VIDYA, v. 37, n. 2, p. 417-434, jul./dez., 2017 - Santa Maria, 2017. **ISSN** 2176-4603

UTILIZANDO O GEOGEBRA PARA A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE INTEGRAL DE RIEMANN NO ENSINO DE ANÁLISE REAL

USING GEOGEBRA FOR THE CONSTRUCTION OF THE CONCEPT OF RIEMANN INTEGRAL IN TEACHING REAL ANALYSIS

JOÃO LUCAS DE OLIVEIRA*
FREDERICO DA SILVA REIS**

RESUMO

Este artigo apresenta uma pesquisa realizada sobre as contribuições da utilização do *software* GeoGebra aos processos de ensino e aprendizagem de Integral de Riemann em disciplinas de Análise Real, oferecidas em cursos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática. A fundamentação teórica se deu em pesquisas sobre Processos do Pensamento Matemática Avançado, Rigor e Intuição no Ensino de Cálculo e Análise. A pesquisa foi de cunho qualitativo, sendo um estudo de caso, pois se buscou a compreensão de professores de duas universidades federais do estado de Minas Gerais. Foram elaboradas e avaliadas atividades de exploração visual e numérica relacionadas ao conceito de Integral de Riemann. Os resultados apontaram que a utilização do *software* GeoGebra contribuiu para uma possível discussão entre professores e alunos no que tange à construção e ressignificação do conceito de Integral de Riemann na Análise e/ou na transição entre o Cálculo e a Análise.

Palavras-chave: GeoGebra. Integral de Riemann. Ensino de Análise Real. Educação Matemática no Ensino Superior.

ABSTRACT

This paper presents a research carried out on the contributions of the use of the GeoGebra software to the teaching and learning processes of Riemann Integral in Real Analysis disciplines offered in graduation and bachelor degree courses in Mathematics. The theoretical foundation was given in researches on Processes of Advanced Mathematical Thinking, Rigor and Intuition in Teaching Calculus and Analysis. The research was qualitative, being a case study, because it was sought the understanding of professors of two federal universities of the state of Minas Gerais. Visual and numerical exploration activities related to the concept of Riemann Integral were elaborated and evaluated. The results showed that the use of the GeoGebra software contributed to a possible discussion between teachers and students regarding the construction and re-signification of the Riemann Integral concept in the Analysis and/or transition between Calculus and Analysis.

Keywords: *GeoGebra. Riemann Integral. Teaching Real Analysis. Mathematics Education in Higher Education.*

* Instituto Federal do Espírito Santo. E-mail: joaolucasoliver@gmail.com
** Universidade Federal de Ouro Preto. E-mail: fredsilvareis@yahoo.com.br

INTRODUÇÃO

Para muitos estudantes de graduação em Matemática, o primeiro contato com a disciplina de Análise se insere no meio ou no final do curso. Tal disciplina é precedida de situações já vivenciadas pelos discentes nos Cálculos nos quais, equivocadamente, alguns professores transpõem didaticamente suas metodologias baseadas apenas numa crença de que devem se basear somente na intuição (em relação ao Cálculo) e somente no rigor (em relação a Análise) e, com isso, não observam uma complementariedade desses dois aspectos.

Em geral, os alunos apresentam muitas dificuldades ao iniciarem sua primeira disciplina de Análise, principalmente por esta tratar de abordagens excessivamente formais. Aqui, os teoremas e os conceitos ganham outra notoriedade, em relação a como são apresentados no Cálculo. Lá, os estudantes são acostumados com processos e manipulações algébricas (geométricas), objetivando apenas uma resposta final. Grande parte dos alunos não se preocupa com a significação dos conceitos, aspecto relevante na aprendizagem de Análise. Em determinados momentos no ensino de Análise, alguns professores costumam adotar posturas privilegiadas do rigor (formalista, simbólico-proposicional) em relação à intuição (imagens visuais, argumentações descritivas), não oportunizando a percepção visual dos estudantes em muitos casos e limitando-os na construção dos conceitos. Nessa difícil tarefa que cabe ao professor, Pinto (1998) afirma: "O ensino de Análise Matemática tem demonstrado ser uma tarefa difícil. Estando no centro vital da transição dos estudantes do pensamento elementar para o pensamento avançado em Matemática, demandas conceituais são colocadas aos estudantes, como aquelas preocupadas com definições formais e prova formal" (PINTO, 1998, p. 293).

Por outro lado, Amorim e Reis (2013) destacam a dificuldade da tarefa de se ensinar Análise por demandar dos professores uma reflexão sobre seus objetivos e metodologias. Os pesquisadores ressaltam a importância do planejamento da disciplina para o curso de Licenciatura em Matemática, uma vez que a Análise é uma ponte entre a formalização dos conceitos e conteúdos que serão ensinados pelo futuro professor de Matemática dos Ensinos Fundamental e Médio (BRITO, 2010). Assim, Amorim e Reis (2013) destacam:

> A pesquisa mostrou a urgência de se pensar num ensino de Análise que privilegie a aprendizagem dos alunos e não somente a execução de uma sequência de definições, propriedades e teoremas consistentemente elaborada por autores de livros didáticos. Os dados evidenciaram a relevância de um planejamento didático-metodológico realizado/implementado na perspectiva de um ensino para a aprendizagem (AMORIM e REIS, 2013, p. 303).

AS TECNOLOGIAS DIGITAIS NO ENSINO DE ANÁLISE REAL

Numerosas são as pesquisas envolvendo as tecnologias digitais no ensino de Cálculo. Entretanto, são poucas as pesquisas realizadas que relacionam as tecnologias digitais no ensino de Análise. Baroni e Otero-Garcia (2013) após levantamentos de pesquisas em nível nacional, afirmaram não ter encontrado nenhuma pesquisa relacionando tecnologias no ensino de Análise.

Diante desse cenário, nos perguntamos: A utilização de *softwares* no ensino de Análise Real poderia contribuir para a aprendizagem dos alunos?

A utilização de alguns tipos de *softwares* pode significar um rompimento com o ensino de alguns conceitos trabalhados quase que exclusivamente por noções algébricas e simbólicas, dificultando assim, a visualização e a experimentação das atividades. As tecnologias devem objetivar, dentre outras coisas, construir conceitos, fazer Matemática, investigar e significar soluções numéricas. A dinâmica da utilização de um *software* pode motivar o estudante a pesquisar, experimentar e procurar novas soluções relacionadas a um problema. Em particular, em relação ao conceito de Integral, abordado tanto no ensino de Cálculo como no de Análise, o estudante pode elaborar gráficos, partições, realizar cálculo de somas inferiores e superiores, representando-os por meio de um programa. Assim, ele investiga, explora e visualiza.

Entre o meio de aprendizagem formal e rigoroso no qual se encontrava a Matemática do século passado, eis que surge o computador, em particular, os *softwares.* Uma nova maneira / possibilidade de se trabalhar com conceitos abstratos da Matemática. Contudo, isso foi possível, segundo Domingues (2002): "Não há dúvida que a visão formalista da Matemática prevaleceu soberanamente no século XX, mas em meio desse domínio do formalismo, acabou se insinuando no terreno da demonstração matemática, um estranho no ninho, o computador, para o constrangimento dos mais puristas (DOMINGUES, 2002, p. 65).

