VIDYA, v. 37, n. 2, p. 367-382, jul./dez., 2017 - Santa Maria, 2017. **ISSN** 2176-4603

IMPACTOS DE ANÁLISES DE ACERTOS E ERROS EM UMA DISCIPLINA DE CÁLCULO I

IMPACTS OF ANALYSIS OF CORRECT ANSWERS AND ERRORS IN THE SUBJECT MATTER OF CALCULUS I

MESSENAS MIRANDA ROCHA*
VÂNIA MARIA PEREIRA DOS SANTOS-WAGNER**

RESUMO

Neste artigo trazemos impactos de análise de acertos e erros de estudantes repetentes da disciplina de Cálculo I ao calcular limites de funções reais de uma variável para os processos de ensino e aprendizagem (BORASI, 1996, 1987; CURY, 2008; PINTO, 1998; ROCHA, 2016). Desenvolvemos uma pesquisa qualitativa em 2014, onde atuamos como professor pesquisador junto com o professor de Cálculo I. Coletamos dados por meio de observações de aulas; tarefas; questionários e entrevistas dos 38 estudantes da turma. Nessa turma de repetentes, diferente do que fazíamos antes, revisamos conceitos de matemática básica, em que os estudantes tinham dificuldades, em paralelo com tópicos de Cálculo I. Esse trabalho integrado nos auxiliou a compreender e analisar erros. Também utilizamos análise de erros como estratégia pedagógica para tornar erros observáveis para professor e estudantes. Observamos que essas estratégias pedagógicas diferenciadas do professor pesquisador favoreceram a aprendizagem de conceitos de Cálculo I e possibilitaram uma mudança de postura dos universitários e professores.

Palavras-chave: Cálculo Diferencial e Integral. Educação Matemática. Ensino Superior. Funções de Variáveis Reais. Limites de funções reais. Repetência-Educação.

ABSTRACT

In this article, we present impacts of analysis of correct answers and errors of repeating students of the subject matter of Calculus I when calculating limits of real functions of one variable to the processes of teaching and learning (BORASI, 1996, 1987; CURY, 2008; PINTO, 1998; ROCHA, 2016). We developed a qualitative research in 2014, where we acted as a teacher research along with the teacher of Calculus I. We collected data through class observations; tasks; questionnaires and interviews of the 38 students in the class. In this class of repeating students, unlike to what we made before, we reviewed concepts of basic mathematics, in which students had difficulties, in parallel with the Calculus I topics. This integrated work of mathematical concepts helped us to understand and analyze errors. We also used analysis of errors as a pedagogical strategy to make errors observable for teachers and students. We observed that these differentiated pedagogical strategies from the teacher researcher favored the learning of Calculus I and enabled a posture change of the university students and teachers.

Keywords: *Differential and Integral Calculus. Mathematics Education. Higher education. Real Variable Functions. Limits of real functions. Repetition-Education.*

* Doutor em Educação, professor do Instituto Federal do Espírito Santo, Campus Itapina. E-mail: messenas.rocha@ifes.edu.br
** Doutora em Educação Matemática por Indiana University, professora aposentada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, professora voluntária do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal do Espírito Santo. E-mail: profvaniasantoswagner@gmail.com

INTRODUÇÃO

A disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I (Cálculo I) está presente em diversos cursos de nível superior. Os índices de reprovação em Cálculo I são elevados, prejudicando tanto o rendimento de estudantes quanto o término de seus cursos. Algumas pesquisas brasileiras e estrangeiras, que retratam o desempenho de universitários nessa disciplina, confirmam que existe um alto índice de reprovação (BARUFI, 1999; REIS, 2001; DOMINGOS, 2003; REZENDE, 2003; MURILLO, 2004; GARZELLA, 2013). Esses estudos apontaram que, embora já existam textos de ensino médio com ideias rudimentares de Cálculo, essas abordagens ainda são superficiais e pouco ajudam no ensino de Cálculo na universidade (BARUFI, 1999; REZENDE 2003).

A pesquisa de Garzella (2013) analisou impactos de práticas pedagógicas de docentes de Cálculo I no processo de ensino-aprendizagem e na vida acadêmica e pessoal de estudantes. A partir de dados do setor acadêmico da Universidade de Campinas, foram analisadas as taxas de reprovação e evasão dessa disciplina. Esse levantamento de doze anos (1997 a 2009) encontrou taxas de até 77,5% de reprovação e evasão. Para Garzella (2013), as formas de organização didática e a qualidade da mediação desenvolvida pelos professores em aula determinaram esse aproveitamento insatisfatório.

Assim, trazemos nesse artigo recortes de uma tese de doutorado que nasceu da necessidade de compreender motivos da repetência por várias vezes de universitários na disciplina de Cálculo I. Algo deveria ser feito por esses estudantes, para que eles acreditassem que seriam capazes de aprender, de aumentar confiança neles próprios e melhorar a autoestima deles. Além disso, passamos a questionar e refletir acerca de nossos procedimentos de ensino e de avaliação como professor universitário da disciplina nesses últimos dez anos em que muitos estudantes foram reprovados. Afinal, que erros estudantes iniciantes e repetentes cometem ao resolverem limites de funções? Esses erros são referentes aos conteúdos de matemática básica ou são erros específicos de Cálculo I?

Um estudo exploratório realizado em 2013, com uma turma de repetentes de Cálculo I, nos fez acreditar que precisávamos investigar conceitos introdutórios de Cálculo. Isso se confirmou, após alguns estudantes relatarem que limite e derivada eram conteúdos onde tinham mais dificuldades de aprender. Isso, de certa forma, fazia com que eles desistissem da disciplina a partir das notas das primeiras avaliações. Decidimos, então, investigar no estudo definitivo de doutorado em 2014 como estudantes resolviam tarefas de limites de funções reais.

ANÁLISE DE ERROS

A análise de erros, como uma abordagem de pesquisa em educação matemática, tem sido enfocada de diversas formas. Em alguns estudos, quantificam-se erros que foram cometidos, em outras registram-se os tipos de erros, em outras procedem-se a analisar e categorizar os tipos de erros cometidos por estudantes, e em algumas procuram-se compreender as possíveis causas de certos erros. Em nossa investigação fizemos análises de respostas (certas e erradas) de universitários em questões que envolviam conteúdos de limites de funções reais. Trabalhamos em nossa tese de doutorado com o mesmo enfoque de Rafaela Borasi (1987, 1989, 1996). Ela é uma das pioneiras nesta temática ao destacar (1) porque é necessário e importante que professores e alunos compreendam e analisem erros que acontecem em tarefas matemáticas; (2) que o professor deve se questionar a respeito dos motivos do erro e do que pensou o aluno para resolver a tarefa comentando esse erro. Para Borasi (1989), o erro só tem sido usado como uma ferramenta poderosa para diagnosticar as dificuldades de aprendizagem em matemática. No entanto, a maioria desses estudos ainda compartilha uma concepção limitada, uma vez, que o erro é visto apenas como um sinal de que algo deu errado no processo de aprendizagem, e que se faz necessário alguma remediação. Isto é, ela nos sugere que pensemos em responder e investigar questionamentos do tipo: Por que tal erro aconteceu? O que será que o aluno pensou? Como o aluno achou que poderia usar este procedimento errado? Além disso, a partir de nossas leituras e estudos sobre pesquisas com foco em análise de erros e de nossas experiências de investigação (ROCHA; 2016), acrescentamos esse questionamento: Que outras tarefas matemáticas e/ou comentários do professor deram pistas ao aluno de que de que poderia resolver a tarefa desta maneira e assim cometeu tal erro ou levaram o aluno a pensar que poderia resolver a tarefa assim?

