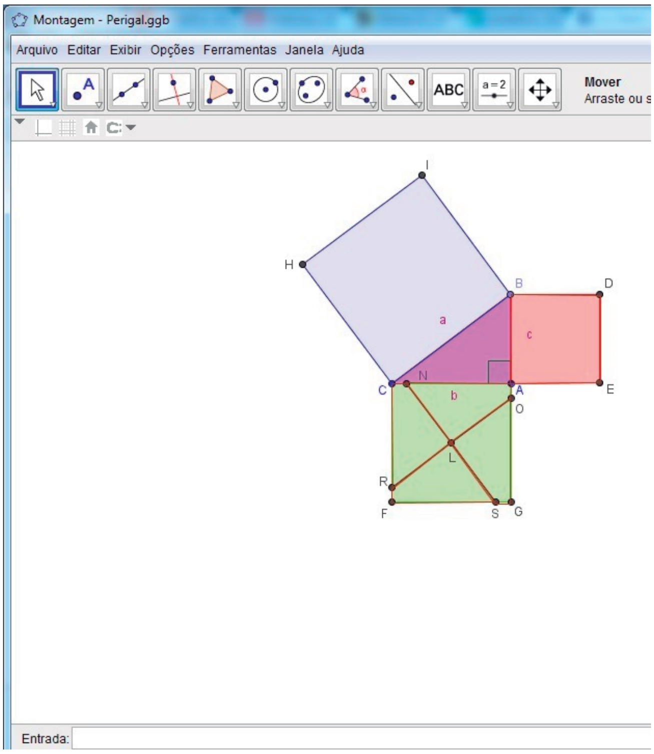
No item *c* o trio seria instigado a levantar suas dúvidas sobre a validade ou não da relação encontrada no item anterior para qualquer triângulo retângulo.

No item *d* o trio seria motivado a um novo processo de validação para verificar o Teorema de Pitágoras a partir de uma construção própria no aplicativo GeoGebra.

Por fim, no item *e* o trio de alunos deveria garantir, após a verificação feita no item *d*, se a relação encontrada no item *b* valeria para qualquer triângulo retângulo.

Para responder a Atividade 5 foi disponibilizado o material-689765, denominado de Montagem-Perigal. Esse material encontra-se disponível no link <http://ggbtu.be/m689765> do TubeGeoGebra, na versão 4.4 do aplicativo:

Figura 4 - Montagem-Perigal (Tube GeoGebra)



Fonte: GeoGebra

Foi solicitado ao trio de alunos que abrisse o arquivo e observasse a construção. Logo após, mencionamos que na Figura havia cinco peças, quatro no quadrado médio e uma no quadrado menor. Foi solicitado que o trio arrastasse cada uma das peças e encaixasse dentro do quadrado maior.

No item *a* perguntamos *O que vocês observaram? Relacionem as áreas dos quadrados construídos sobre os catetos com a área do quadrado construído sobre a hipotenusa. O que vocês concluíram?*:

Observamos que a forma do quadrado médio, juntamente com o quadrado menor são iguais ao do quadrado maior.

O trio de alunos movimentou corretamente as cinco peças para o quadrado maior e observou que a forma do quadrado médio, juntamente com o menor, é igual a do quadrado maior. No entanto, não conseguiu responder e não visualizou a relação existente entre as áreas dos quadrados construídos sobre os catetos com a área do quadrado construído sobre a hipotenusa.

No item *b* solicitamos *Representem a medida da hipotenusa do triângulo retângulo por a, e por b e c as medidas de cada cateto. Relacionem as três medidas*:

A relação está na junção do quadrilátero maior com a soma das três medidas.