Com o tempo, as tecnologias educacionais foram ganhando espaço na sala de aula, transformando, em alguns aspectos, o ensino e a aprendizagem. Os alunos, quando direcionados de forma correta, podem atuar como atores em um processo de investigação no qual se estabelecerão novos desafios cognitivos.

PROCESSOS DO PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO

Nos últimos anos, a comunidade da Educação Matemática tem se preocupado com a maneira pela qual estudantes e professores pensam a respeito de objetos matemáticos e suas interrelações no ensino e aprendizagem de Matemática avançada.

Para Tall (1991), a dedução e definição são aspectos presentes no Pensamento Matemático Avançado sendo que, por sua vez, as propriedades de seus objetos são elaboradas a partir de suas definições. Isso diferencia o pensamento avançado do pensamento matemático elementar no qual os objetos são descritos com base em suas propriedades concretas e manipulações experimentais. No entanto, para o autor, esses pensamentos utilizam estruturas cognitivas por meio de um ciclo completo de atividades, nos quais partem de um contexto de um problema conjecturado, objetivando-se chegar a níveis de refinamento e prova.

Ainda em relação às semelhanças e diferenças entre os pensamentos elementar e avançado, Dreyfus (1991) afirma não haver distinção significativa entre esses pensamentos. Para ele, existem tópicos de Matemática elementar que podem ser trabalhados na Matemática avançada, do mesmo modo como assuntos de pensamento avançado podem ser trabalhados com pensamento elementar. Para o pesquisador, o pensamento matemático avançado é subsidiado na interação por diversos processos, dentre eles: representação, visualização, generalização, intuição, classificação, sintetização, abstração, formalização, dentre outros.

Particularmente em relação aos processos de ensino e aprendizagem focados no Pensamento Matemático Avançado, Dreyfus (1991) observa que alguns docentes utilizam-se de aulas "práticas", ou seja, aulas sequenciais de "teorema-prova-aplicação". Ele ressalta que, por um lado, isso acarreta em uma grande quantidade de informação matemática técnica e mecânica aos estudantes, mas por outro, essa sequência não oportuniza os alunos a pensarem nos processos inseridos nas construções teóricas.

Para Dreyfus (1991), os principais processos presentes no pensamento matemático avançado são a representação e a abstração, sendo que os processos que compõe a representação são: representação simbólica, representação mental, visualização, mudança de representações e tradução entre elas, além da modelação.

De especial interesse em nossa pesquisa, a visualização é um dos processos pelos quais as representações mentais podem passar a existir. Segundo o pesquisador, a geração de representações mentais depende dos sistemas de representação, de produções externas, concretas, artefatos que podem ser materialmente percebidas pelo sujeito. Como exemplo, no caso das funções, gráficos são um tipo de artefato, fórmulas algébricas são outro tipo, assim como diagramas e tabelas de valores.

Dreyfus (1991, p. 40) ainda destaca o relacionamento possível entre representação e abstração como os processos de intuir, definir, descobrir, provar, dentre outros. Em particular, para o autor, o processo de intuir passa por "aprender pela intuição, pela cognição direta, sem evidências do pensamento racional" e tem uma importância central em qualquer sequência de processo que inicie do descobrimento.

Assim, caminhamos agora para uma relação presente no desenvolvimento do pensamento matemático avançado que será foco direto da pesquisa a ser apresentada.

RIGOR E INTUIÇÃO NO ENSINO DE CÁLCULO E ANÁLISE

Para Reis (2001), diante da prática pedagógica do ensino de Análise, a transição entre os processos do pensamento matemático elementar para o pensamento matemático avançado nos remete a uma "tensão" entre o rigor axiomático dos resultados e a concepção intuitiva das ideias subjacentes aos conceitos.

Após o período do movimento da Aritmetização da Análise, para Reis (2009) a ideia da "supremacia" da demonstração em Matemática sempre foi questionável, ainda que reflita, nos dias atuais, o pensamento de muitos matemáticos e professores de Matemática quanto à dicotomia entre a clareza do rigor e a intuição dos sentidos. Por outro lado, o pesquisador argumenta que tal distinção entre intuição e rigor no ensino de Cálculo e Análise é inaceitável quando é concebida de forma simplista, como "se a intuição estivesse para o Cálculo, assim como o rigor está para a Análise".

Objetivando uma discussão, caracterização e significação acerca dos aspectos intuitivos e rigorosos do ensino de Cálculo e Análise e também da forma com que essa relação dialética caminha lado a lado, complementando-se e inserindo-se nos processos de ensino e aprendizagem na formação do professor de Matemática, Reis (2001) apresentou cinco categorias de intuição (empírica, objetiva, lógica, categórica e conceitual) e os significados de intuição e rigor visando uma relação complementar entre esses processos no ensino. Para iniciar essa discussão, o pesquisador questiona a existência de um processo intuitivo no ensino do Cálculo e da mesma forma, indaga em relação à existência de um processo rigoroso no ensino de Análise.

Por fim, nessa relação entre os tipos de intuições, o pesquisador indica a necessidade de uma convergência na busca de caracterizações do ensino e aprendizagem do Cálculo e da Análise (REIS, 2001). Para Reis (2001, p. 74) essa convergência baseia-se no fato de que a intuição "é um conhecimento claro e imediato e, portanto, não podemos deixar de analisar os limites e possibilidades desse conhecimento". Para o pesquisador a intuição sempre estará presente na produção do conhecimento matemático, alterando de patamar e futuramente, transformando-se em um processo mais rigoroso. Assim, Reis (2001) defende a presença da intuição nos processos de ensino e aprendizagem tanto do Cálculo como da Análise.

Uma ponte se faz necessária entre os conhecimentos "intuitivos" advindos do Cálculo até os procedimentos "rigorosos" buscados para a Análise. Com isso, não seria possível deixar de considerar as ideias intuitivas e criativas do Cálculo na construção da Análise (REIS, 2001).

Entretanto, uma visão única e dicotômica do ensino de conceitos como limites, derivadas e integrais como sendo apenas "intuitivo" no Cálculo e, na Análise, como sendo o estudo "rigoroso" desses conceitos, não garante uma visão holística e complementar entre rigor e intuição aplicados na formação de professores de Matemática. Por isso, Reis (2009) afirma que:

> Um professor universitário com tal visão dicotômica tende a realizar uma transposição didática nos mesmos moldes, com a qual não podemos concordar. Isso porque acreditamos que rigor e intuição caminham juntos, tanto no Cálculo como na Análise e, ambos têm papéis igualmente importantes e complementares na formação dos pensamentos / conhecimentos diferencial, integral e analítico, tanto para um professor de Matemática quanto para um matemático (REIS, 2009, p. 89).

Ainda nessa busca por caracterizações no ensino, agora em relação ao rigor, Reis (2001, 2009) o concebe como um processo de conceptualização de intuições e questiona a ideia de que o rigor é um imperativo do trabalho matemático.

