VIDYA, v. 37, n. 2, p. 335-354, jul./dez., 2017 - Santa Maria, 2017. **ISSN** 2176-4603

UM MODELO PARA ANALISAR A IMAGEM DO CONCEITO DE ESTUDANTES UNIVERSITÁRIOS: O CASO DOS NÚMEROS IRRACIONAIS

A MODEL TO ANALYZE THE CONCEPT IMAGE OF UNDERGRADUATE STUDENTS: THE CASE OF IRRATIONAL NUMBERS

GERALDO CLAUDIO BROETTO*
VÂNIA MARIA PEREIRA DOS SANTOS-WAGNER**

RESUMO

Neste trabalho, discorremos brevemente a respeito da teoria da imagem do conceito desenvolvida por David Tall e Shlomo Vinner. Também tratamos da teoria de exemplo protótipo de Rina Hershkowitz e da compreensão instrumental e relacional de Richard Skemp. De posse dessas ideias, construímos um modelo de análise de dados que articula todas elas. Esse modelo foi utilizado em nossa pesquisa de doutorado, cujo objetivo foi diagnosticar as imagens conceituais de números racionais e irracionais trazidas por licenciandos ingressantes na matemática, bem como analisar as movimentações dessas imagens. Participaram da pesquisa dezenove estudantes ingressantes na licenciatura em matemática do Instituto Federal do Espírito Santo - Ifes - Campus Vitória, durante o ano de 2014. O modelo revelou-se com potencial para analisar dados de outros tipos de pesquisa que envolvam a matemática avançada, que trabalhem de alguma forma com formação e manipulação de conceitos e definições matemáticas.

Palavras-chave: Ensino superior. Ensino de matemática. Matemática avançada. Imagem do conceito.

ABSTRACT

In this work, we briefly discuss the theory of concept image developed by David Tall and Shlomo Vinner. We also deal with the theory of prototype of Rina Hershkowitz and the instrumental and relational understanding of Richard Skemp. With these ideas in hand, we have constructed a model of data analysis that articulates all of them. This model was used in our doctoral thesis, whose objective was to diagnose the conceptual images of rational and irrational numbers brought by undergraduate students in mathematics, as well as to analyze the movements of these images. Nineteen undergraduate students of an initial mathematics teacher education course participated in the study at the Federal Institute of Espírito Santo - Ifes - Campus Vitória, during the year 2014. The model revealed the potential to analyze data from other types of inquiry involving advanced mathematics concepts that work in some way with constructing and manipulating mathematical concepts and definitions.

Keywords: *Higher education. Mathematics teaching. Advanced Mathematics. Concept image.*

* Doutor em Educação. Instituto Federal do Espírito Santo. E-mail: gbroetto@gmail.com
** Doutora em Educação Matemática. Universidade Federal do Espírito Santo. E-mail: profvaniasantoswagner@googlemail.com

INTRODUÇÃO

Em situações cotidianas, aprendemos a guiar nossas ações e a tomar decisões a partir de experiências onde os exemplos desempenham papel fundamental na apreensão de novos conceitos. Desde a infância, aprendemos a lidar com os conceitos e a reconhecê-los pela experiência e pela aplicação em contextos apropriados. Por exemplo, para ensinar o conceito de cadeira a uma criança,

> A prática comum é apontar para vários tipos de cadeiras em vários contextos e dizer “cadeira”. Após algumas repetições, a criança entende que a palavra cadeira é supostamente relacionada a cadeiras e que quando perguntada “o que é isso? ”, espera-se que diga cadeira. Mais tarde, as crianças imitarão todo o ritual por sua própria iniciativa, elas apontarão para cadeiras e dirão “cadeira” (VINNER, 2011, p. 248, tradução nossa).

Em seu desenvolvimento, após o conceito ser reconhecido e manipulado por meio de um símbolo ou nome em determinadas situações, ocorrerá um refinamento do conceito ao surgirem novas circunstâncias, como o aparecimento de novos representantes desse conceito. Um exemplo comum é que crianças pequenas costumam chamar bois ou outros animais de quatro patas de cachorro. Comuemente, o primeiro animal que uma criança tem contato, principalmente nas grandes cidades, é um cachorro. Por isso, ao observar um animal que anda sobre quatro patas e com rabo, é comum que possa chamá-lo de cachorro. O conceito precisará passar por um processo de refinamento após a observação, por exemplo, que bois são bem maiores ou que cachorros não têm chifre. A partir daí a criança não confundirá mais cachorros com bois (WADSWORTH, 1997). Nas palavras de Tall e Vinner (1981),

> Muitos conceitos que usamos alegremente não são definidos de forma alguma. Nós aprendemos a reconhecê-los pela experiência e pela utilização em contextos apropriados. Mais tarde, esses conceitos podem ser refinados nos seus significados e interpretados com cada vez mais sutilezas, com ou sem o luxo de uma definição precisa (p. 151, tradução nossa).

Desta maneira, em grande parte das situações corriqueiras lidamos de forma satisfatória com os conceitos a partir de exemplos e outras figuras mentais (explicamos adiante) e uma definição do conceito é quase sempre dispensável. Em geral, não necessitamos de definições para adquirir um conceito. Em contextos científicos, ao contrário, as definições exercem um papel importante, impondo diferentes hábitos de raciocínio. Para entender a frase ‘meu bonito carro verde está estacionado em frente à minha casa’ você não consulta definições. Contudo, para entender a frase ‘dentre todos os retângulos com o mesmo perímetro, o quadrado é o que tem área máxima’ você precisa conhecer as definições dos termos matemáticos da sentença para entendê-la (VINNER, 2011). Daí que, frequentemente, surgem dificuldades na transição do pensamento matemático elementar praticado na escola básica, onde os conceitos têm suas bases fundadas na experiência, nos exemplos, no descrever e no convencer, para o pensamento matemático avançado, onde os conceitos são definidos formalmente e praticamente todas as proposições precisam ser demonstradas (TALL, 1991; 1992; VINNER, 2011).