Além da dificuldade inicial de arrastar as peças sem deformá-las, o trio de alunos não sabia o que era hipotenusa e catetos. Assim, foi observada uma discussão entre eles, que acabaram nos chamando na tentativa de sanar suas dúvidas:

> Pesquisadora: (...) Pergunte o que vocês não sabem.
> Aluno C: é assim... (risos)
> Aluno A: A gente não sabe o que é cateto e o que é hipotenusa.
> Pesquisadora: Olhe no triângulo retângulo. Tem três lados, né? Qual é a hipotenusa?
> Aluno C: A hipotenusa é esse aqui oh... eu acho que é a letra b, ou não.
> Pesquisadora: Por quê?
> Aluno C: Não sei.
> (...)
> Pesquisadora: (...) Minha gente, já tá aqui oh... as medidas já estão aqui, oh... (...) as medidas já estão aí... representar por a a hipotenusa, aonde é que tá o a?
> Aluno B: Aqui oh...
> Pesquisadora: Não.
> Aluno C: Não. Aqui...
> Pesquisadora: Não... é diferente. Esse A maiúsculo é o vértice, certo?
> Aluno C: Certo.
> (...)
> Pesquisadora: Essas letrinhas pequenas são segmentos. Então... se esse a aqui tá pequeno tá falando de que?
> Aluno B: De segmento.
> Pesquisadora: De segmento. Aonde é que tá esse a pequeno lá?
> Aluno B: Aqui no caderno...
> Pesquisadora: Aqui... que aqui é o que? (...) é um lado do triângulo, né?
> Aluno C: É.
> Pesquisadora: Então e... então esse lado é o que?
> Aluno C: A hipotenusa.
> Pesquisadora: A hipotenusa... por que é a hipotenusa? Vocês não sabem nem uma... assim...
> Aluno B: Não.
> Pesquisadora: Diferenciar a hipotenusa dos catetos?
> Aluno A: Não.

Aluno C: Eu não sei não.
Pesquisadora: Olhando aqui... já que você sabe que esse lado a aqui é a hipotenusa. Qual a diferença... os outros dois consequentemente são os...
Aluno B: Catetos...
Pesquisadora: Os catetos, certo? b e c. Qual a diferença entre a hipotenusa e os dois catetos? (silêncio) Olhando bem assim... Sem saber de medida, sem saber de nada...
Aluno B: Sei não o que é não.
Aluno C: Scho que os lados deles são mais menores.
Aluno B: Mas o que homi?
Aluno C: Dos catetos...
Pesquisadora: São menores...
Aluno C: É.
Pesquisadora: Ou seja, a hipotenusa...
Aluno B: É a soma de dois lados... todos os lados...
Pesquisadora: Tenha calma.
Aluno A: Ele é muito acelerado.
Pesquisadora: Ou seja, a hipotenusa... o, o... a medida da hipotenusa é o que?
Aluno C: Tem ...
Aluno B: A soma dos dois lados...
Pesquisadora: Não... é a maior.
Aluno C: É a maior. (risos)
Pesquisadora: Isso. Então o lado da... a hipotenusa é o maior lado do triângulo... Ou a outra definição... É oposta ao vértice A ou ao ângulo de 90º.

Notamos que o trio não sabia o que era hipotenusa e catetos. Além deste, a própria construção já estava indicando *a* como hipotenusa e *b* e *c* como catetos, porém a dupla não conseguiu responder o que estava sendo solicitado. Após a explicação, o trio de alunos afirmou que a relação está na junção do quadrilátero maior com a soma das três medidas, ou seja, o que foi apresentado pelo Aluno B durante a conversa, uma vez que afirmou ser a soma dos dois menores o maior, relacionando erroneamente, uma vez que se trata da soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos, equivalente à área do quadrado construído sobre a hipotenusa.