Do ponto de vista pedagógico, Reis (2001, 2009) acredita que essas observações são extremamente relevantes ao ensino, em particular, quando questionam-se as vantagens que esse rigor proporciona ao ensino de Análise. Para o pesquisador, algumas questões no ensino dessa disciplina podem ser levantadas partindo-se de significados em que o rigor é "o último ponto a que pode chegar alguma coisa". Diante disso, Reis (2009, p. 91) questiona: "O que significa se pautar pelo rigor no ensino de Análise?"

Devemos considerar que o rigor se dá em níveis e como os professores de Análise desejam atingir esses níveis, sem que se percam o sentido e a real compreensão das ideias matemáticas. Assim, para Reis (2001):

> É inadmissível separar intuição e rigor no ensino de qualquer conceito matemático. Igualmente inaceitável seria associar ao ensino de Cálculo, uma abordagem essencialmente intuitiva e ao ensino de Análise, uma abordagem essencialmente rigorosa. (REIS, 2001, p. 79)

Portanto, os diversos processos subjacentes à construção do pensamento matemático avançado, com destaque para a relação entre rigor e intuição no ensino de Análise, serviram de suporte teórico para a análise da pesquisa que será detalhada a seguir.

A PESQUISA REALIZADA

Inicialmente, justificamos nossa escolha pelo tópico Integral de Riemann pelo fato da integral possuir vários significados, segundo Crisostomo (2012), que distinguiu oito tipos de "configurações" da Integral de Riemann: intuitiva (com destaque para o conceito de área de figuras planas entre curvas), primitiva (com destaque para o Teorema Fundamental do Cálculo e as integrais indefinidas), geométrica (com destaque para áreas de regiões planas, Somas de Riemann e áreas de retângulos), somatória (com destaque para a formalização do conceito de Integral a partir do conceito de limite de Somas de Riemann), aproximada (com destaque para a ideia de integração numérica por meio do uso de métodos numéricos aproximados), extramatemática (com destaque para conceitos relacionados às áreas de aplicação da Integral), acumulada (com destaque para a dedução da Integral Definida, caracterizando-a como uma variação acumulada) e tecnológica (com destaque para o uso das tecnologias na resolução de problemas matemáticos por meio da Integral).

Assim, as discussões travadas até aqui nos permitiram elaborar a seguinte questão de investigação: Quais são as contribuições da utilização do GeoGebra para a construção do conceito de Integral de Riemann no ensino de Análise Real, à luz dos processos do Pensamento Matemático Avançado e da relação entre rigor e intuição?

Nossa opção pelo GeoGebra se deu por se tratar de um *software* livre, com uma interface amigável, que possibilita trabalhar de forma conjunta as representações algébrica e geométrica, além de fornecer ferramentas interessantes para uma exploração dinâmica de conteúdos de Integral de Riemann, como Somas Inferiores, Somas Superiores, Integral Inferior e Integral Superior.

Decidimos pela abordagem qualitativa em nossa pesquisa, com a finalidade de compreender como um grupo de pessoas age e pensa sobre determinados / diferentes assuntos e ambientes. Assim, para Goldenberg (2004, p. 14), o alvo principal da pesquisa qualitativa é: “A preocupação do pesquisador não é com a representatividade numérica do grupo pesquisado, mas com o aprofundamento da compreensão de um grupo social, de uma organização, de uma instituição, de uma trajetória, etc” (GOLDENBERG, 2004, p. 14).

Já o estudo de caso objetiva fundamentalmente compreender um caso específico, ou seja, perseguir um conhecimento profundo sobre um determinado indivíduo, instituição, sistema de ensino, grupo de professores ou unidade-caso. Nessa abordagem metodológica, as principais características de cada unidade-caso, evidenciam-se por meio de sua identidade e suas características. Em consequência disso, na busca por essência e compreensão global, o estudo de caso possui uma característica particular, visto a suposição de cada situação específica ser única e especial (PONTE, 2006).

Em particular, no campo de pesquisa da Educação Matemática, o estudo de caso tem sido utilizado em questões acerca da formação de professores, aprendizado dos alunos, propostas curriculares, prática profissional docente, programas de formação inicial e continuada dos professores, etc (PONTE, 2006).

Em nossa pesquisa, procuramos utilizar o estudo de caso a fim de compreender a unicidade de cada situação, de modo que possamos entender as diversas problemáticas em seu determinado contexto e, assim, desenvolver uma possibilidade pedagógica para os professores de Análise Real.

Nossa pesquisa também se enquadrou em um estudo de caso, uma vez que os sujeitos de pesquisa foram quatro professores universitários de Matemática que compuseram nossa unidade--caso. Assim, nossa abordagem metodológica visou compreender de uma maneira mais aprofundada suas visões e impressões a partir da realização das atividades de pesquisa (que serão devidamente apresentadas a seguir), coadunando com Ponte (2006) ao defender que um estudo de caso é um tipo de investigação qualitativa que se caracteriza por analisar uma situação, um fenômeno ou uma problemática para “descobrir a sua essência e contribuir para a sua compreensão global”.

Podemos, então, pensar em nossa pesquisa como um “experimento de ensino”, cujo termo remete aos encontros do pesquisador com os sujeitos, onde os pesquisadores buscam uma forma estrutural de como os sujeitos estão pensando ao longo do processo de pesquisa. Tal investigação é guiada pelo pesquisador como assistência necessária aos sujeitos (STEFFE e THOMPSON, 2000).

A pesquisa de campo foi realizada no mês de dezembro de 2015, com dois professores do Departamento de Matemática da UFJF - Universidade Federal de Juiz de Fora e dois professores do Departamento de Matemática da UFOP - Universidade Federal de Ouro Preto.

Esses professores foram por nós convidados a participar de nossa pesquisa. Após detalharmos seus objetivos e instrumentos, todos eles aceitaram o convite. É importante ressaltar que a escolha desses participantes foi uma “amostra intencional”, devido a suas experiências no ensino de disciplinas do Ensino Superior, destacadamente Cálculo e Análise, seus currículos e outras particularidades, visando nos ajudar na compreensão dos fatos da pesquisa. Destacamos que todos possuíam formação acadêmica com Doutorado nas áreas de Matemática Pura (dois professores), Matemática Aplicada (um professor) e Educação Matemática (um professor).

Por questões éticas de pesquisa, os professores da UFJF foram denominados como Dupla da UFJF composta pelos participantes codificados como JF_1 e JF_2. Por outro lado, a Dupla da UFOP foi composta pelos participantes codificados como OP_1 e OP_2. Também nos identificaremos, de agora em diante, simplesmente como pesquisadores.

AS ATIVIDADES DE EXPLORAÇÃO VISUAL E NUMÉRICA

Optamos por elaborar e propor atividades exploratórias tendo em vista que, embora o elemento desencadeador da exploração seja mais dirigido, esse tipo de exploração leva à elaboração de conjecturas, visando à produção do conhecimento matemático.