Partindo do pressuposto de que existe diferença entre os conceitos matemáticos formalmente definidos e os processos cognitivos pelos quais eles são concebidos, tratamos de dois conceitos específicos, *concept image* e *concept definition*, que traduzimos por imagem do conceito e definição do conceito[1]. Esses termos surgiram pela primeira vez em um artigo de Shlomo Vinner e Rina Hershkowitz publicado nos Anais da IV Conferência Internacional para a Psicologia da Educação Matemática (PME), realizada em 1980. No ano seguinte, esses termos reapareceram em Tall e Vinner (1981), que se tornou uma das referências mais importantes no que tange à imagem do conceito e definição do conceito (BINGOLBALI; MONAGHAN, 2008).

Conforme Bingolbali e Monaghan (2008), esses termos têm resistido bem ao tempo, apesar de já poderem ser considerados antigos. São termos que, em sua concepção original, remetem apenas ao plano individual, reflexo de uma época, a década de 1980, em que muitos estudos a respeito de processos de aprendizagem estavam focados em processos cognitivos individuais. Apesar disso, de acordo com Bingolbali e Monaghan (2008), é possível adaptá-los às tendências que surgiram na década de 1990, e considerar também os processos de aprendizagem decorrentes da interação social. O trabalho de Dias (2007) é um exemplo disso, utilizando a teoria de imagem do conceito conjuntamente com pressupostos teóricos fundamentados na perspectiva lógico-histórica e na interação indivíduo-coletividade na formação de conceitos. Não negligenciamos o efeito das interações sociais nos processos de aprendizagem de um indivíduo, mas, neste artigo, os termos imagem do conceito e definição do conceito serão utilizados em sua concepção original (TALL; VINNER, 1981).

Os exemplos protótipos, atributos relevantes e atributos irrelevantes, apresentados em Hershkowitz (1994) e as ideias de compreensão instrumental e compreensão relacional (SKEMP, 1976) também fazem parte do quadro teórico principal que fundamentou o modelo que criamos. Ambos se articulam harmonicamente com as noções de imagem do conceito e definição do conceito e, em nossa pesquisa de doutorado, preencheram algumas lacunas em relação às ideias de Tall e Vinner, que apresentaremos em seguida.

IMAGEM DO CONCEITO

Denominamos por 'figuras mentais' ao conjunto de todas as figuras relacionadas a um determinado conceito presentes na mente de um indivíduo. Nesse caso, a palavra 'figura' deve ser entendida no seu sentido mais amplo, incluindo qualquer representação visual como símbolos, gráficos, expressões e procedimentos (VINNER, 1983). Assim, ao ouvir a palavra função, um indivíduo pode recordar a expressão $y=f(x)$ ou visualizar o gráfico de uma função, ou ainda pensar em casos específicos como $y=x^2$, $y=cos(x)$ dentre outras (DOMINGOS, 2003). Além das imagens mentais, pode existir um conjunto de propriedades associadas ao conceito na mente do indivíduo. Por exemplo, um sujeito pode achar que a altura de um triângulo deve sempre ser interior ao triângulo ou que uma função deve sempre ser definida por meio de uma expressão algébrica (VINNER, 1983).

Resolvemos incluir procedimentos como um tipo de figura mental, pois consideramos que alguns procedimentos possuem forte conotação visual. Citamos como exemplo a regra de soma de frações. Esse procedimento, quando ensinado de uma forma apenas instrumental, possui um forte apelo visual, com todas suas setinhas e um ritual próprio: tira o mínimo múltiplo comum e depois 'divide pelo denominador e multiplica pelo numerador'. Tudo precisa estar no seu lugar e precisa ser feito naquela ordem. O aluno memoriza cada passo e, ao final, tudo parece fazer parte de uma grande figura (Figura 1).

[1] Essa tradução foi utilizada em Giraldo (2004), mas não é a única. É possível encontrar outras traduções em português para esses termos como 'conceito imagem' e 'conceito definição'. Além de imagem do conceito, também utilizamos neste trabalho uma variação que consideramos apropriada: 'imagem conceitual'.

Figura 1 - Regra visual para soma de frações.

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{3+4}{6}=\frac{7}{6}$$

Fonte: Elaborada pelos autores[2].

De acordo com Vinner (1983), a reunião das propriedades associadas ao conceito com as figuras mentais é chamado de imagem do conceito. Outros trabalhos definem a imagem do conceito de outras formas equivalentes que ajudam a explicitar melhor o que está sendo tratado aqui. É o caso de Domingos (2003), que estabelece a imagem do conceito como "qualquer coisa não verbal associada na nossa mente ao nome do conceito" (p. 27). Ainda segundo essa obra, além de uma possível representação visual, a imagem do conceito pode ainda conter uma coleção de impressões e experiências associadas a um determinado conceito.