Ademais, Borasi (1989, 1996) ressalta que se os estudantes envolverem-se nessa tarefa de análise de erros eles poderão observar e questionar seus erros e, verificarão que isso funcionará como um trampolim para a aprendizagem deles. Assim, Borasi (1989) já afirmava que professores não usavam todo o potencial educativo que os erros podem ter nos processos de ensino, aprendizagem e avaliação e precisam passar a fazer isso nesses processos educativos. Por isso, consideramos essa autora uma das pioneiras em apontar outras formas de usar análise de erros que vão além de simplesmente diagnosticar onde algo está errado e pensar em remediar tais erros como se fossem apenas erros procedimentais.

Em seus trabalhos já citados, Borasi comenta sobre a relevância das contribuições filosóficas desenvolvidas por Kuhn (1970), Lakatos (1976) e Kline (1980)[1]. A autora diz que eles a auxiliaram a notar que os erros são fundamentais no desenvolvimento de uma disciplina. Assim, concluiu que erros podem funcionar como um trampolim para aprendizagem se forem usados por professores e alunos de forma apropriada. Borasi (1987) também citou os problemas e contradições encontrados no desenvolvimento inicial do Cálculo Diferencial e Integral, que motivaram matemáticos a refletirem sobre a importância de erros para a evolução desse campo de conhecimento matemático.

> Os problemas e as contradições encontradas no início do desenvolvimento do cálculo também fornecem um exemplo muito interessante da função de erros na história da matemática. Na verdade, os erros cometidos inicialmente neste campo abalou a confiança dos matemáticos, a ponto de motivar uma revisão da metodologia utilizada na disciplina. (BORASI, 1987, p. 2)[2]. (Tradução nossa)

Para o desenvolvimento da matemática é importante a busca por um rigor. E nessa busca, matemáticos profissionais também cometem erros em suas conjecturas, que posteriormente conseguem ajustar, às vezes, levantam suposições injustificadas e encontram resultados parciais que são importantes para a criação de novos conhecimentos. Para Cury (1994, p. 227) "o trabalho do matemático não é infalível: ele pode ser um percurso sofrido, acarretar erros que só serão descobertos anos mais tarde, sofrer retrocessos e percalços, bem como surgir de intuição brilhante que apresenta soluções, mas não indica os caminhos".

---

[1] KUHN, T. **The structure of scientific revolutions**. Chicago: University of Chicago, 1970; LAKATOS, I. **Proofs and refutations**. Cambridge: Cambridge University, 1976; KLINE, M. **Mathematics the loss of certainty**. Oxford: Oxford University, 1980.

[2] The problems and contradictions encountered in the early development of the calculus also provide a very interesting example of the role of errors in the history of mathematics. In fact, the errors made initially in this field shook mathematicians' confidence to the point of motivating a revision of the methodology used in the discipline (BORASI, 1987, p. 2)

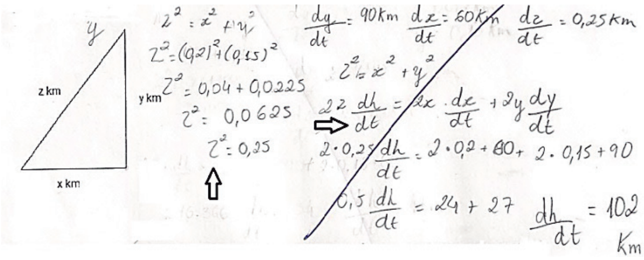
A partir do momento em que nós, professores, envolvemos os estudantes nesse processo de análise de seus erros toda a dinâmica de aula muda. Borasi (1989) afirma que *"o aluno não tem exercido nenhuma função nessa interpretação e análise"* (p. 4). Seu argumento é de que os próprios alunos precisam exercer a atividade de tentar "explicar" e "corrigir" seus próprios erros, e que nós professores precisamos criar situações que os tornem observáveis para eles (BORASI, 1987, 1989, 1996). Foi nessa perspectiva que utilizamos a análise de erros em nossa investigação. Conforme a autora, essa ação mostra-se altamente motivadora e desafiadora para alunos, como dispositivo inspirador e como ponto de partida para explorações matemáticas criativas, envolvendo valiosas soluções de um problema, ou mesmo para problematização da atividade. Por isso, é importante escolhermos de forma adequada alguns erros para usar como ponto de partida para reflexões e explorações em aulas. Precisamos tomar cuidado para não deixar alunos envergonhados ou embaraçados ao comentarmos alguns erros em aulas, e portanto, devemos comentar vários tipos de erros e evitar de mencionar quem comentou tal erro, até que os estudantes passem a notar o potencial de observar e questionar as causas dos erros. De posse desses erros isolados ou grupos de erros com as mesmas características, nós (professores e alunos) fazemos uma avaliação mais profunda, completa e consciente de determinado conteúdo matemático, bem como da natureza da própria matemática e de seu ensino.

Em nossa pesquisa de doutorado trouxemos também algumas reflexões sobre o papel do erro para professores e alunos. Concordamos com Pinto (1998) quando afirma que é necessário tornar erros observáveis para professores e alunos. Também passamos a refletir quando formulávamos uma questão em que os objetivos não estavam claros, ou, até mesmo, quando trazíamos questões nas avaliações que não eram coerentes com o tipo de questões trabalhadas em aulas de Cálculo I. Porque constatamos que essas práticas avaliativas estavam incoerentes com o que tinha sido trabalhado na prática docente como assevera Santos (1997). Isso se apresentava como uma das evidências da participação do professor na produção do fracasso desses universitários repetentes. Por isso, foi fundamental, em nossa investigação, refletir com os universitários acerca de qual seria a origem desses erros. Ou seja, qual seria a parcela de contribuição e/ou responsabilidade que cada um, professor e estudantes, envolvidos no processo de ensino e aprendizagem, poderiam ter sobre esses erros cometidos pelos repetentes.