As atividades foram pensadas para serem executadas por professores e alunos, simultaneamente, em um ambiente de sala de aula e/ou laboratório de informática. Esses momentos ocorreriam após uma exposição da teoria em aula presencial e, em seguida, com a exploração das atividades com o computador, relacionando os momentos da exposição da teoria no quadro e as possibilidades que o *software* pudesse proporcionar para o professor e alunos na construção do conceito de Integral de Riemann. Como suporte do ensino para a teoria de Integral na Análise, utilizamos o livro *Curso de Análise*, Volume 1 (LIMA, 2009).

As atividades foram desenvolvidas pelas duplas em Laboratórios de Informática da UFJF e da UFOP, nos quais havia sido instalado o *software* GeoGebra. Dada nossa crença na utilização das tecnologias como um fator importante na produção do conhecimento, as atividades exploratórias foram desenvolvidas de modo a possibilitar aos docentes explorarem, por meio do GeoGebra, os conceitos relacionados à Integral de Riemann na Análise Real, obtendo um fazer matemático. Entretanto, ressaltamos que a proposta dessas atividades não são restritas ao *software,* pois acreditamos na integração / complementação de outras mídias, como lápis, papel e quadro, nesse fazer matemático.

No total, elaboramos quatro atividades, todas relacionadas à Integral Inferior e à Integral Superior de funções, denominadas de:

- Atividade 1: Integral Inferior e Superior da “Função Quadrática”,
- Atividade 2: Integral Inferior e Superior da “Função Cúbica”
- Atividade 3 - Integral Inferior e Superior da “Função Escada”
- Atividade 4 - Integral Inferior e Superior da “Função de Dirichlet”

Ressaltamos que todas as atividades estão detalhadas e analisadas em Oliveira (2016); entretanto, por uma questão de recorte de pesquisa, escolhemos para detalhar no presente trabalho, apenas a Atividade 1 que, exatamente por ser a primeira, apresentou discussões bastante profícuas pelos participantes.

INTEGRAL INFERIOR E SUPERIOR DA "FUNÇÃO QUADRÁTICA"

Essa primeira atividade possuiu como objetivo obter as Somas Inferiores e Superiores da "Função Quadrática", a partir dos gráficos construídos no GeoGebra, intuir os valores da Integral Inferior e Integral Superior e, por último, concluir se a função em questão é integrável a Riemann.

Para Lima (2009), os conceitos subjacentes relacionados à Integral de Riemann podem ser motivados pela noção de área. Para que ocorra essa relação, Lima (2009) concebe a função $f: [a, b] \rightarrow R$, admitindo por simplicidade $\mathrm{f(x)} \geq 0; \forall x \in [a, b]$. Adota ainda o conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}\ X\ \mathbb{R}; a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ como sendo a "área", um numero real a ser calculado. Observemos posteriormente que uma das nossas outras atividades adota $f(x) \leq 0$ em determinado intervalo.

Segundo o autor, o supremo das áreas dos polígonos contidos em A é definido como área interna do conjunto A. Por outro lado, o ínfimo das áreas dos polígonos que contêm A, é definido como área externa de A. A área do conjunto A será definida quando tivermos áreas internas e externas iguais.

Intuitivamente, poderíamos pensar que as áreas desses polígonos poderiam ser tomadas por falta ou excesso em relação a área do conjunto A.

Mais formalmente, Lima (2009) afirma que esses polígonos geram uma decomposição do intervalo [a,b] em outros subintervalos. Assim, para Lima (2009), considerando f uma função limitada num intervalo fechado / compacto [a,b], uma partição do intervalo [a,b] é "um subconjunto finito $P \subset [a, b] tal\ que\ a \in P\ e\ b \in P$". Quando tomamos $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ convencionaremos que $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$, nos quais os intervalos $[t_{i-1}\, t_1]$, $i = 1, \dots, n$ são definidos como intervalos da partição. Com isso, para cada $i = 1, \dots, n$ tomaremos $m_i\ e\ M_i$ como ínfimo e supremo, respectivamente, como valores de f no intervalos da partição. Dessa maneira, para Lima (2009), as somas superiores e inferiores de f em relação a partição P, são definidas como:

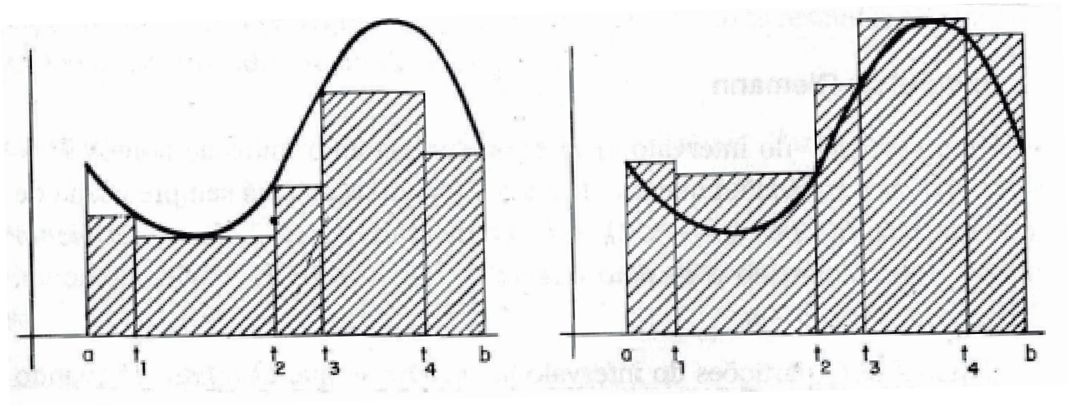
$$s(f; P) = m_1(t_1 - t_0) + \cdots + m_n(t_n - t_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1})$$

$$S(f; P) = M_1(t_1 - t_0) + \cdots + M_n(t_n - t_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1})$$

Observamos que, em nossa redação, procurarmos utilizar as seguintes notações para Somas Superiores e Inferiores: S_{sup} e S_{inf}. Além disso, tomamos a partição P como invariável, ou seja, fixamo-la nos valores de a e b e não particionamos / refinamos o intervalo [a,b]. Tal posição justifica-se por trabalhar determinados conceitos relacionados à Integral de Riemann.

Considerando f uma função positiva, para todo x pertencente ao intervalo [a,b], segundo Lima (2009, p. 305), as somas inferiores e superiores "podem ser interpretadas como áreas de polígonos, um inscrito e outro circunscrito ao gráfico de f, respectivamente e, portanto, como valores aproximados (por falta e por excesso) da área compreendida entre esse gráfico e o eixo das abscissas”, como mostra a figura a seguir.

Figura 1 - Soma Superior e Inferior.



Fonte: Lima (2006), p. 120.

Caso f seja negativa nesse mesmo intervalo, essas somas serão valores aproximados de tal área, com o sinal trocado.

Intuitivamente, poderíamos pensar a Integral Inferior de f como a “área interna” do conjunto A e a “área externa” de A, como sendo a Integral Superior de f. Contudo, mais formalmente, Lima (2009) define a Integral Inferior e Integral Superior, respectivamente, como:

$$\underline{\int}_{a}^{b} f(x)dx = \sup s(f;P), \quad \overline{\int}_{a}^{b} f(x)dx = \inf S(f;P)$$

Observa-se que o sup e o inf são tomados em relação a todas as partições P do intervalo [a,b].