A imagem do conceito é um modelo de estrutura cognitiva responsável pela aquisição e pela manipulação dos conceitos, e construída ao longo do tempo por meio de experiências variadas, podendo mudar à medida que o indivíduo encontra novos estímulos e amadurecimento (TALL; VINNER, 1981). Na perspectiva de Vinner (1991), a imagem do conceito pode ser considerada inexistente quando nenhum significado é associado ao nome do conceito. Por exemplo, a palavra laplaciano[3] provavelmente não tem nenhum significado para um estudante do ensino médio, ou seja, esta palavra não acionaria nenhuma figura mental ou propriedade na mente do indivíduo, o que poderíamos chamar de uma imagem do conceito vazia para o conceito de laplaciano. Porém, a imagem do conceito pode não estar vazia, mesmo no caso em que o nome do conceito seja desconhecido do aluno. Como exemplo, considere a propriedade de densidade dos números reais. Um indivíduo que formou uma figura mental dos números reais como uma reta 'cheia' (sem buracos ou falhas), pode afirmar que entre dois números reais distintos sempre existe um número real, mesmo sem saber que essa propriedade é chamada de densidade. Ou seja, apesar do nome do conceito ser desconhecido, ainda assim o indivíduo pode ter aquele conhecimento e ativar as estruturas cognitivas relacionadas àquele conhecimento (DIAS, 2002).

Apesar de considerarmos que esteja implícito na ideia original contida em Tall e Vinner (1981), é preciso destacar outra situação relacionada ao ativamento da imagem do conceito pelo nome do conceito. Pode ocorrer que uma palavra conhecida do aluno revele significados completamente diferentes do que um professor de matemática imaginaria. Tomemos como exemplo um aluno do ensino fundamental, que ao ouvir a expressão 'número complexo' faz associação com um número muito difícil, muito grande ou muito complicado. O mesmo poderíamos pensar em relação ao número irra-

[2] A partir desse ponto, todas as figuras que serão apresentadas foram criadas pelos autores. Omitiremos, portanto, essa informação.

[3] Laplaciano é um operador diferencial de segunda ordem muito utilizado em matemática e que também aparece em diversas equações de derivadas parciais que modelam problemas físicos. O nome é uma homenagem ao matemático francês Pierre Simon de Laplace (1749-1827). Fonte: <pt.wikipedia.org/wiki/Laplaciano>. Acesso em: 23 ago. 2015.

cional, que pode ser associado com irracionalidade, ou até como já ouvimos dos alunos, ainda que em tom de brincadeira, como um 'número que não pensa'. Em ambos os casos, apesar de não conter o significado matemático desejado, a imagem do conceito não está vazia, pois os alunos criam e/ou associam outras ideias e imagens para os termos matemáticos escutados.

Um outro aspecto importante da imagem do conceito é que ela não precisa ser (em geral não é) um todo coerente. À medida que essa estrutura se desenvolve, novas figuras, processos ou propriedades são incluídas, reconstruídas ou reformuladas, podendo ser incoerentes ou até contradizer figuras, processos ou propriedades preexistentes (TALL; VINNER, 1981). Mesmo havendo incoerência entre algumas figuras, processos ou propriedades, é provável que elas convivam na imagem do conceito de um indivíduo. Isso é possível porque, por se tratar de uma estrutura ampla e complexa, apenas pequenas partes da imagem do conceito são ativadas durante a resolução de alguma tarefa. Essas pequenas porções da imagem do conceito, ativadas de acordo com o momento do indivíduo e com a situação, são chamadas de "imagem do conceito evocada" (TALL; VINNER, 1981). As imagens evocadas são reforçadas e o indivíduo passa a acreditar nelas à medida que resolve tarefas e estas sejam corrigidas como corretas.

DEFINIÇÃO DO CONCEITO E IMAGEM DA DEFINIÇÃO DO CONCEITO

Uma definição do conceito é uma descrição de um conceito usando palavras. Mais precisamente, é uma "expressão verbal que explica acuradamente o conceito de uma forma não circular" (VINNER, 1983, p. 293, tradução nossa). Em geral, essas definições são criadas por especialistas e, no caso da matemática, também são resultado de um longo processo histórico de negociação, depuração, aceitação e revisão do conceito. Contudo, o indivíduo também pode construir para si uma definição pessoal para um determinado conceito, que pode ser uma variante equivalente à uma definição do conceito aceita pela comunidade científica, ou, pode ser totalmente incoerente com ela. Segundo Tall e Vinner (1981), "para cada indivíduo a definição do conceito gera sua própria imagem do conceito, que pode, em um voo de fantasia ser chamada de imagem da definição do conceito" (p. 153, tradução nossa). Nas palavras de Victor Giraldo, "a imagem do conceito pode ou não incluir uma definição do conceito pessoal, que, por sua vez, pode (ou não) ser consistente com a definição formal" (GIRALDO, 2004, p. 9).

A descrição 'quadrilátero equiângulo' é um exemplo de uma definição para o conceito de retângulo e uma das possíveis variantes equivalentes seria 'paralelogramo com ângulos congruentes'. Uma definição pessoal para retângulo incoerente com essas definições, e que é comum de ser encontrada entre alunos que começam a estudar geometria, seria 'quadrilátero com quatro ângulos retos, lados opostos iguais e lados consecutivos diferentes'. Essa descrição é incoerente com a definição anterior pois, entre outras coisas, não considera um quadrado como um retângulo (GIRALDO, 2004).