A pesquisa realizada por Cury (1989) também nos ajudou a compreender como nossas concepções de matemática influenciam na forma de considerar erros de nossos alunos. Segundo Cury (1990), ao analisar as provas e suas respectivas correções por parte de alguns professores, de uma turma da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, ela detectou três pontos de divergência. Observou que havia uma divergência de pontos de vista sobre a formulação das questões, os critérios de avaliação e a forma como os professores consideravam os erros dos alunos.

O comportamento que nós, professores, tínhamos, no início dessa pesquisa de doutorado, era o mesmo comportamento herdado de alguns de nossos mestres. Em nossas correções das atividades ou provas, só aceitávamos dois resultados possíveis, ou a questão estava totalmente correta ou era considerada incorreta e atribuíamos zero na questão. Não tínhamos a preocupação em considerar as etapas de resolução de uma questão. Por exemplo, se na resolução de um problema, fosse necessário fazer uma figura para representá-lo, e se o aluno conseguisse desenhar e aplicar corretamente os teoremas na resolução da questão, mas, se por um lapso errasse no resultado final, avaliávamos a questão toda como incorreta e dávamos zero na questão. Ou seja, desconsiderávamos todas as etapas corretas que o estudante tinha feito na questão e elas não eram avaliadas nem pontuadas. Observe, por exemplo, a figura a seguir com a resposta do aluno, o que marcamos na questão[3] e reflexões posteriores a respeito dessas práticas avaliativas:

Figura 1 - Resolução do estudante A1.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Durante o estudo definitivo de doutorado, quando olhamos para nossos procedimentos de correção de tarefas avaliativas e refletimos sobre os mesmos constatamos uma postura bem rígida. Em 2013, quando corrigimos essa tarefa, simplesmente marcávamos com um traço dizendo que a resolução estava errada e atribuíamos nota zero à questão. Fizemos isso para esse estudante e outros. Mas, podemos observar que esse estudante acertou algumas etapas da questão. Esse é só um exemplo de como concebíamos e valorizávamos as respostas.

O nosso único olhar era para a resposta final e se usou procedimentos de resolução como pensamos ao propor a tarefa. Não tínhamos um critério de correção definido, nem pensávamos em analisar os procedimentos desenvolvidos por cada estudante e de pontuar partes da resolução dele. Precisávamos abrir nosso olhar para a avaliação, suas funções, formas e critérios de correção e os possíveis papéis dos erros e indícios do que foi feito em cada questão como advoga Santos (1997). As mudanças nas práticas docentes podem acontecer se o professor for capaz de refletir e tiver maturidade para constatar que é necessária alguma mudança na sua prática dele. Esse comportamento de mudança é algo próprio de cada professor e só vai acontecer se o professor assim o desejar e quiser correr os riscos de assumir essa nova atitude profissional.

REFLEXÕES SOBRE PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO

Estudos de educação matemática e práticas do quotidiano do professor desvelam dificuldades de compreensão e generalização de conceitos matemáticos por estudantes ao longo da vida escolar (DOMINGOS, 2003; GUZMÁN, HODGOSON, ROBERT, VILLANI, 1998). Para alguns autores, essas dificuldades parecem acentuar-se quando se dá a transição do ensino médio para o superior. Segundo Nasser, Souza e Torraca (2012), alguns professores justificam o baixo desempenho de universitários em Cálculo I argumentando que nem todos sabem conceitos de matemática elementar que oferece suporte à compreensão de conceitos matemáticos de ensino superior que envolvem pensamento matemático avançado.

No estudo de Domingos (2003) verifica-se um elevado índice de retenção nos primeiros anos universitários, sobretudo em disciplinas que exigem a construção e compreensão de conceitos matemáticos

[3] Dois carros estão se encaminhando em direção a um cruzamento, um seguindo a direção leste, a uma velocidade de 90 km/h; e o outro seguindo direção sul, a 60 km/h. Qual a taxa segundo a qual eles se aproximam um do outro no instante em que o primeiro carro está a 0,2 km do cruzamento, e o segundo, a 0,15 km? (LEITHOLD, 1994, p. 202).

abstratos, características que aparecem, principalmente, nos conceitos de Cálculo. Nessa fase, esse autor afirma que os estudantes têm contato com situações em que se exigem definições e deduções, que estão baseadas em processos de representações e abstrações com um nível elevado de complexidade. Para Tall (1991) na universidade, estudantes têm que compreender e construir conceitos matemáticos por deduções formais e suas propriedades reconstruídas através de deduções lógicas. Isso é o que gera raciocínios típicos do pensamento matemático avançado.

Geralmente, exige-se de universitários uma experiência formal com conteúdos matemáticos de ensino médio que os prepare para estudar matemática avançada, mas esse preparo adequado nem sempre ocorre. Essa contradição ocorre, porque verificamos que boa parte de matemática estudada em nível fundamental e médio exigia dos alunos apenas um entendimento de matemática instrumental (SKEMP, 1976). Concordamos com esse autor, que a escola cobrava e cobra dos alunos que entendam e conheçam procedimentos instrumentais de resolução de tarefas sem terem entendimento relacional entre conceitos e tarefas. Ou seja, muitos alunos aprendem de forma decorada e/ou usando regras sem saberem e compreenderem porque essas estratégias funcionam para resolver vários exercícios semelhantes que exigem apenas cálculos operatórios. Ou seja, o entendimento relacional envolve compreender como e por que se resolvem tarefas matemáticas com determinadas estratégias e relacionar conceitos matemáticos. Skemp (1976) também argumentava que alunos precisam ter os dois entendimentos de matemática, tanto o entendimento instrumental quanto o entendimento relacional para aprenderem de fato matemática. Concordamos com esse autor que esses dois entendimentos são fundamentais para aprendizagem.

A maioria dos estudantes que ingressa no ensino superior traz consigo uma expectativa positiva em relação a sua futura experiência acadêmica. Nessa fase, o estudante tem a oportunidade de passar por vários desafios provenientes de conflitos cognitivos frente a aprendizagem de matemática. Para Dreyfus (1991) a estrutura lógica dos conteúdos e a metodologia a serem usadas seguem um padrão bem conhecido: definimos os teoremas, demonstramos e usamos exemplos de aplicações desses teoremas. Para esse autor, essa maneira de lecionar tem várias vantagens, por exemplo, serve para estruturar bem o curso, delimitando o conteúdo e o tempo em que são trabalhados. Em contrapartida, é inflexível em termos de aplicabilidade aos alunos, podendo funcionar bem para alguns alunos que dominam a matemática, porque possuem um talento próprio para matemática, ou porque já vivenciaram boas experiências matemáticas anteriormente.