Simbolicamente, em nossa redação definimos a Integral Inferior de f no intervalo [a,b] como $\int_{inf}^{\square} f(x)dx$. Analogamente, a Integral Superior será representada como $\int_{\square}^{sup} f(x)dx$.

Segundo Lima (2009), uma função f limitada em um intervalo [a,b] é dita integrável quando:

$$\underline{\int}_{a}^{b} f(x)dx = \overline{\int}_{a}^{b} f(x)dx$$

Particularmente, representaremos do seguinte modo: $\int_{inf}^{\square} f(x)dx = \int_{\square}^{sup} f(x)dx.$.

Com isso, para o caso f(x) ≥ 0, a $\int_{inf}^{\square} f(x)dx$ utiliza-se da área de polígonos contidos em A com aproximações por falta da área de A, enquanto que $\int_{\square}^{sup} f(x)dx$ utiliza área de polígonos que contém A, com aproximações por excesso. Dessa maneira, a $\int_{inf}^{\square} f(x)dx$ é a “área interna” do conjunto A e $\int_{\square}^{sup} f(x)dx$ é a “área externa” do conjunto A. O fato do conjunto A possuir uma área, é o mesmo que afirmar que as aproximações por falta e por excesso possuem o mesmo resultado, isto é, a função f é integrável e a área será igual a $\int_{a}^{b} f(x)dx$ (LIMA, 2009).

As características dessa atividade permitiram aos participantes explorarem e criarem alguns comandos do GeoGebra, baseados em uma sequência didática prévia. Entre esses comandos, tivemos: criação de controles deslizantes, definição de base de retângulos, números de retângulos, somas inferiores e superiores. Essa sequência didática pode ser vista no quadro abaixo.

Quadro 1 - Sequência Didática para a Atividade 1.

Sequência Didática:
1) Construa o gráfico da função no GeoGebra: f(x) = Se [-1 <= x <= 1, x^2+1]
2) Caso necessário, ajuste a área de visualização do gráfico para o intervalo [-1,1]
3) Definição de constante: a = -1 e b = 1 (extremidades da partição)
4) Crie um seletor k = [1,10] com incremento 1
5) Definição de constante: n = 2^k (número de retângulos)
6) Definição de constante: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ (base dos retângulos)
7) Definição das Somas Inferiores: S_{inf} = SomaDeRiemannInferior[f, a, b, n]
8) Definição das Somas Superiores: S_{sup} = SomaDeRiemannSuperior[f, a, b, n]

Fonte: Construção dos autores.

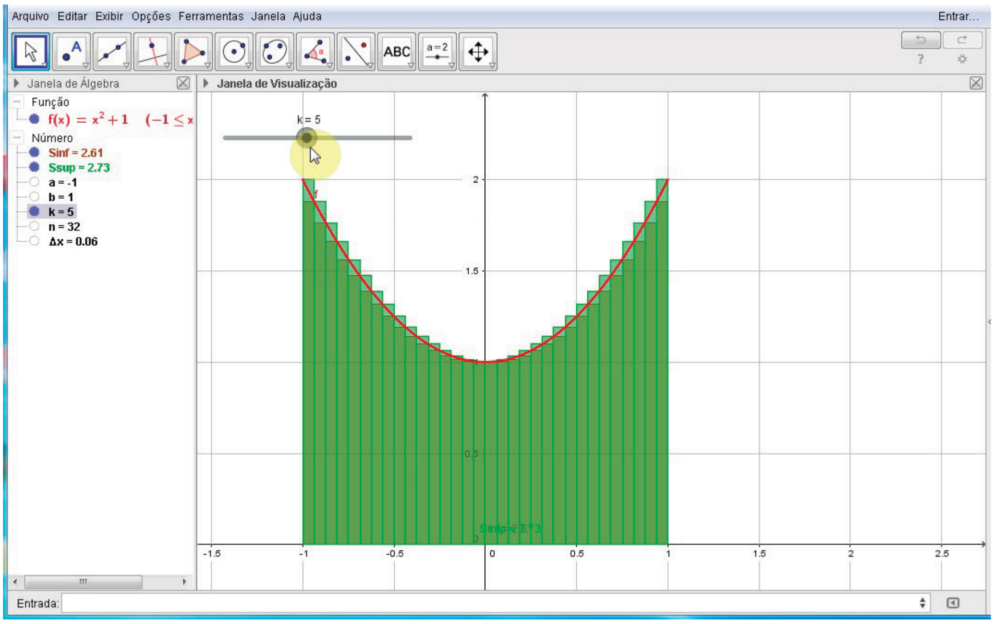
Todas as atividades da pesquisa abordaram intuitivamente a Integral de uma função f como um problema de área abaixo de uma função contínua (descontínua). Essa área terá um valor numérico real de f, onde f é uma função contínua (descontínua) definida num intervalo I fechado, com extremos a e b: I = $[a,b] \subset R$. O intervalo é seccionado em 2^n partições regulares $P_{0 \le i \le n} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ com $i \in \{0,1,2 \dots, n\}$; $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Com isso, teremos uma série de retângulos inscritos e circunscritos na região sob o gráfico da função f, com extremos a e b. Observamos que os valores de x pertencem ao conjunto dos números reais.

À medida em que o valor de k se alterava no intervalo de [1,10], era possível perceber o aumento do número n de retângulos. Com o aumento do valor de n, a base de cada um dos retângulos tendia a zero, particionando os (sub)intervalos em valores infinitesimais de comprimento $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

Ao fixarmos valores para a = -1 e b = 1, optamos por uma partição com extremidades não--variáveis.

A partir da execução desses comandos no GeoGebra, os participantes da dupla da UFJF plotaram o gráfico da função *f(x)* = x^2 + 1, conforme podemos verificar na figura a seguir.

Figura 2 - Somas Superiores e Inferiores para a Função Quadrática (Dupla UFJF).



Fonte: Construção dos autores.

Desse modo, após o experimento com k variando no intervalo de [1,5], os participantes observaram por meio da Figura 2 uma possível convergência entre as Somas Superiores e Inferiores, além de um comportamento dos retângulos próximos ao eixo Y. Ao serem incentivados pelo pesquisador a observarem os valores já com k = 5, os participantes afirmaram:

> Perto da origem, o comportamento é melhor ainda [...] a aproximação aqui próximo da origem está melhor que nas extremidades, está mais suave [...] se você pegasse um intervalo menor, a coisa começaria a acontecer bem antes [...] acontece que a função cresce quadraticamente. (JF_2, Atividade 1, dezembro de 2015)

À medida em que os valores de k variavam no intervalo [1,10], os participantes preenchiam os quadros abaixo com os valores das Somas Inferiores (S_{inf}) e Superiores (S_{sup}) para os arredondamentos das casas decimais com duas e três casas, respectivamente.

Quadro 2 - Somas Inferiores e Superiores com arredondamento de duas casas decimais para a Função Quadrática (Dupla UFJF).