Conforme exposto em Tall (2003), após a publicação do trabalho que lançou as bases da imagem do conceito e da definição do conceito (TALL; VINNER, 1981), cada um dos pesquisadores seguiu um caminho diferente. Em seus trabalhos posteriores, Shlomo Vinner sempre considerou a definição do conceito e a imagem do conceito como células independentes na estrutura cognitiva do indivíduo. Para David Tall, a definição do conceito deve ser considerada como uma instância da imagem do conceito (TALL, 2003). São visões incompatíveis e que podem trazer problemas, inclusive com a própria noção de imagem do conceito. Considerar a definição do conceito separada da imagem do conceito é coerente com o entendimento da imagem do conceito como tudo que é não verbal relacionado ao conceito (DOMINGOS, 2003). Porém, entendemos que, nesse caso, não se enfatiza o caráter pessoal que a definição do conceito pode ter; isto é, o fato dela poder ser o resultado de uma construção pessoal do indivíduo. Além do mais, é necessário reportar-se a expressões como 'definição formal do conceito' quando se deseja mostrar que a definição do conceito do indivíduo não está de acordo com uma definição aceita pela comunidade acadêmica. Sendo assim, a despeito de ter que incluir algo que é verbal à imagem do conceito, optamos pelo caminho apontado por David Tall por concordarmos com ele e por entendermos que se trata do caminho mais adequado para nossa análise de dados.

Isso posto, acordamos que uma definição do conceito formal, ou seja, aquela que é criada e aceita pela comunidade científica, será chamada simplesmente de definição do conceito. A definição do conceito pessoal, isto é, aquela definição criada pelo próprio indivíduo, que pode ou não coincidir com a definição do conceito, será chamada de imagem da definição do conceito. Ao contrário de Tall e Vinner (1981), achamos que se trata de um voo bastante real e apropriado para o que pretendemos com este trabalho.

A partir dessas considerações, uma imagem do conceito vazia implicará necessariamente que a imagem da definição do conceito também é vazia. Porém, a recíproca nem sempre é verdadeira, ou seja, a imagem da definição do conceito pode ser vazia - o indivíduo nunca teve contato ou nunca pensou em uma definição para um determinado conceito - sem que isso signifique que figuras mentais e/ou propriedades também sejam vazias. Isso é muito comum para conceitos presentes na vida de qualquer pessoa. Praticamente qualquer ser humano que já teve contato com uma laranja sabe o que é uma laranja, sabe para que serve uma laranja, reconhece a forma e até o gosto de uma laranja e formou, a partir dessas experiências, figuras mentais relacionadas ao conceito de laranja. Contudo, provavelmente a pessoa nunca tenha pensado - talvez porque não foi necessário - em uma definição para laranja.

A partir de nossas leituras das fontes citadas anteriormente, entendemos que não é possível que a imagem do conceito contenha apenas uma imagem da definição do conceito e mais nada. Ao aprender uma definição de algum conceito, é inevitável que o cérebro crie também alguma figura mental, alguma relação ou algum exemplo para associar a esta definição. Contudo, ainda que não seja possível que figuras mentais, propriedades e exemplos estejam ausentes da imagem do conceito, eles podem estar pouco desenvolvidos e suas relações internas empobrecidas, isto é, os diversos componentes da imagem do conceito não estão conectados uns com os outros de forma clara. Isso pode ocorrer quando um conceito é introduzido exclusivamente por meio de uma definição em um contexto no qual a construção de figuras mentais, exemplos e contraexemplos não seja valorizada e/ou estimulada. Um exemplo desta situação é quando Elon Lages Lima defende que "tudo o que interessa é que é um corpo ordenado completo" (LIMA, 1995, p. 48).

As ligações entre os diversos elementos da imagem do conceito podem ser enriquecidas de diversas formas, pelo uso de atividades, exercícios, discussões, resolução de problemas, investigação e contraexemplos em aulas e em tarefas de casa. No caso do uso de contraexemplos, entendemos que se trata de um poderoso facilitador da aprendizagem que tem sido deixado de lado com o passar do tempo. Livros didáticos de matemática do passado, por exemplo, concediam mais espaço para os contraexemplos do que os livros atuais. Mesmo nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998; 2000) e Base Nacional Curricular Comum (BRASIL, 2016), não encontramos referências ou qualquer tipo de estímulo ao uso de contraexemplos. Novamente falando nos números reais, um contraexemplo importante em relação à questão do corpo ordenado seria pensar que no caso dos números complexos, não existe essa noção. Dados dois pontos em $\mathbb{R}^2$, não faz sentido falar que um deles é 'maior' do que o outro.

Especificamente no caso em que um conceito é introduzido e trabalhado apenas por meio de uma definição, Vinner (1991) aponta que esta definição poderá permanecer desativada e pode até mesmo ser esquecida. É difícil treinar um sistema cognitivo para agir contra sua natureza e forçá-lo a consultar definições, seja em um processo de formação de uma imagem do conceito ou de efetivação de uma tarefa cognitiva. Diante de tarefas escolares como um problema matemático, em geral os alunos consultam suas imagens do conceito, podendo contrariar o professor que espera uma resposta baseada na definição formal. A teoria de imagens do conceito sugere que

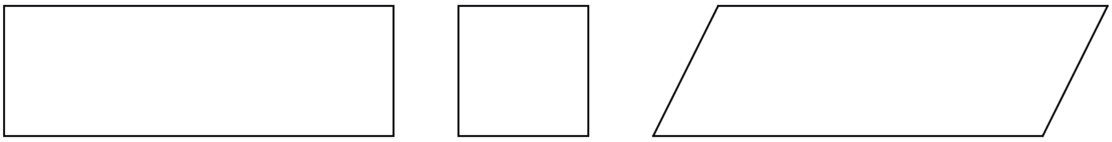
> O desenvolvimento cognitivo de um conceito matemático se dá através do enriquecimento de uma diversidade de ideias associadas ao conceito, e que a compreensão da própria definição do conceito só é possível quando a gama de ideias associadas é rica o suficiente (GIRALDO, 2004, p. 3).