De acordo com Tall (1991) no final do ensino médio e no ensino superior, temos as definições matemáticas formais com seus axiomas, teoremas e deduções lógicas presentes. No nível superior de estudos de matemática, espera-se que o aluno atinja um nível de pensamento matemático avançado. Esse autor afirma que o foco principal da educação, no nível universitário, é iniciar o aluno em um mundo completo do matemático profissional, não só em termos de rigor, e por isso, deverá compreender como os conceitos são fundamentados. Tall (1991) comenta que a mudança do pensamento matemático elementar para um pensamento matemático avançado envolve uma transição difícil para os estudantes, porque eles têm que mudar a forma de pensar.

Essa alteração ocorre a partir da ideia de que conceitos matemáticos têm base intuitiva fundamentada na experiência, mas os estudantes, na universidade, têm que compreender e construir conceitos matemáticos especificados por deduções lógicas formais e suas propriedade reconstruídas através de deduções lógicas. De acordo com Tall (1991), muitos dos processos do pensamento matemático avançado já são encontrados em um nível mais elementar, entretanto com algumas diferenças em nível de abstração formal.

> A mudança do pensamento matemático elementar para o avançado envolve uma transição significativa: de *descrever* para *definir*, de *convencer* para *provar* em uma forma lógica baseada nessas definições. Essa transição requer uma reconstrução cognitiva que é vista, durante os esforços iniciais dos estudantes universitários com abstrações formais, na medida em que eles enfrentam o primeiro ano da universidade. É a transição de *coerência* da matemática elementar para a *consequência* da matemática avançada, baseada em entidades abstratas que o indivíduo deve construir através de deduções a partir de definições formais (TALL, 1991, p. 20)[4] (Tradução nossa e grifos do autor).

Diante disso, devemos considerar que, durante o processo de ensino-aprendizagem de matemática no nível superior, os alunos precisam passar por situações em que eles possam construir conceitos por meio de deduções e se envolver em atividades que possam favorecer a abstração e a generalização. Dreyfus (1991) afirma que o pensamento matemático avançado pode ser definido e compreendido por uma série de processos que se relacionam e que envolvem a representação, abstração, visualização, generalização, modelagem e sintetização. Esse autor comenta que alguns conceitos matemáticos desde a educação infantil também envolvem processos semelhantes a estes da matemática avançada.

Nessa mesma perspectiva, Skemp (1976) nos recorda da importância de ensinarmos matemática que também propicie um entendimento relacional de conceitos matemáticos e não trabalharmos priorizando só um entendimento instrumental. Os dois entendimentos de conceitos matemáticos são necessários e importantes para que alunos aprendam matemática elementar e matemática avançada. Por exemplo, é muito comum estudantes universitários errarem "regras" de sinais em operações com números inteiros, quando calculam algo do tipo $(-1).(-1)=+1$. Por outro lado, esse exemplo tão simples está carregado de significados matemáticos que foram trabalhados desde os anos finais do ensino fundamental. Provavelmente esse estudante "decorou/memorizou" as regras de sinais, sem nenhum tipo de compreensão, e, por algum motivo, ele não consegue lembrar a regra. Aqui temos certamente mais um exemplo como comentava Skemp (1976) de que estudantes adquiriram apenas entendimento instrumental sobre como multiplicar inteiros sem terem entendido de forma relacional como e porque multiplicam números inteiros desta forma.

METODOLOGIA

Coletamos dados e informações pautados numa concepção de pesquisa qualitativa (FLICK, 2004). Os fatores que justificam nossa escolha são os pontos de vista subjetivos presentes nas informações que foram descritas e analisadas. Destacamos aqui: (1) as nossas reflexões sobre nosso papel de professor e professor-pesquisador; (2) as observações, e reflexões dos professores (professor regente, professor-pesquisador e orientadora) e alunos sobre o desempenho de ambos no processo de ensino e aprendizagem de Cálculo; (3) uso de análise de erros como estratégia didática e metodológica; (4) o enfoque indutivo utilizado nas análises dos dados para compreender acertos e erros dos alunos; e (5) o processo descritivo e interpretativo utilizado para apresentação e análise dos dados.

[4] The move from elementary to advanced mathematical thinking involves a significant transition: that from *describing* to *defining*, from *convincing* to *proving* in a logical manner based on those definitions. This transition requires a cognitive reconstruction which is seen during the university student's initial struggle with formal abstractions as they tackle the first year of university. It is the transition from the *coherence* of elementary mathematics to the *consequence* of advanced mathematics, based on abstract entities which the individual must construct through deductions from formal definitions.

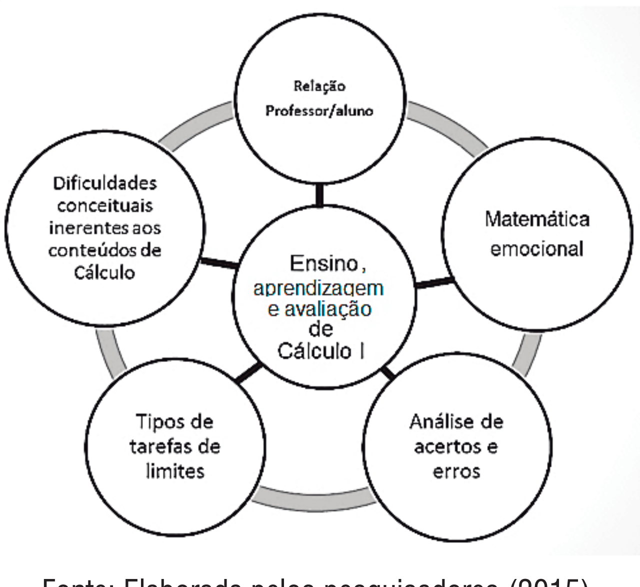
Essa pesquisa ocorreu no primeiro semestre de 2014, em uma turma formada exclusivamente por 38 estudantes repetentes da disciplina de Cálculo I dos cursos de Bacharelado em Engenharia Agronômica e Licenciatura em Ciências Agrárias. As aulas ocorriam em um horário diferente da grade regular das outras disciplinas. Investigamos e compreendemos causas e motivos do insucesso de estudantes repetentes em Cálculo I e dificuldades deles em resolver tarefas ligadas à ideia de limite de funções reais. Observamos e analisamos também os vários obstáculos que repetentes de Cálculo I encontram para conseguir compreender o conceito de limite de funções reais. Criamos também situações em aula, como conversas informais durante o reforço extraclasse, intitulado Projeto Cálculo, para essa turma com mais duas aulas de 50 minutos semanais. O objetivo desse projeto foi tirar dúvidas de Cálculo ou de conceitos matemáticos de ensino fundamental e médio.