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
S_{inf}	2	2,25	2,44	2,55	2,61	2,64	2,65	2,66	2,66	2,66
S_{sup}	4	3,25	2,94	2,8	2,73	2,7	2,68	2,67	2,67	2,67

Fonte: Construção dos autores.

Quadro 3 - Somas Inferiores e Superiores com arredondamento de três casas decimais para a Função Quadrática (Dupla UFJF)

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
S_{inf}	2,4	2,25	2,438	2,547	2,605	2,636	2,651	2,659	2,663	2,665
S_{sup}	4	3,25	2,937	2,797	2,73	2,698	2,682	2,674	2,671	2,669

Fonte: Construção dos autores.

Logo após uma breve discussão em relação aos valores de S_{inf} e S_{sup} que se alternavam não monotonamente para alguns valores de k com duas e três casas decimais, a dupla da UFJF afirmou acreditar, intuitivamente, que com dez casas decimais os valores das somas tendem a se estabilizar na dízima periódica 2,666... Para isso, manipularam o *software* e ressalvaram tal valor para determinada função, como vemos a seguir:

> Eu não sei se só com dez casas iria se estabilizar. Tende. A gente tem quer apostar. Poderia, eu não sei [...] (JF_2, Atividade 1, dezembro de 2015)
>
> [...] Por que tem aproximações na última casa decimal, não é? (Pesquisadores, Atividade 1, dezembro de 2015)
>
> Exatamente. (JF_2, Atividade 1, dezembro de 2015)
>
> [...] Qual outra possibilidade que o aluno poderia fazer? Ir lá e colocar a de dez? (Pesquisadores, Atividade 1, dezembro de 2015)
>
> Com certeza. (JF_2,Atividade 1, dezembro de 2015)
>
> A gente pode fazer. (JF_1, Atividade 1, dezembro de 2015)
>
> Para esse exemplo, eu concordo com você que a gente tem um crescimento quadrático, mas dependendo da função que você pegar, isso não vai acontecer. (JF_2, Atividade 1, dezembro de 2015)

Tal dizima periódica pode ser comprovada pelo valor da integral da função f no intervalo [-1,1] cuja fração geratriz seria $\frac{8}{3}$. Concluíram também que, a partir dos valores para $\int_{inf}^{\square} f(x)dx = \int_{\square}^{sup} f(x)dx = 2,66$ que, com isso a função $f(x) = x^2 + 1$ é integrável a Riemann, segundo a definição de função integrável (LIMA, 2009).

Já a dupla da UFOP observou que as diferenças de valores para S_{inf} e S_{sup} em relação à variação de k no intervalo [1,10] para duas, três e dez casas decimais tendem a uma possível convergência desses valores para a área da função f. Dessa maneira, eles destacaram:

> Se a quantidade de k é pequena, a diferença é pequena, ou quase não têm, mas quanto maior o k, aqui vai ficando mais próximo. (OP_2, Atividade 1, dezembro de 2015)
>
> Vai ficando 2,666[...] (OP_1, Atividade 1, dezembro de 2015)
>
> A diferença tende a ser cada vez menor e, tanto, S_{inf} quanto S_{sup} parecem convergir para 2,666[...] (OP_2, Atividade 1, dezembro de 2015)

Assim, analogamente à dupla da UFJF, os participantes concluíram que a função f é integrável no intervalo [-1,1], pois os valores de $\int_{inf}^{\square} f(x)dx$ e $\int_{\square}^{sup} f(x)dx$ são iguais.

ANÁLISE DAS ATIVIDADES EXPLORATÓRIAS

Após a realização das atividades pelas duplas de professores, realizamos uma entrevista semiestruturada com cada dupla, a respeito das quatro atividades exploratórias descritas anteriormente, baseando-nos nos seguintes itens do roteiro da entrevista semiestruturada:

- Avaliação das atividades exploratórias de forma guiada em relação à contribuição para a visualização e conjecturação dos conteúdos de Integral de Riemann;

- Tópicos de Integral de Riemann explorados nas atividades nos quais a utilização do GeoGebra contribuiu para uma aprendizagem de forma mais significativa.

Lembramos que tais atividades foram planejadas com o propósito de serem executadas / aplicadas a professores e estudantes em momentos distintos que requerem o uso das diversas mídias presentes, conjuntamente com salas de aula e/ou laboratórios de informática. Inerentemente a isso, ressaltamos a importância das experiências docentes em Cálculo e Análise dos participantes, bem como suas concepções do uso do *software* destinado à exploração das quatro atividades com discentes.

Assim, o participante JF_2 da UFJF destacou algumas limitações do *software* quanto à exploração da Atividade 4 relacionada à clássica Função de Dirichlet (definida por f(x) = 1 se x é irracional e f(x) = 0 se x é racional), abrindo possibilidades para uma discussão e avanço da teoria matemática entre professores e alunos:

> A ferramenta gráfica aqui funciona maravilhosamente bem e defendo que deve ser explorado. Mas não podemos tapar o sol com a peneira [...] estou dizendo: só funciona na prática, nas coisas bem comportadas [...] o lado que fica interessante para Riemann, você começa a ter uma limitação do *software* [...] O que eu acho legal pra um curso é discutir a limitação de quando o *software* falha. Mostra que não consigo. E ainda tem uma situação que é mais delicada. Eu queria que você pegasse aquele exemplo ali (Atividade 4), por que aquela função sua é Lebesgue-integrável. Usa o mesmo argumento, a mesma atividade e convence o cara agora que ela é integrável. Você tem coisinha pra cima e pra baixo. Agora convence que aquilo é integrável a Lebesgue. Seu exemplo vai falhar, por que aquilo vai dar uma linha em cima e embaixo. E agora? [...] aquilo vai dar problema [...] aquilo ali te dá uma intuição. O que é bacana, eu defendo. Não descarto aquela atividade, mas eu acho que você, durante

> a atividade, tem que deixar claro que aquilo não é a função de Dirichlet [...] de certa forma acho que a Matemática poderia explorar muito bem isso, as limitações. (JF_2, entrevista, dezembro de 2015)

De qualquer forma, ressaltamos a importância dessa atividade na busca do diálogo com a teoria, por possibilitar possíveis discussões entre professores e estudantes na questão conceitual e o avanço da teoria a ser trabalhada em algum momento das aulas, paralelamente com outras mídias, como por exemplo, lápis, quadro e papel.