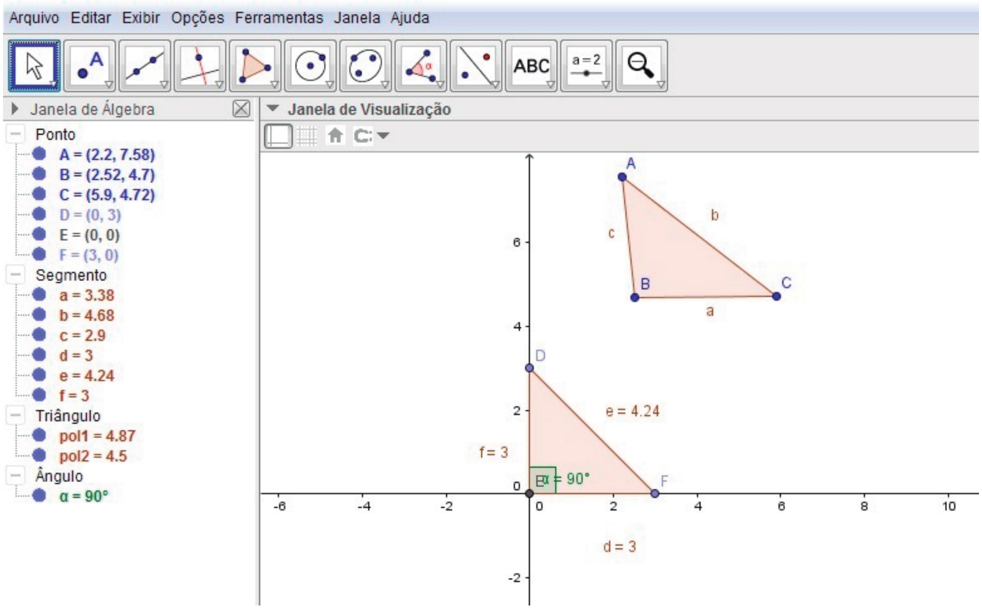
No item *c* solicitamos *A verificação feita com esse arquivo é confiável, suficiente e dá certeza de que a relação obtida no item b é sempre válida em qualquer triângulo retângulo? Justifiquem.*:

não, Porque nem sempre os elementos vão vir do mesmo Tamanho.

Nesse item pretendíamos que o trio conjecturasse e sentisse a necessidade de investigar a validade dessa relação. Esperávamos três tipos de respostas: não, pois as peças podem apresentar falhas mesmo que muito pequenas; sim, pois todas as peças se encaixaram e a relação foi confirmada; sim, pois já sabíamos que essa relação é verdadeira. O trio de alunos respondeu que essa verificação não era confiável e que não dava certeza de que a relação é sempre válida em qualquer triângulo por nem sempre os elementos são do mesmo tamanho. Pudemos comparar a resposta do trio com a primeira resposta que esperávamos, com a dupla afirmando os tamanhos das peças que compõem os quadrados médio e menor.

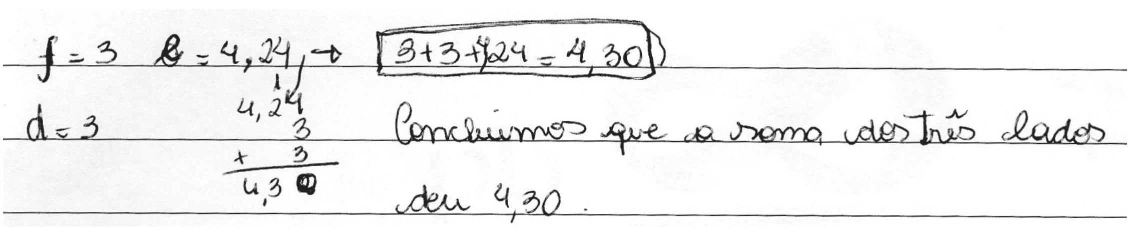
No item *d* solicitamos *No GeoGebra, construam um triângulo retângulo ABC qualquer. Com a ferramenta "distância, comprimento ou perímetro", meçam os lados de seu triângulo e com uma calculadora verifiquem a relação percebida anteriormente. O que vocês concluíram?*:

Figura 5 - Construção do triângulo no GeoGebra pelo trio de alunos



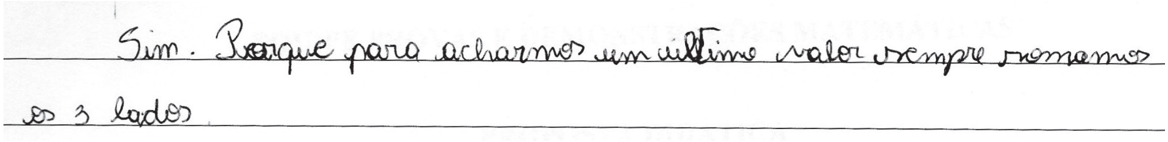
Fonte: GeoGebra

O trio de alunos não sabia construir um triângulo no aplicativo GeoGebra. Por meio do protocolo de construção disponível no aplicativo notamos que o trio construiu primeiro um triângulo qualquer ABC, utilizando três pontos e a ferramenta polígono. O trio nos mostrou a construção e dissemos que deveria ser um triângulo retângulo. Assim, o trio chamou outro aluno da turma e o mesmo os ajudou a construir. O aluno convidado pelo trio recomendou que utilizassem os eixos X e Y para formar o triângulo retângulo e então o trio criou três pontos, utilizou a ferramenta polígono, gerou três segmentos de reta, verificou o ângulo reto e com a ferramenta indicado nesse item *d*, gerou as medidas dos três segmentos e respondeu:



Como o trio afirmou que a relação era a soma dos três lados, entendemos que a resposta dada para esse item foi soma dos três lados do triângulo que o trio construiu. Porém, com erros de cálculo uma vez que o trio não considerou as unidades decimais e unidades inteiras. O trio não respondeu corretamente e não conseguiu perceber a relação presente na verificação do material. Não foi além do que estava sendo percebido e não conseguiu encontrar os conceitos geométricos corretos presentes na construção.

Por fim, no item *e* solicitamos *A verificação feita no item d garante que a relação vale sempre para qualquer triângulo retângulo? Justifiquem.*:


Sim. Porque para acharmos um último valor sempre somamos os 3 lados

Pretendíamos verificar se o trio generalizaria a relação apenas a partir da verificação de um caso particular e, consequentemente, esperávamos dois tipos de resposta: sim, pois é válida para qualquer triângulo retângulo; não, pois este é mais um caso particular. O trio de alunos afirmou que a verificação vale sempre para qualquer triângulo retângulo, porque para o trio encontrar o último valor sempre somarão os três lados. Ou seja, o trio utilizou a relação errada, e portanto a resposta é válida para a relação proposta pelo trio.

CONCLUINDO

Anterior à aplicação da proposta didática, acreditávamos que por ser um trio de alunos do 2º ano do Ensino Médio as atividades seriam resolvidas corretamente, uma vez que todos os assuntos presentes em nossa proposta didática já tinham sido estudados por eles. Porém, nos deparamos com alunos que não compreenderam os enunciados das atividades e com dificuldade de manipulação algébrica.

O trio de alunos não percebeu a relação entre as áreas dos quadrados construídos sobre os catetos com a área do quadrado construído sobre a hipotenusa. Não observou esses conceitos presentes na verificação, não soube dizer o que é hipotenusa e catetos de um triângulo retângulo, como não soube construir um triângulo retângulo no aplicativo GeoGebra.

Com relação ao pensamento geométrico do trio de alunos, notamos que se encontra nos dois níveis da Geometria não Axiomática, de acordo com Parzysz (2006): a Geometria Concreta (G0) e a Geometria Gráfico-espacial (G1), uma vez que utilizou de desenhos para justificar as afirmações, nos quais utilizou observações e constatações para justificar as características físicas da figura. Dessa forma, percepção foi a validação utilizada pelo trio.

Quanto aos tipos de provas utilizados pelo trio, mesmo tendo compreendido a relação errada, o trio utilizou, segundo Nasser e Tinoco (2003), a justificativa gráfica na construção do triângulo retângulo no aplicativo GeoGebra, e a justificativa pragmática na elaboração da conclusão da relação encontrada no caso particular. Já com relação às ideias de Balacheff (2000), o trio utilizou o empirismo ingênuo, uma vez que atestou a validade da relação por meio de observações de um caso particular.

Confirmamos as ideias defendidas por Nasser e Tinoco (2003), a qual hoje em dia nossos alunos não conseguem ver ligação significativa entre o conteúdo estudado na escola com suas vidas, repetem os modelos dados pelo professor ou aplicam fórmulas sem nenhum questionamento ou pensamento do porque a resposta ser aquela. Além disso, as referidas autoras ainda afirmam que a realidade hoje mostra que a maioria de nossos alunos não está aprendendo a pensar e raciocinar quando se estuda Matemática.