Os dados e informações provenientes dos instrumentos que utilizamos para coletar e analisar os dados, tais como, questionários para conhecer a turma, atividades de reforço e aprofundamento sobre limite, análise de erros com a turma, foram variados. Esses foram obtidos e construídos a partir de (i) observações e registros de aulas, (ii) diálogos e registros constantes das atividades, (iii) aplicação de questionários para os estudantes, (iv) atividades de apoio, com a participação do professor-pesquisador, realizadas em horário diferente das aulas, e (v) provas e testes sobre limite de funções.

APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DE DADOS

Quando reanalisamos o que estudantes tinham aprendido, ou não, sobre determinado conteúdo, e estavam reprovados em Cálculo, não tomamos como referência só as notas para concluir ou inferir algo. Procuramos compreender e refletir a respeito de todo o contexto, ou seja, pensar quais eram os fatores que estavam influenciando para que esse resultado de reprovação se perpetuasse. Optamos em contemplar, nas análises e observações, alguns componentes do processo educativo que se relacionam nos processos de ensinar, aprender e avaliar em Cálculo conforme a figura abaixo.

Figura 2 - Componentes analisados no processo de ensino, aprendizagem e avaliação de Cálculo I.



Fonte: Elaborada pelos pesquisadores (2015).

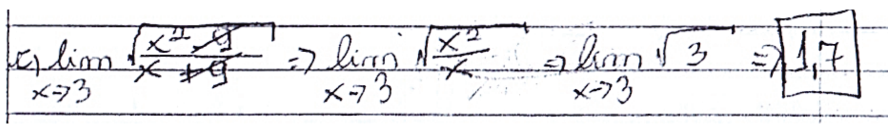
Conscientes de que não era possível quantificar dificuldades, motivações e expectativas de repetentes para cursarem de novo a disciplina de Cálculo I, pois se quantificássemos acertos e erros nas questões propostas, isto não nos explicaria motivos das dificuldades deles e talvez nem nos fornecessem pistas de suas motivações e expectativas. Assim, foi necessário olhar o que estava subjacente, implícito nas respostas, isto é, olhar por trás das respostas dos alunos, ou seja, procurar compreender, dialogar e levantar questionamentos a partir das respostas certas ou erradas desses estudantes, pois acreditamos que "não há conhecimento que não tenha passado por erro antes da sua consolidação" (PINTO, 1998, p. 48).

As análises de produções corretas e erradas em tarefas objetivaram compreender as dificuldades de repetentes com limites de funções e auxiliaram-nos para revermos a forma de trabalho com esse conteúdo. Constatamos que algumas dificuldades deles tinham a ver com a complexidade do conceito de limite, e não somente com dúvidas sobre processos algébricos e aritméticos utilizados na resolução da questão. As pesquisas realizadas por Murillo (2004) e Hitt; Cortés (2005) também encontraram dificuldades dos estudantes em resolver tarefas de limites. As dificuldades ocorreram especialmente quando foram propostas funções que apresentavam alguma descontinuidade em determinado ponto. Por exemplo, a função não era definida especificamente no ponto em que se pretendia calcular o limite (HITT; CORTÉS, 2005). Nesse texto apresentamos interpretações das tarefas de um estudante (universitário identificado como A19) que participou do estudo de doutorado em todas as etapas. Este estudante fez parte do grupo de três estudantes que também foram entrevistados em 2015, um ano após a conclusão do estudo de campo (Ver detalhes em Rocha (2016)).

Analisando alguns erros com a turma para que fossem erros observáveis

Os erros apresentam um potencial para a melhoria da aprendizagem do indivíduo e precisam ser explorados de outras formas, não somente pelo professor, mas, principalmente, pelo aluno como advogam Borasi (1987) e Pinto (1998). Dentro dessa perspectiva, realizamos, com a turma da pesquisa, uma atividade na qual selecionamos questões com alguns erros que detectamos na primeira avaliação sobre limite de funções reais de duas variáveis. Nesta tarefa solicitamos que eles apontassem quais foram os erros por eles cometidos na referida questão e quais seriam as estratégias de ensino que eles apontariam para que fossem evitados esses erros em questões do mesmo tipo. A seguir mostramos uma figura com erro cometido pelo estudante A19. A resolução foi apresentada para a turma junto com outros erros de outros estudantes no mesmo item e sem identificar naquela fase quem eram os estudantes. Mostrávamos em slide de power point apenas a resposta com os erros e solicitávamos que todos da turma comentassem e explicassem os possíveis motivos daqueles erros.

Figura 3 - Solução apresentada pelo estudante A19.



Fonte: Acervo pessoal dos pesquisadores (2014).

Na discussão coletiva com a turma de repetentes, eles justificaram que as simplificações dos números noves acima foram por dois motivos: (a) achavam que alguns estudantes equivocadamente pensavam que a simplificação poderia ser feita, porque os números nove apresentavam sinais opostos; e (b) outros estudantes alegaram também equivocadamente, que esses valores numéricos poderiam ser simplificados, uma vez que não influenciariam no valor do limite, pois poderiam ser desconsiderados. Alguns estudantes justificaram corretamente que não seria possível nenhuma simplificação, pois a expressão algébrica $x^2 - 9$ que aparece no numerador não poderia ser simplificada pela expressão algébrica $x + 9$ que aprece no denominador. Tivemos ainda alunos que disseram que o valor de x para qual o limite está tendendo pertence ao domínio da função, portanto o valor de x poderia ser substituído diretamente na função, porque ela é uma função contínua em $x = 3$ e portanto $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Podemos perceber a partir dos argumentos apresentados pelos estudantes ao comentarem seus erros que existiam ainda equívocos tanto de simplificações algébricas (erros da matemática básica) como erros conceituais de limite e de suas propriedades (erros conceituais de Cálculo). As alternativas apresentadas pelos estudantes para eliminação desses tipos de erros e que de certa forma nós, pesquisadores, concordamos são: (i) que o professor precisa enfatizar as fatorações algébricas e simplificações algébricas paralelamente durante a resolução da questão; e (ii) a utilização das propriedades de limites durante todo o processo de resolução. Esse foi um momento importante para nossa tomada de consciência sobre a utilização do erro como estratégia didática. Segundo Pinto (1998), de modo semelhante aos estudos de Borasi (1986, 1987, 1996), o ato de explicar e dar sentido a seus próprios erros é uma atividade altamente estimuladora e provocativa para os estudantes. Dessa forma, tivemos a oportunidade de analisar, com esses estudantes, de forma consciente e crítica, os motivos e as causas da ocorrência desses erros.