Imagem do conceito e definição do conceito podem ser formados independentemente, além disso, eles podem ou não interagir. Já argumentamos que a imagem do conceito pode conter elementos incoerentes dividindo o mesmo espaço e isso inclui a imagem da definição do conceito, que pode ser incoerente com alguma figura mental ou propriedade associada ao conceito. "Uma definição do conceito consistente com a definição formal, uma imagem do conceito rica e uma imagem do conceito consistente são fenômenos mutuamente independentes" (GIRALDO, 2004, p. 10). A existência de incoerência entre algumas das partes da imagem do conceito foi chamada de *fator de conflito potencial* e, se esses fatores são evocados simultaneamente, eles se tornam conflitantes, e serão chamados de *fatores de conflito cognitivo* (TALL; VINNER, 1981, p. 153-154). Como exemplo desse conflito potencial, um dos sujeitos de nossa pesquisa de doutorado (BROETTO, 2016) apresentou a seguinte definição para os irracionais: é *o número que não é obtido pela divisão de números inteiros*. Em seguida, classificou a fração 13/23 como um número irracional. Esse sujeito recebeu o nome fictício de Agatha, e seu caso será abordado com mais detalhes adiante.

Uma das formas de resolver um conflito potencial como esses é torná-lo um conflito cognitivo, para que o próprio indivíduo tenha consciência do problema e, a partir daí, possa reformular e/ou reconstruir alguma figura mental, propriedade ou até a imagem da definição do conceito que esteja provocando o conflito. Porém, um caso mais sério de fator de conflito potencial ocorre quando o indivíduo produz figuras, propriedades ou sua própria imagem da definição do conceito em desacordo com a definição formal do conceito. Nesses casos, quando os estudantes parecem seguros de suas próprias interpretações das noções envolvidas e/ou consideram a teoria formal inútil ou supérflua, os fatores de conflito potencial podem não se tornar fatores de conflito cognitivo. Nesses casos, a aprendizagem de qualquer teoria formal pode ficar seriamente comprometida (TALL; VINNER, 1981).

A geometria nos fornece diversos exemplos de conflitos potenciais. As crianças pequenas aprendem a identificar retângulos, quadrados e paralelogramos a partir de representações gráficas como as da figura 2. Essas representações podem contribuir para a formação de imagens mentais como 'retângulo tem lados desiguais', 'quadrado tem todos os lados iguais' e 'paralelogramo não tem os ângulos retos'. O conflito pode surgir quando o professor diz e afirma que todo quadrado é retângulo e que todo retângulo é um paralelogramo.

Figura 2 - Representações gráficas mais comuns para retângulo, quadrado e paralelogramo.

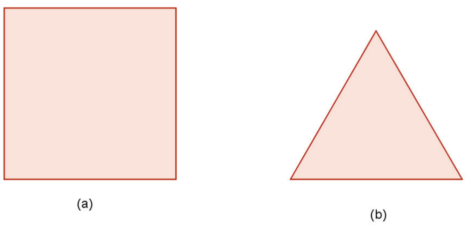


Outro exemplo de conflito na matemática elementar é o caso da subtração. Ao aprender subtração com números positivos, crianças pequenas podem formar uma imagem mental que subtração sempre implica em diminuição, isto é, que ao subtrair dois números o resultado da subtração é sempre menor do que o minuendo. Isso pode se tornar uma semente de conflito para a criança quando aprender os números negativos. Por isso todas as imagens mentais devem ser consideradas e pensadas pelos professores (TALL; VINNER, 1981).

EXEMPLOS PROTÓTIPOS, ATRIBUTOS RELEVANTES E ATRIBUTOS IRRELEVANTES

Quando se pede a alguém para desenhar um quadrilátero e um triângulo, frequentemente o resultado apresentado é um quadrado e um triângulo equilátero (Figura 3). Nesse caso, o quadrado e o triângulo equilátero são exemplos do que é chamado de exemplos protótipos (ou prototípicos) em Hershkowitz (1994). Eles são considerados os melhores exemplares das categorias 'quadrilátero' e 'triângulo' porque apresentam um maior número de características que os fazem pertencer a essas categorias, além de terem um forte apelo visual e de terem sido, provavelmente, os exemplos por mais vezes vistos pelo sujeito no que se refere a essas categorias.

Figura 3 - Exemplos prototípicos de quadrilátero e triângulo.



Essas características que definem as categorias podem ser classificadas, de acordo com a concepção original em Hershkowitz (1994), como atributos relevantes (ou críticos) e atributos irrelevantes (ou não críticos). De acordo com Hershkowitz (1994), atributos relevantes são aqueles que devem ser satisfeitos para termos um exemplo positivo[4] do conceito, e atributos irrelevantes são aqueles que apenas alguns dos exemplos positivos possuem. No caso do quadrilátero, possuir quatro lados é um atributo relevante, pois todo quadrilátero possui quatro lados, mas os quatro lados serem iguais é um atributo irrelevante, pois é uma característica que apenas alguns quadriláteros possuem. Outros atributos irrelevantes seriam ter todos os ângulos retos, ter dois pares de lados paralelos, entre outros. No caso do triângulo, possuir três lados é uma característica relevante, mas possuir três lados

[4] Hershkowitz (1994) usa o termo exemplo positivo como antônimo de contraexemplo, que seria o exemplo negativo.

iguais ou três ângulos iguais são atributos irrelevantes. Segundo Hershkowitz (1994), os exemplos protótipos são aqueles que reúnem a maior listagem de atributos relevantes e irrelevantes, o que explica um quadrado e um triângulo isósceles ou equilátero (Figura 3) serem usados como exemplos de quadriláteros e triângulos - por professores e livros didáticos - e se tornarem, respectivamente, exemplos protótipos desses polígonos.