O participante JF_1 concebe os aspectos significativos ao ensino guiado pelas atividades, abrindo possibilidade para discussão entre professor e alunos, de modo a obter a compreensão de sentido por parte dos alunos, oportunizando-os pelo uso de exemplos para futura abstração. Assim, ele retrata:

> Se eu sou o professor e tenho esse livro, e eu estou na lousa e vou dar um exemplo, talvez fosse esse o exemplo que tentaria. Seria x ao quadrado, x ao cubo. Seriam esses exemplos. Eu acho que, nesse caso, a atividade traz um elemento diferente pra aula e ajuda alguns alunos nessa compreensão [...] Na verdade, a ideia é essa, desconstruir algum conceito, construir outro, discutir e chegar à coisa. Você vê a cúbica [...] por que positivo e negativo, já desmistifica o negócio da área [...] já vê numero. Já quebra um pouco essa conceituação. (JF_1, entrevista, dezembro de 2015)

Para iniciar as atividades com uso do GeoGebra, destacamos o fato de uma possível aula introdutória sobre o programa com os alunos, alguns comandos do programa que são necessários para a realização destas atividades. Para a participante OP_1 isso não seria necessário, dada a dinamicidade do GeoGebra nessas atividades e na maneira como elas foram guiadas pela sequência didática inicial. Segundo OP1, o fator visual intuitivo gerado pelo *software* nas atividades possibilitou a construção / conjecturação dos conceitos de Integrais Inferior e Superior a fim de concluir se aquelas funções eram integráveis ou não, de acordo com Lima (2009):

> *Em relação à questão deles saberem até utilizar o software, até não acho problemático, porque se eu nunca tivesse visto o GeoGebra, a gente ia conseguir realizar a atividade normalmente, e os meninos hoje sabem, aprendem muito [...] Deu para enxergar claramente, eu achei muito legal, eu acho que dá para enxergar claramente esse conceito, os conceitos tanto de Integral Superior quanto Inferior e chegou no ponto da definição do que é função integrável. Então, eu acho que deu para visualizar, ajudou sim a visualizar [...] os valores, montar a tabela, a questão do arredondamento também [...] (OP1, entrevista, dezembro de 2015*)

Destacando uma maior dinamicidade do GeoGebra em relação ao uso do quadro tradicional, o participante OP_2 afirma que isso ajuda na compreensão de conceitos por parte dos alunos, principalmente se esses são alunos de Licenciatura. Defende que, para a formação do matemático, talvez esse tipo de atividade não contribua significativamente no sentido dos conceitos matemáticos:

> Por que na verdade é o que você faz no quadro, só que lá você não consegue fazer pra várias, ou pra uma função complicada, se você colocar mais simples, você vai fazer uma partição e no máximo refiná-la uma, duas vezes, diminuindo e tal. Aqui, você tem essa possibilidade de refinar o tanto que você quiser. Você pode refinar mais, ele vai

> conseguir enxergar a questão das áreas. Agora, tem que ver o público, por exemplo, se você pega uma turma já de Bacharelado, eles já estão vendo a coisa mais abstrata, aquele seu desenho ali com aquela partição que você fez no quadro, foi suficiente, já foi embora [...] (OP_2, entrevista, dezembro de 2015)

> Mesmo na Atividade 4, que é a possibilidade de se falar na Integral de Lebesgue, serem discutidos outras definições e conceitos? (Pesquisadores, entrevista, dezembro de 2015)

> Não, ai sim, ele (o aluno do Bacharelado) pode pensar nisso, mas assim, o perfil dele não é um perfil de buscar esse tipo de atividade. Ele é um aluno que já abstrai mais. Ele não está nem aí para que serve [...] ele quer usar épsilon e delta, ele quer dado épsilon, encontrar o delta [...] agora para o aluno da Licenciatura, o uso do GeoGebra seria algo muito positivo. (OP_2, entrevista, dezembro de 2015)

Acreditamos que essa concepção se relaciona parcialmente com as ideias de Soares, Ferreira e Moreira (1997) no que tange a uma exigência de, na formação do professor do Ensino Básico, buscar-se uma compreensão dos significados dos conceitos matemáticos. Em caráter complementar, na formação do matemático, defendemos uma ressignificação por parte dos professores juntamente aos alunos nos processos de ensino e aprendizagem, possibilitando uma discussão e, em alguns momentos, a possibilidade de aprofundamento da teoria acerca de conceitos trabalhados, com a ajuda do *software* (TALL, 1993, 2000).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

À guisa de conclusão, apresentaremos agora algumas contribuições da utilização do GeoGebra para a construção do conceito de Integral de Riemann no ensino de Análise Real, à luz dos processos do Pensamento Matemático Avançado e da relação entre rigor e intuição.

Para tal, elencaremos as contribuições relacionando-as a três categorias / eixos de análise, sendo que as duas primeiras surgiram de um contraste com nosso referencial teórico adotado e a terceira categoria se configurou como emergente aos dados advindos das atividades exploratórias elaboradas e avaliadas e também das entrevistas semiestruturadas realizadas com os participantes da pesquisa.

1. As relações entre Rigor e Intuição

Essa categoria de análise apontou para uma contribuição dos aspectos intuitivos na construção de alguns conceitos oriundos das explorações das atividades, abrindo-se assim, algumas possibilidades de serem trabalhados rigorosamente conceitos subjacentes à Integral no ensino de Análise Real. Logo, conceitos trabalhados anteriormente no Cálculo podem ser retomados em Análise, visando à construção rigorosa do conceito de Integral de Riemann.

Além disso, como destacado nas falas dos participantes, pode-se explorar alguns conceitos como a não integrabilidade a Riemann que abre espaço para se motivar o conceito de Integral de Lebesgue.

Outro ponto a ser destacado foram as observações e experimentações, pelos quais os participantes puderam conjecturar os valores de somas superiores e inferiores, relacionando-os sob o ponto de uma verdade passível a demonstração de um teorema e, em um caso, à conclusão lógica por definição.

Assim, acreditamos que, em nossa unidade-caso, o bom uso da inserção do trabalho com a intuição no ensino e aprendizagem de conceitos de Análise, favorece um afloramento de suas categorias, principalmente a intuição visual, em questões a serem submetidas a provas formais. Além disso, um aprofundamento de teorias torna-se possível, relacionando-se o rigor em função das ideias intuitivas visuais e conceituais geradas nesse contexto.

2. Os processos do Pensamento Matemático Avançado

Essa categoria de análise relacionou-se aos processos de ensino e aprendizagem de Cálculo e de Análise, mais especificadamente na abstração / construção do conceito de Integral na Análise, em consonância com o desenvolvimento teórico apresentado por Lima (2009).

Destacaram-se também a possibilidade do entrelaçamento dos processos de intuição e rigor (REIS, 2001, 2009) na via de mão dupla entre o Cálculo e a Análise, inseridos e interrelacionados na ótica de algumas ideias defendidas por Dreyfus (1991) dentro do Pensamento Matemático Avançado.

Especificamente, defendemos o uso das intuições, separadamente ou em conjunto, nos diversos processos do ensino e aprendizagem de Cálculo e de Análise, oportunizando uma interrelação com os aspectos rigorosos desenvolvidos, especialmente na prática do professor de Matemática. Isso coaduna com Dreyfus (1991, p. 40) ao destacar as possíveis relações entre os principais processos com os de: intuir, definir, provar, visualizar, descobrir, entre outros. Defendemos também que, independentemente da formação do aluno, seja ela de Bacharelado ou Licenciatura em Matemática, o entendimento dos conteúdos deve se sobrepor, em grau de importância, ao conhecimento técnico simplista.