Cálculo de limite de funções racionais - uma dificuldade latente

Durante a realização das atividades com a turma no estudo exploratório (2013), no estudo definitivo (2014) e, a partir das pesquisas já realizadas por Cornu (1991), Hitt e Páez (2003), e Murillo (2004) sobre limite de funções, verificamos que os estudantes apresentam certas dificuldades na resolução de limites de funções racionais. Essas dificuldades ficam mais evidentes, especialmente, quando propomos funções que apresentam alguma descontinuidade em determinado ponto, ou seja, a função não é definida especialmente no ponto em que se pretende calcular o limite. Trazemos a seguir a solução de duas questões do estudante A19 envolvendo funções racionais em dois momentos do estudo de doutorado em 2014. A primeira questão $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}$ (Figura 4) foi aplicada na primeira avaliação sobre limite, cujo enunciado era: Calcule o limite da função abaixo, caso exista. A segunda questão $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$ (Figura 5) tinha como enunciado: Com base nas propriedades de limites, calcule os seguintes limites, justificando cada passo de sua resolução.

Figura 4 - Solução do estudante A19 em questão da primeira prova de limite.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}$$

forma lateral

$$\frac{1{,}999-2}{(1{,}999)^2-4} = \boxed{0{,}25}$$

$$\frac{2{,}001-2}{(2{,}001)^2-4} = 0{,}2499$$

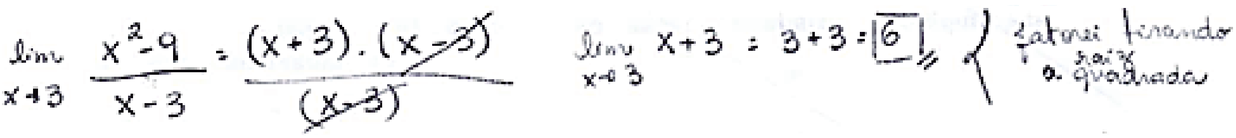
$$\frac{\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}\cdot(x+2)} \qquad x+2 = 2+2 = 4$$

Fonte: Acervo pessoal dos pesquisadores (2014).

Analisando a resposta apresentada por esse estudante podemos perceber que ele justifica na sua resolução a utilização da definição de limites laterais, atribuindo apenas dois valores para x, um tendendo a 2 pela esquerda e outro tendendo a 2 pela direita. E depois calcula o limite utilizando simplificações algébricas e verifica de maneira equivocada outro valor para o limite da função. Observamos que seu erro é apenas em considerar o resultado como 4 e não ¼ (erros de conceitos da matemática básica) na simplificação da fração. Podemos identificar em sua solução dois valores para o limite da função, esquecendo-se de um conceito básico de limite, que é sua unicidade. Esses foram erros considerados, por nós, como específicos de Cálculo.

O importante, para nós, foi observar que alguns estudantes não fizeram a conexão/transposição entre o valor encontrado para o limite por aproximações numéricas e o valor encontrado quando o limite era calculado por uma simplificação algébrica. Erros desse tipo, referentes à álgebra elementar também foram encontrados na pesquisa de Cury e Cassol (2004).

Figura 5 - Solução do estudante A19 em uma questão na prova final.



Fonte: Acervo pessoal dos pesquisadores (2014).

Verificamos que à medida que o estudante adquiriu uma maior confiança nos procedimentos algébricos para simplificar as funções racionais e sabia o que estava fazendo que ele procurava abandonar a estratégia de cálculo por meio da definição de limites laterais e aproximações numéricas. Mesmo já desenvolvendo algumas propriedades corretamente, observamos alguns deslizes de notação, como por exemplo, há um erro de notação em $\lim_{x\to 3} x + 3$, pois o correto seria $\lim_{x\to 3}(x + 3)$. As estratégias utilizadas pelos estudantes repetentes nas resoluções de limites de funções racionais na prova final foram geralmente de dois tipos: i) utilizaram a definição de limites laterais; ii) fizeram uma simplificação algébrica da função, encontrando uma função equivalente, depois de remover essa descontinuidade, usaram o mesmo procedimento para calcular o limite de uma função contínua equivalente. Posteriormente, fizeram uma substituição numérica do valor de x na função, ou seja, calcularam o $\lim_{x\to a} f(x)$, ao fazerem o cálculo do valor da função para x=a, encontrando f(a). Nessa etapa final eles assumiam que era possível substituir direto em x=a porque pensavam que esta função equivalente era contínua.

Conceito de limite de funções do estudante A 19

O ensino do conceito de limite de funções, adotado nos primeiros anos de algumas universidades, tem priorizado às vezes os aspectos mecânicos na resolução de infinitas listas de exercícios semelhantes aos exemplos feitos em aula e explicados também de forma breve e superficial. Professores que utilizam tal metodologia favorecem apenas que seus estudantes tenham entendimento instrumental desses conceitos como afirmava Skemp (1976). Por outro lado, Cornu (1991, p. 153) comenta que diferentes investigações realizadas mostram muito claramente "que a maioria dos estudantes não domina a ideia de limite, mesmo em um estágio mais avançado dos seus estudos". Isso não os impede de conseguirem resolver exercícios e problemas, e assim conseguirem ter sucesso em seus exames, porque muitas vezes as provas trazem itens semelhantes aos trabalhados em aulas e em exercícios e que exigem apenas cálculos e procedimentos decorados e instrumentais (SKEMP, 1976).

Com o objetivo de verificar se os estudantes conseguiram internalizar uma imagem conceitual (TALL, VINNER, 1981) da noção intuitiva de limite, nós propusemos, em nossa entrevista um ano depois, quando os estudantes já estavam estudando Cálculo II, as seguintes perguntas: a) O que é, para você, o limite de uma função? b) O que significa a expressão $\lim_{x \to a} f(x) = L$? Acreditamos que essas duas perguntas se complementam para nos fornecerem alguma ideia das imagens conceituais dos estudantes acerca da construção do conceito de limite de função. Na primeira pergunta o estudante vai nos indicar o que pensa sobre limite e vai acionar suas experiências com essas tarefas, o que internalizou e partes de suas imagens mentais. Já na segunda pergunta por usarmos os símbolos matemáticos o estudante deve acionar em sua mente outras ou as mesmas associações e imagens mentais do que internalizou a respeito de limite de funções e de como efetuar estes cálculos de limites. Ademais, segundo Tall e Vinner (1981), geralmente, nesse processo de construção do conceito é dado um símbolo ou um nome que permite que ele seja comunicado, e isso auxilia na manipulação mental.

Resposta do estudante A19: ''O limite de f(x), quando x tende a **a**, significa se você substituir x=a nessa função, você encontra L. Podemos fazer o valor de x se aproximar de a cada vez mais, e as imagens desses valores de x se aproximarão de L, tanto quanto você queira, só fazer o x se aproximar mais de a.''