Enxergamos um paralelo possível entre o que Vinner (1983) chama de 'conjunto de propriedades associadas ao conceito' com os 'atributos relevantes e irrelevantes' de Hershkowitz (1994). Porém, entendemos que Hershkowitz (1994) aprofunda a discussão, e por isso tem a nossa preferência. Apesar de originalmente elaboradas para um contexto de geometria, avistamos nas ideias de Hershkowitz (1994) uma ferramenta capaz de auxiliar-nos na análise de dados de nossa pesquisa com números irracionais no ensino superior (BROETTO, 2016). Porém, alguns ajustes precisaram ser realizados para contemplar algumas situações. Por exemplo, quando um aluno considera que um determinado número é irracional porque é um número inexato, de acordo com o trabalho citado, não poderíamos dizer que se trata de um atributo relevante nem irrelevante, já que a inexatidão não é característica de nenhum exemplo positivo da categoria dos números irracionais[5]. Para abarcar esses atributos, nossa ideia foi reservar o termo atributos irrelevantes para os atributos que não têm nenhuma relação com o conceito, isto é, que não são características de nenhum exemplo positivo do conceito. Os atributos relevantes ficariam divididos em dois subgrupos: os atributos críticos, aqueles que todos os exemplos positivos de uma categoria devem ter, e os atributos não críticos, aqueles que apenas alguns dos exemplos positivos possuem. Feita essa adequação, podemos citar como exemplo, alguns dos principais atributos relevantes e irrelevantes dos números irracionais que foram detectados nas respostas dos sujeitos participantes de nossa pesquisa de doutorado (BROETTO, 2016) (Ver Quadro 1).

Quadro 1 - Atributos relevantes e irrelevantes de números irracionais.

Exemplos protótipos: π, raiz quadrada		
Atributos relevantes		**Atributos irrelevantes**
Críticos	**Não críticos**	
• Impossibilidade de representação como quociente/razão de números inteiros • Dízima não periódica	• Ausência de padrão de repetição • Ausência de regularidade • Representação por meio de raiz quadrada	• Inexatidão • Imprevisibilidade • Divisão não exata • Números que tendem ao infinito • Números aproximados

Fonte: Elaborado pelos autores.

De acordo com Hershkowitz (1994), o exemplo protótipo serve como modelo para julgamentos prototípicos, que foram classificados em duas categorias: puramente visuais e analíticos. Nos julgamentos puramente visuais, duas situações podem ocorrer. Na primeira, o exemplo protótipo serve como referência para um julgamento visual aplicado para outras situações, como quando um aluno afirma que $\pi/6$ é um número racional pois o visualiza como uma fração, exemplo protótipo de número racional. Na segunda situação, o exemplo protótipo também é usado como referência, mas atributos

[5] Na verdade, nenhum número possui esse atributo. Todo número pode ser representado por um ponto na reta, portanto, é exato.

próprios do protótipo são levados em conta, não apenas a questão visual. Como exemplo, um aluno afirma que o número 1,1212212221... é um número racional porque apresenta um padrão, um atributo comumente associado aos números racionais devido às dízimas periódicas. Em ambos os exemplos, o aspecto visual é que fundamenta a escolha (SILVA, 2011). O julgamento analítico, ao contrário, utiliza-se de resultados matemáticos, atributos relevantes ou da própria definição do conceito para julgar os exemplares e categorizá-los. Para Hershkowitz (1994), existe alguma evidência de que a construção da imagem do conceito seja uma mistura de processos visuais e analíticos, porém, é desejável que os alunos superem as tendências visuais, que são responsáveis por muitos equívocos, e baseiem seus julgamentos nos atributos relevantes do conceito.

Os atributos relevantes e irrelevantes, além de constituírem a base para a formação de exemplos e julgamentos protótipos, também podem se cristalizar em associações favoráveis ou desfavoráveis à aprendizagem do conceito. As associações favoráveis são aquelas que podem ser trabalhadas para que o aluno amplie sua imagem do conceito para atingir algo equivalente ao conceito formal, isto é, de acordo com o entendimento atual da comunidade matemática. Por exemplo, se um aluno associa números racionais a decimal finito, pode-se trabalhar para que ele também inclua nessa associação as dízimas periódicas, e entenda a relação desses atributos com a representação em forma de fração. Quanto às associações desfavoráveis, citamos o exemplo detectado em alunos na pesquisa de Silva (2011): “números decimais que apresentam na parte decimal um número que se repete três vezes são dízimas periódicas” (p. 164). Essa associação não pode ser ampliada ou completada, pois está em desacordo com o conceito formal de dízima periódica.

Em geral, a utilização de atributos irrelevantes produzirá associações desfavoráveis, pela própria natureza equivocada e não relacionada com o conceito desses atributos. Porém, no que se refere aos atributos relevantes, nem sempre sua utilização garantirá a produção de associações favoráveis. Atributos relevantes podem produzir tanto associações favoráveis quanto associações desfavoráveis, dependendo de como será elaborada essa associação. Por exemplo, a ideia de ‘padrão’ pode ser um atributo relevante, tanto para números racionais quanto para números irracionais, e pode levar a associações tanto favoráveis quanto desfavoráveis à aprendizagem. Em nossos dados, descobrimos que alguns licenciandos associavam os números racionais com a existência de padrão, o que os levava a considerar números como 1,121121112 ... como números racionais.