Dessa maneira, concordamos com Dreyfus (1991) que os processos de abstração e representação são complementares, sendo que o processo de abstração é construído, a partir do isolamento de certas estruturas do objeto / conceito, observando-se suas propriedades e relações de tópicos em comum, sintetizando os diferentes conceitos que oportunizam a abstração. Ainda segundo o pesquisador, essas abstrações de conceitos ocorrem devido a momentos pedagógicos nos quais ocorre uma discussão entre professor e aluno, em estágios da construção desses conceitos.

3. As contribuições e limitações do *software* GeoGebra

Esta categoria de análise apontou para a possibilidade do uso efetivo de *softwares*, mesmo com suas limitações, na construção de conceitos relacionados à Integral de Riemann. Além disso, oportunizou-se um avanço da teoria, de acordo com o que constatamos na implementação das atividades exploratórias.

Essas atividades, vistas na forma de *applets* no GeoGebra, caracterizaram-se como eficientes no aparecimento de discussões matemáticas acerca do conceito requerido de Integral (TALL, 1986, 2000). Nesse caso, é importante ressaltar que tais contribuições, se trabalhadas de forma inequívoca, podem propiciar o aparecimento de imagens favoráveis à construção de conceitos. Entretanto, o uso do *software* apresentou uma limitação de finitude que pode levar à formação de intuições errôneas. Assim, lembramos a importância do trabalho com representações diversas de um conceito em outras mídias, inclusive lápis, papel, livro, dentre outras que podem contribuir para a construção desse conceito.

Outros pontos a serem destacados foram os significados gerados pelas imagens e quadros em nossa pesquisa. As ideias intuitivas possibilitaram a refutação da ideia única de Integral como área, dada a negatividade do valor das somas em algumas atividades. Ainda nesse viés, acreditamos que a visualização do conceito de somas superiores e inferiores, trabalhados de maneira acumulativa, pode possibilitar a inserção do rigor já no Cálculo, como forma de suavizar uma futura transição para a Análise.

Destacamos que, independente da formação profissional do estudante de Matemática, o ponto chave é a compreensão das ideias inseridas na construção de conceitos, em particular, nos conceitos subjacentes ao de Integral. Para isso, faz-se necessário uma discussão, intermediada por diferentes mídias, sobressaindo a que for mais conveniente no contexto.

Portanto, defendemos o uso intermediado de *softwares* como uma frutífera, inovadora e desafiadora opção pedagógica ao professor de Análise Real.

REFERÊNCIAS

AMORIM, L. I. F.; REIS, F. S. A (Re)construção do conceito de limite do Cálculo para a Análise. In: FROTA, M. C. R.; BIANCHINI, L. B.; CARVALHO, A. M. F. **Marcas da Educação Matemática no Ensino Superior**. Campinas: Papirus, 2013. p. 277-305.

BARONI, R. L. S.; OTERO-GARCIA, S. C. **Análise Matemática no Século XIX**. Campinas: Sbhmat, 2013

BRITO, A. B. **Questionando o Ensino de Conjuntos Numéricos em disciplinas de Fundamentos de Análise Real: Da abordagem de livros didáticos para a sala de aula em cursos de Licenciatura em Matemática**, Dissertação de Mestrado.Programa Profissional de Pós-Graduação em Educação Matemática - Universidade Federal de Ouro Preto-UFOP, Ouro Preto, 2010.

CRISOSTOMO, E. **Idoneidad de procesos de estudio del Cálculo Integral en la formación de profesores de matemática: una aproximación desde las investigaciones en Didáctica del Cálculo y el conocimiento profesional**, 2012. Tese (Doctorado en Didáctica de la Matemática). Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidade de Granada, 2012

DOMINGUES, H. A Demonstração ao Longo dos Séculos. **Boletim de Educação Matemática**, v. 18, p. 55-67, 2002.

DREYFUS, T. Advanced Mathematical Thinking Processes. In: TALL, D. (Ed.). **Advanced Mathematical Thinking**. Londres: Kluwer Academic Publisher, 1991. p. 25-41

GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar:** como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais. Rio de Janeiro: Record, 2004.

LIMA, E. L. **Análise Real:** Funções de Uma Variável Real. 8ª. ed. Rio de Janeiro: IMPA, v. 1, 2006.

LIMA, E. L. **Curso de Análise**. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, v. 1. 431 f. 12. Ed., 2009.

OLIVEIRA, J. L. **A utilização de softwares dinâmicos no Ensino de Análise Real:**, Um estudo sobre a construção do Conceito de Integral de Riemann. Dissertação de mestrado. 141 f. - Universidade Federal de Ouro Preto. UFOP. Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática., Ouro Preto - MG, 2016.

PINTO, M. M. F. **Student's Understanding of Real Analysis**, Tese de Doutorado. University of Warwick. England, 1998.

PONTE, J. P. Estudos de caso em Educação Matemática. **BOLEMA**, v. 25, p. 105-132, 2006. Disponivel em: <https://goo.gl/iehukA>. Acesso em: 12 Janeiro 2016.

REIS, F. S. **A Tensão entre Rigor e Intuição no Ensino de Cálculo e Análise:A Visão de Professores-Pesquisadores e Autores de Livros Didáticos**, 2001. 302f. Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Educação, UNICAMP, Campinas, 2001.

REIS, F. S. Rigor e Intuição no Ensino de Cálculo e Análise. In: FROTA, M. C. R.; NASSER, L. (.). **Educação Matemática no Ensino Superior:** Pesquisas e Debates. Recife: SBEM, 2009. Cap. 5, p. 81-97.

SOARES, E. F.; FERREIRA, M. C. C.; MOREIRA, P. C. Da Prática do Matemático para a Prática do Professor: mudando o referencial da formação matemática do licenciado. **Zetetiké**, Campinas, p. 25-36, v. 5, n. 7, 1997.

STEFFE, L.; THOMPSON, P. W. Teaching experiment methodology: underlying principles and essentials elements. In: LESH, R.; KELLY, A. E. (.). **Research design in mathematics and science education**. Hillsdale: Erlbaum, 2000. p. 267-307.

TALL, D. O. (Ed.) **Advanced Mathematical Thinking**. Londres: Kluwer Academic Publishers, 1991.

TALL, D. O. **Building and Testing a Cognitive Approach to the Calculus Using Interactive Computer Graphics**, 1986. 505 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - University of Warnick, Inglaterra, , 1986.

TALL, D. O. **Biological Brain, Mathematical Mind & Computational Computers (how the computer can support mathematical thinking and learning). In:** ASIAN TECHNILOGY CONFERENCE IN MATHEMATICS, 5, 2000, Chiang Mai. Proceedings…Blakwood: ATCM Inc, 2000. Disponivel em: <https://goo.gl/dfFYQ1>. Acesso em: 3 Abril 2015.

TALL, D. O. **Real Mathematics, Rational Computers and Complex People.** In ANNUAL INTERNATIONAL CONFERENCE ON TECHNOLOGY IN COLLEGE MATHEMATICS TEACHING, 5,1993, Proceedings. Addison-Wesley, p. 243-258. Disponivel em: <https://goo.gl/2WR4Kx>. Acesso em: 17 Abril 2015.

RECEBIDO EM: 02 jul. 2017.
CONCLUÍDO EM: 29 ago. 2017.