Ao lermos e interpretarmos a resposta desse estudante A19, vamos dividi-la nos dois pensamentos formulados por ele. O primeiro pensamento de A19, isto é, a sua frase inicial, nos parece exibir uma noção intuitiva de limite e de que sempre a função é contínua no valor x =a e que se pretende calcular o limite quando x está tendendo a esse valor a. Já o segundo pensamento de A19, expresso em sua segunda frase, do ponto de vista histórico sua definição de limite parece estar de acordo com a definição de limite de ''D'Alembert (1717), mesmo que incompleta, de que a variável é um conceito dinâmico que, em hipótese alguma, atinge o seu valor limite, "*ela **tende** a esse valor*" (REZENDE, 1994, p. 148) (grifo do autor). Levando em consideração que o estudante A19 não consultou nenhum tipo de livro e que ele não fazia nenhuma ideia do que iríamos perguntar, podemos ainda observar que ele trouxe elementos de uma definição formal de limite de função. Vale a pena ressaltar outra vez que esse diálogo entre pesquisador e estudante aconteceu em 2015 exatamente um ano após o término do estudo de doutorado. O estudante tinha estas memórias acerca de limites.

Se observarmos outra vez as duas partes de sua resposta temos na fala de A19, alguns argumentos que poderiam ser considerados contraditórios. Podemos interpretar a primeira frase como o estudante começando com uma definição de limite como algo operatório e bem instrumental (SKEMP, 1976), ou seja, o limite de uma função é só substituir o valor de x na função e calcular esse valor como sendo o limite procurado. Em contrapartida, ele traz na segunda parte de sua definição um detalhe, que nos chamou a atenção para pensamentos relacionados com a ideia de epsilons e deltas que usamos em definições formais e provas matemáticas. Não podemos afirmar o que se passou na mente de A19 quando disse: ''Podemos fazer o valor de x se aproximar de a cada vez mais, e as imagens desses valores de x se aproximarão de L, tanto quanto você queira, só fazer o x se aproximar mais de a''.

Por outro lado parece que, esse insight do estudante na sua definição, que ocorreu de maneira consciente ou inconsciente, ficou bem próximo de algo formal matematicamente falando. Essa frase, que destacamos na definição do limite de uma função do estudante A19, é exatamente a ideia intuitiva dos épsilons e deltas da definição formal de limite e pode ser que ele tenha iniciado a compreender este conceito intuitivo de limite. Ficamos surpresos ao ver um estudante que tinha repetido Càlculo I por tantas vezes e que traz evidências de que nosso trabalho diferenciado em 2014 e as tarefas em que analisamos e discutimos erros tiveram algum impacto em suas imagens conceituais de limites. Pois teve este diálogo cerca de doze meses após o estudo e estava satisfeito cursando Cálculo II (em 2015) e outras cinco disciplinas do terceiro período do curso.

Para nós, professores, esse tipo de resposta de A19, e que também escutamos de outros estudantes, está nos mostrando que existe potencial de aprendizagem no diálogo com argumentos e contra-argumentos de professor e estudantes. Se nós soubermos aproveitar o potencial de nossos universitários e criarmos situações em sala de aula, deixando que exponham e defendam mais suas ideias e conceitos aprendidos, ou ainda em construção, possibilidades concretas de aprendizagem e de esclarecimentos de dúvidas surgem ou podem surgir. Por que não arriscarmos dizer que é possível sim, que eles construam e/ou reconstruam uma imagem do conceito e uma definição do conceito do limite de funções.

Mas, aqui, colocamos, como desafios, a necessidade de planejarmos aulas, listas de exercícios e provas que envolvam tarefas operatórias e conceituais diferentes das que usamos na rotina das aulas de Cálculo I em cursos universitários de serviço. Para Cornu (1983), a aquisição do conceito de limite requer uma representação mental de imagens, desenhos, ligações que não são as mesmas para a aquisição da definição formal de limite. Portanto, os alunos precisam experimentar em tarefas as várias formas de representação de limite que são representação numérica, representação algébrica e representação gráfica.

REFLEXÕES E CONCLUSÕES FINAIS

Acreditamos que a análise de erros dos estudantes e o uso dessas análises com a turma têm potencial e trazem benefícios para os processos de ensino, aprendizagem e avaliação de conceitos de Cálculo I. Ademais, a análise de erros nos ajudou a compreender tanto alguns conteúdos da matemática básica quanto alguns específicos da disciplina de Cálculo I que precisavam ser abordados e explorados de outras formas em aulas. Passamos a considerar, em nossas aulas, acertos e erros e, assim, utilizamos as respostas corretas, incompletas ou erradas dos alunos como trampolim para a aprendizagem (BORASI, 1987). Verificamos que alguns erros aconteciam pela complexidade dos conceitos envolvidos, sobretudo nos conteúdos de Cálculo, pois a matemática no ensino superior assume um papel diferente daquele usado no ensino fundamental.

Os erros cometidos por repetentes foram semelhantes durante todas as fases da pesquisa, na fase de diagnóstico, listas inciais de limites, primeira prova, prova de recuperação e prova final. As principais dificuldades deles foram com relação a lapsos na escrita, erros operatórios e de conceitos de Cálculo I como propriedades dos limites, definição de função contínua e utilização de maneira equivocada da definição de limites laterais.

Nos momentos em que tentamos desconstruir alguns conceitos errados nem todos queriam mudar suas atitudes quando resolviam exercícios ou itens de provas. Por exemplo, usar a ideia de limite como uma simples substituição. Parece que alguns não queriam incorporar novos conceitos, nem outras formas de pensar e resolver as tarefas. Eles optavam em aceitar a ideia de limite de uma função quando x tende ao valor a, como sendo apenas uma simples substituição numérica em x = a, sem considerar se a função era ou não contínua no valor a, onde efetuaram o cálculo do limite.

Em nossa pesquisa, assim como no trabalho de Murillo (2004), observamos estudantes com uma imagem conceitual de limite ou concepção de limite que associava a ideia de limite com o simples cálculo algébrico e/ou substituição de valores numéricos na função dada. Quando um estudante tem essa imagem ou concepção incompleta e equivocada de limite, ele pensa que calcular o limite de uma função real quando x tende a um valor determinado ($\lim_{x\to a} f(x) = L$) como sendo a simples substituição deste valor na função dada, ou seja, ele responde que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Em nenhum momento esse estudante pensa em analisar o domínio da função, em questionar se a função é ou não contínua, se ele sabe ou não esboçar o gráfico da função, etc. Não há uma análise do estudante do comportamento da função na vizinhança que contém o ponto, uma concepção que conduz a uma resposta correta, quando a função é contínua, mas, caso contrário, leva a uma resposta errada. Isto é, quando um estudante possui essa imagem conceitual ou concepção de limite apenas como substituição numérica de procedimentos algébricos, parece que ele trabalha em um nível puramente procedimental como comentaria Skemp (1976) e fica sem evidenciar que possui qualquer entendimento relacional dos conceitos matemáticos envolvidos.