Além disso, Lorenzato (1995 *apud* BERTOLUCI, 2003) afirma que uma das causas para o abandono da Geometria no Brasil é seu ensino ter sido algebrizado com o Movimento da Matemática Moderna. Com isso, os alunos foram incentivados a decorar fórmulas para atividades mecânicas, e quando encontram atividades que os motivam a refletir, justificar e provar suas ideias, os mesmos não conseguem aplicar as fórmulas ou conceitos aprendidos, pois não condizem às atividades que estão acostumados a responder.

Portanto, podemos afirmar que o trio de alunos participantes de nossa pesquisa é somente uma amostra alarmante em como se encontram o ensino e aprendizagem da Matemática nas escolas brasileiras, uma vez que constatamos que esses alunos não estão aprendendo a pensar e raciocinar matematicamente. Além deste, o trio de alunos possui um conhecimento superficial do Teorema de Pitágoras, conteúdo memorizado e não compreendido pelos alunos.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos a agência de fomento CAPES pelo financiamento pleno de nosso Projeto OBEDUC em rede UFMS/UEPB/UFAL Edital 2012, viabilizando bolsas de estudo aos 46 membros, divulgação científica de nosso Projeto em congressos nacionais, internacionais e publicações, assim como financiamento para material permanente e de custeio.

REFERÊNCIAS

AGUILAR JUNIOR, C. A. **Postura de Docentes quanto aos tipos de Argumentação e Prova Matemática apresentados por alunos do Ensino Fundamental**. 144f. Dissertação de Mestrado em Ensino de Matemática, Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil, 2012.

AGUILAR JR, C. A.; NASSER, L. Analisando justificativas e argumentação matemática de alunos do Ensino Fundamental. In: **VIDYA**, v. 32, n. 2, p. 133-147, jul./dez. 2012 - Santa Maria. Disponível em <https://bit.ly/2p5upQs>. Acesso em 20 jul. 2014.

ALMOULOUD, S. A. Prova e demonstração em Matemática: problemática de seus processos de ensino e aprendizagem. In: **Portal do GT 19 da ANPEd**, Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação. 30ª reunião. Caxambú - MG. 2007. p. 1-18. Disponível em <https://bit.ly/2OsdNNG>. Acesso em 08 jul. 2014.

BALACHEFF, N. **Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas**. Bogotá: Universidad de los Andes, 2000.

BENNETT, D. **Exploring Geometry with The Geometer's Sketchpad.** Berkeley, CA: Key Curriculum Press, 2004.

BERTOLUCI, E. A. **Ensinando e aprendendo Geometria: uma experiência com o software Cabri-Géomètre II na 5ª série do Ensino Fundamental**. 233f. Dissertação de Mestrado em Educação, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2003.

BOGDAN, R. e BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução a teoria e aos métodos**. Porto: Porto Editora, 1994.

D'AMBRÓSIO, U. Prefácio. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (orgs.). **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

DIAS, M. S. S. **Um Estudo da Demonstração no Contexto da Licenciatura em Matemática: uma articulação entre os tipos de prova e os níveis de raciocínio geométrico**. 214f. Tese de Doutorado em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

FERREIRA FILHO, J. L. **Um estudo sobre argumentação e prova envolvendo o Teorema de Pitágoras.** 189f. Dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

FUSCO, C. A. S.; SILVA, M. J. F.; ALMOULOUD, S. A. O comportamento de um professor do ensino básico frente a uma situação de demonstração em Matemática. In: **Anais do IX ENEM**, Encontro Nacional de Educação Matemática. Belo Horizonte, 2007. Disponível em <https://bit.ly/2NfbDV8>. Acesso em 09 dez. 2013.

GRAVINA, M. A.; SANTAROSA, L. M. A aprendizagem da Matemática em ambientes informatizados. In: **Anais do IV Congresso RIBIE**. Brasília, 1998. Disponível em <https://bit.ly/2OoAsuF>. Acesso em 20 jul. 2014.

GRINKRAUT, M. L. **Formação de professores envolvendo a Prova Matemática: Um olhar sobre o Desenvolvimento Profissional**. 349f. Tese de Doutorado em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

HANNA, G. Challenges to the impact of proof. **For the Learning of Mathematics**, n. 15. p. 42-49, 1995.