No que tange à definição do conceito as ideias defendidas em Hershkowitz (1994) também se articulam de forma harmônica com as ideias já citadas de Tall, Vinner e Giraldo apresentadas nas seções anteriores. Segundo o trabalho de Hershkowitz (1994), uma definição pode ser considerada como um conjunto mínimo de atributos relevantes suficientes para definir o conceito. Porém, a definição quase sempre fica em segundo plano devido a uma tendência de se confiar mais na imagem do conceito do que na definição do conceito (VINNER, 2011). No caso dos números irracionais, em que a definição envolve diversas ideias matemáticas complexas, como a representação decimal infinita, é comum os estudantes esquecerem ou ignorarem a definição e usarem apenas as imagens do conceito. Quando essas ideias não são discutidas e trabalhadas nas aulas, a definição pode até ser memorizada, mas, com o tempo, poderá ser considerada inútil e abandonada. É nesse contexto que observamos que os exemplos protótipos surgem, muito frequentemente, como as primeiras opções na mente do indivíduo ao resolver alguma tarefa relacionada a um determinado conceito matemático.

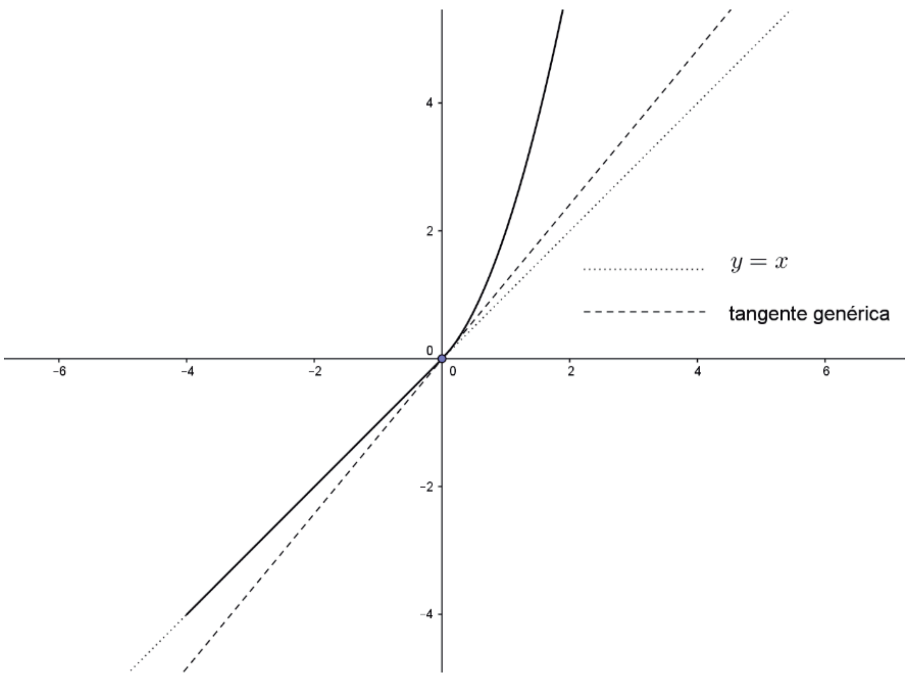
O conceito de exemplo protótipo também precisou ser reconfigurado e adaptado à nossa pesquisa (BROETTO, 2016). Números como $\sqrt{2}$ ou π podem ser protótipos de irracionais por reunirem um grande número de atributos relevantes e irrelevantes como descrito em Hershkowitz (1994), mas, também vamos considerar uma outra possibilidade. Em alguns casos, os exemplos protótipos podem ser fruto de algo muito menos elaborado, algo muito mais simples, como a autoridade do professor; isto é, o aluno aceita e internaliza que $\sqrt{2}$ e π são números irracionais porque o professor assim o disse. Além disso, entendemos que esses exemplos figuram entre os mais utilizados pelos livros didáticos e pelos professores - que, muitas vezes, estão apenas reproduzindo o conteúdo dos livros - fazendo com que esses números sejam os primeiros a serem lembrados como números irracionais, senão os únicos.

Os exemplos protótipos, figuras mentais e atributos são elementos que se influenciam uns aos outros. Para exemplificar o poder dos exemplos na formação de imagens mentais, e ao mesmo tempo as consequências de se basear um conceito apenas em exemplos, citamos um caso descrito em Tall (1988). Esse pesquisador pediu a jovens de 16 anos que traçassem uma reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ na origem, sendo

$$f(x) = \begin{cases} x, x \leq 0 \\ x + x^2, x > 0 \end{cases}.$$

Ele obteve o seguinte: 36% traçou a tangente correta, $y = x$, mas 46% traçou uma tangente um pouco ‘rotacionada’ em relação a $y = x$, de forma que parecesse que tocava a curva em apenas um ponto. Tall (1988) chama essa tangente de ‘tangente genérica’ (ver Figura 4), pois engloba a propriedade genérica de ‘tocar em um único ponto’, compartilhada por muitos exemplos anteriores. Dito de outra forma, pensamos que o aluno cria essas imagens ou propriedades genéricas a partir dos inúmeros exemplos apresentados para ele em que realmente a tangente só tocava em um único ponto. De forma semelhante, entendemos que muitos alunos também criam imagens semelhantes, muitas delas equivocadas, a respeito dos números irracionais a partir dos exemplos que lhes são apresentados em aulas de matemática e nos livros didáticos.