Queremos ressaltar, entretanto, que temos consciência da nossa responsabilidade, ou, por que, não dizer, culpa por gerar e/ou influenciar esses tipos de equívocos ou dificuldades nos estudantes ao calcularem limites de funções. Não era de costume em nossas aulas, por exemplo, exigir dos alunos a aplicação correta das propriedades dos limites no momento em que estavam calculando determinado limite. E eles insistiam em, simplesmente, fazer substituição direta da variável x para o cálculo de alguns limites de funções. E ao procurarmos rever e relembrar nossa forma de expor e resolver tarefas de limites nas aulas precisamos admitir que nós, professores, somos responsáveis. Nós recordamos que nem destacávamos as propriedades de limites nem fazíamos questionamentos a respeito da função ser definida no domínio ou ser contínua no valor de x onde era solicitado o cálculo de limite. Passamos a rever e refletir acerca de nossa forma de expor e resolver tarefas de limites nas etapas finais da pesquisa de campo e ampliamos essas reflexões nas várias fases de análise dos dados.

Acreditamos que, para uma maior compreensão do limite de uma função, o professor precisa inserir, na rotina de sala de aula e em listas de exercícios sobre limites de funções, as três formas diferentes de explicação e resolução de tarefas: linguagem natural, representação geométrica e algébrica. Essas abordagens devem ser feitas para um mesmo limite de uma função, de modo que os alunos consigam transitar de uma representação para a outra sem nenhuma dúvida. Durante nossa investigação, usamos as três representações, mas, em muitos casos, com limites diferentes. Cremos que isso tenha dificultado que fizessem uma relação entre essas três maneiras de abordar o conceito de limite. Em nossas aulas, acreditamos que adotamos durante toda a pesquisa uma postura de professor que priorizou uma aprendizagem instrumental (SKEMP, 1976), ao explorar o conceito de limite de funções. Passamos a ter essa consciência a partir do momento em que começamos a analisar, detalhadamente, as produções escritas dos estudantes, somente depois que já tínhamos implementado nossa investigação.

REFERÊNCIAS

BARUFI, M. C. B. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral** . 1999. 195f. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo.

BORASI, R. Exploring mathematics through the analysis of errors. **For the Learnig of Mathematics** 7. F.L.M. Publishing Association Montreal, Quebec, Canada, 3 nov. 1987, p. 32-45.

______. Students' constructive uses of mathematical errors: A taxonomy. In: ANNUAL MEETING OF THE AMERICAN EDUCACIONAL RESEARCH ASSOCIATION, 1989, San Francisco, CA. **Proceedings** ... San Francisco, CA: American Educacional Research Association, March 1989, p. 27-31.

______. **Reconceiving mathematics instruction:** a focus on errors. Norwood, NJ: Ablex Publishing Corporation, 1996.

CORNU. B. Limits. In: TALL, D. **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991, p. 153-166.

CURY, H. N. **Análise de erros em demonstrações de geometria plana**: um estudo com alunos de 3º grau. 1989. 120 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

______. **Erros em soluções de problemas de cálculo diferencial e integral**: análise, classificação e tentativas de superação. Porto Alegre: PUCRS, Instituto de Matemática, 1990. Relatório de pesquisa.

______. **As concepções de matemática dos professores e suas formas de considerar os erros dos alunos**. 1994. 276 f. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

______. **Análise de erros**: o que podemos aprender com as respostas dos alunos. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

CURY, H. N.; CASSOL, M. Análise de erros em Cálculo: uma pesquisa para embasar mudanças. **Acta Scientiae**. v. 6, n.1, p. 27-36, jan/jun. 2004.

DOMINGOS, A. M. **Compreensão de conceitos matemáticos avançados**: a matemática no início do superior. 2003. 407f. Tese (Doutorado em Ciências de Educação). Universidade de Nova Lisboa, Lisboa.

DREYFUS, T. Advanced mathematical thinking processes. In: TALL, D. **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht: Kluwer Academic Publischers, 1991, p. 25-41.

FLICK, Uwe. **Uma introdução à pesquisa qualitativa**. Tradução de Dandra Netz. 2 ed. Porto Alegre: Bookman, 2004, 312p.

GARZELLA, F. A. C. **A disciplina de Cálculo I:** análise das relações entre as práticas pedagógicas do professor e seus impactos nos alunos. 2013. 275 f. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

GUZMÁN, M.; HODGSON, B. R.; ROBERT, A.; VILLANI, V. Difficulties in the passage from secondary to tertiary education. In: INTERNATIONAL CONGRESS OF MATHEMATICIANS, 1998, Berlin. **Proceedings Extra Volume ICM III** ... Berlin: ICM, p. 747-762.

HITT, F.; CORTÉS, J.C. **Dificultades em el aprendizaje del cálculo**. Reflexiones sobre el aprendizaje del cálculo y su ensenanza. México: Ed. Morevallado. 2005.

LEITHOLD, L. **Cálculo com geometria analítica**. São Paulo: Harbra, 1994.

MURILLO, R. E. P. **Procesos de construcción del concepto de limite em un ambiente de aprendizaje cooperativo, debate científico y autorreflexión**. 2004. 354 f. (Tesis Doctorado) Centro de Investigación y de Estudios Avanzados Del IPN, Departamento de Matemática Educativa, Unidad Distrito Federal de México, Distrito Federal.

NASSER, L.; SOUSA, G.; TORRACA, M. A. A transição do ensino médio para o superior: como minimizar as dificuldades em cálculo? In: V SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Petrópolis, Rio de Janeiro, 2012. **Anais**... Petrópolis, Rio de Janeiro: SBEM, 2012, p. 1-18. Disponível em: <https://goo.gl/Q4sG9z>.

PINTO, N. B. **O erro como estratégia didática no ensino da matemática elementar**. 1998. 147f. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo.

REIS, F.S. **A tensão entre rigor e intuição no ensino de Cálculo e Análise:** a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos. 2001. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação. Campinas.

REZENDE, W. M.. **Uma análise histórica-epistêmica da operação limite**. 1994. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Santa Úrsula, Rio de Janeiro.

______. **O ensino de Cálculo:** dificuldades de natureza epistemológica. 2003. 450f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática). Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo.

ROCHA, M. M. **Releitura do processo de aprendizagem de estudantes repetentes de Cálculo I**. 2016. 246f. Tese (Doutorado em Educação). Programa de Pós-Graduação em Educação, Centro de Educação, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória.

SANTOS, V. M. P. dos **Avaliação de aprendizagem e raciocínio em matemática**: métodos alternativos. Rio de Janeiro: Projeto Fundão, Instituto de Matemática, UFRJ, 1997.

SKEMP, R. R. Relational understanding and instrumental understanding. **Mathematics Teaching**, 77, 1976, p. 20-26.

TALL, D.; VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. **Educational Studies in Mathematics**, v. 12, 1981, p. 151-169.

RECEBIDO EM: 13 jun. 2017.
CONCLUÍDO EM: 29 ago. 2017.