IBIAPINA, I. M. L. M. **Pesquisa colaborativa: investigação, formação e produção de conhecimentos**. 1ª Ed. Brasília: Líber Livro Editora, 2008.

JAHN, A. P.; HEALY, L.; PITTA COELHO, S. Concepções de professores de Matemática sobre prova e seu ensino: mudanças e contribuições associadas à participação em um projeto de pesquisa. In: **Portal do GT 19 da ANPEd**, Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação. 30ª reunião. Caxambú - MG. 2007. p. 1-21. Disponível em <https://bit.ly/2Mvh0dy>. Acesso em 24 jan. 2014.

JANZEN, E. A. **O papel do professor na formação do pensamento matemático de estudantes durante a construção de provas em um ambiente de Geometria Dinâmica.** 194f. Tese de Doutorado em Educação, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2011.

LIMA, M. L. da S. **Sobre pensamento geométrico e provas e demonstrações matemáticas de alunos do 2º ano do Ensino Médio nos ambientes lápis e papel e GeoGebra**. 192f. Dissertação de Mestrado, PPGECEM, Universidade Estadual da Paraíba, 2015.

LINS, A. F. **Towards an Anti-Essentialist View of Technology in Mathematics Education**. Tese de Doutorado (PhD), University of Bristol, 2003.

LINS, A. F.; PEREIRA, P. S.; CARVALHO, M, M. Collaborative research work project with teachers who teach Mathematics at school level in the north east and center east Brazilian public schools. **13th International Congress on Mathematical Education.** ICME13, Hamburg, 2016

MIORIM, M. A; MIGUEL, A; FIORENTINI, D. Ressonâncias e dissonâncias do movimento pendular entre álgebra e geometria no currículo escolar brasileiro. **Zetetiké**. Ano I - nº 1/1993. P. 19-40. Disponíveis em: <https://bit.ly/2p78kko> (Primeira parte: 19-27) e <https://bit.ly/2xfFz94> (Segunda parte: 28-40). Acesso em 10 jul. 2014.

NASCIMENTO, E. G. A. Avaliação do uso do software GeoGebra no ensino de Geometria: reflexão da prática na escola. In: **Actas de la Conferencia Latinoamericana de GeoGebra**. Uruguay, p. 125-132, 2012.

NASSER, L.; TINOCO, L. A. A. **Argumentação e provas no ensino de Matemática**. 2ª Ed. Rio de Janeiro: UFRJ/Projeto Fundão, 2003.

PARZYSZ, B. La géometrie dans l´enseignement secondaire et en formation de professeurs des écoles: de quoi s´agit-il ? **Quaderni di Ricerca in Didattica**. n. 17. Italia: Universidade de Palermo, 2006.

PEREIRA, P. S., LINS, A. F., CARVALHO, M. Aspectos metodológicos de um projeto colaborativo de pesquisa com professores que ensinam Matemática na educação básica em escolas nas regiões brasileiras do nordeste e centro oeste, **VIII Congresso Ibero- americano de Educação Matemática**. VIII CIBEM, Madri, 2017

PETLA, R. J. **GeoGebra - possibilidades para o ensino de Matemática**. 45f. Unidade Didática do Programa de Desenvolvimento Educacional, PDE, Universidade Federal do Paraná, União da Vitória, 2008.

STAKE, R. E. **Pesquisa qualitativa: estudando como as coisas funcionam**. Porto Alegre: Penso, 2011.

VILLIERS, M. D. Papel e funções da demonstração no trabalho com o *Sketchpad*. **Educação e Matemática**. n. 62. Março/Abril de 2001. p. 31-36. Tradução de Eduardo Veloso. Disponível em: <https://bit.ly/2p8hsW8>. Acesso em: 10 de mar 2015.

YIN, R. K. **Estudo de caso: planejamento e métodos**. 3. ed. Tradução de Daniel Grassi. Porto Alegre: Bookman, 2001.

RECEBIDO EM: 01 ago. 2017
CONCLUÍDO EM: 04 abr. 2018