Figura 4 - Tangente genérica



COMPREENSÃO INSTRUMENTAL E COMPREENSÃO RELACIONAL

Em um trabalho como o que fizemos, de sair a campo para diagnosticar o que sabiam os sujeitos a respeito de números racionais e irracionais e, ao mesmo tempo, de contribuir para a aprendizagem desses assuntos, é inevitável pensar em algumas questões relacionadas à compreensão da matemática. Questões como 'o que é compreender matemática'? 'quando podemos afirmar que alguém compreendeu algum tópico de matemática?' e 'existe uma única forma de compreender matemática?' estiveram presentes durante quase todo o tempo em que a nossa pesquisa (BROETTO, 2016) foi planejada e realizada.

Além das ideias de David Tall, Shlomo Vinner, Rina Hershkowitz e Victor Giraldo discutidas anteriormente, Richard Skemp também nos ajudou a lançar alguma luz nessas questões relacionadas à compreensão da matemática. Particularmente o trabalho de Skemp (1976) que apresenta uma distinção entre dois tipos de compreensão da matemática. A **compreensão relacional** é aquela em que se sabe o que fazer e o porquê, enquanto a **compreensão instrumental** é aquela em que se conhece uma regra e se tem habilidade para usá-la, o que também é chamado de *regras sem razões*. Exemplos comuns de compreensão instrumental: pegar emprestado na subtração, multiplicar a primeira pelo inverso da segunda (divisão de frações), passar para o outro lado trocando o sinal (equações), entre outras.

Skemp (1976) aponta três principais vantagens de se ensinar matemática visando uma compreensão instrumental. A primeira vantagem é que memorizar regras como 'menos vezes menos dá mais' e 'multiplica a primeira pelo inverso da segunda' é mais fácil do que entender as razões por trás dessas regras. Daí segue diretamente a segunda vantagem: as recompensas de um ensino que procede dessa forma são mais imediatas e mais aparentes se professores avaliam seus alunos apenas em tarefas instrumentais, procedimentais. Segundo Skemp (1976), não se pode subestimar a importância do sentimento de sucesso e de autoconfiança dos estudantes, e, nesse ponto, isso pode ser alcançado mais facilmente com um ensino de matemática instrumental do que com ensino de matemática relacional. A terceira vantagem é que as respostas certas podem ser obtidas de forma mais rápida e confiável. "Se o que é desejado é uma página de respostas corretas, a matemática instrumental pode oferecer isso mais rapidamente e mais facilmente" (SKEMP, 1976, p. 8).

Em relação ao ensino relacional da matemática, Skemp (1976) aponta quatro principais vantagens. A primeira é a maior adaptação para novas tarefas matemáticas, pois entender as relações e os porquês da aplicação de certos métodos a determinados problemas faz com que se tenha maiores chances de conseguir adaptá-los a novas situações - no ensino instrumental, em geral deve-se memorizar qual método funciona para cada situação. A segunda vantagem seria maior facilidade para se lembrar, pois, apesar da aparente contradição (já que há mais para se aprender quando o ensino é relacional), uma vez aprendido, o resultado é mais duradouro. Um exemplo diz respeito às áreas do retângulo, paralelogramo e triângulo. Ao invés de apenas memorizar a fórmula para o cálculo da área de cada uma dessas figuras, fazer conexões entre elas e entender como as duas últimas áreas estão relacionadas com a primeira auxilia a lembrar dessas fórmulas como parte de um todo (SKEMP, 1976).

A terceira vantagem de um ensino relacional é que ele pode ser tratado como um fim em si mesmo. De acordo com Skemp (1976), nesse caso, há menos necessidade de punições e recompensas externas, tornando mais fácil o trabalho motivacional do professor. A quarta vantagem é que os esquemas relacionais são mais orgânicos em qualidade, e se uma pessoa obtém satisfação com a compreensão relacional, ela não apenas tentará entender relacionalmente novos assuntos que forem apresentados para ela, mas também procurará novos materiais e vai explorar novas áreas, "como uma árvore estendendo suas raízes ou um animal explorando novo território à procura de nutrição" (SKEMP, 1976, p. 10).

Em síntese, Skemp (1976) defende que ambas as formas de se abordar a matemática, seja relacional ou seja instrumental, têm suas vantagens e podem ser úteis dependendo do que se pretende. Entendemos a partir da leitura de Skemp (1976) que o conhecimento construído a partir da compreensão instrumental é mais volátil, isto é, desaparece ou fica esquecido mais facilmente, já que não se conecta com outros conhecimentos. Já o conhecimento construído a partir da compreensão relacional pode durar muito mais tempo, pois está posto no centro de uma rede de conhecimentos, sustentado por fios que o conectam com uma série de outros conhecimentos.

Uma leitura superficial de Skemp (1976) pode levar a entender que a compreensão instrumental é um primeiro estágio enquanto a compreensão relacional é uma espécie de estágio superior, o objetivo final a ser alcançado. Não entendemos dessa forma. Ao contrário, pensamos que são formas diferentes, ambas com suas vantagens, como já discorremos anteriormente, mas que podem trazer problemas em determinadas situações. Por exemplo, se um professor direciona suas aulas para uma compreensão instrumental, isto é, ensina regras e procedimentos específicos para resolver determinados tipos de problemas, e nas avaliações prioriza questões que exigem entendimento dos porquês, ou seja, que valorizam uma compreensão relacional, isso poderá causar vários transtornos.

O contrário também pode ser problemático, isto é, aulas que priorizam uma compreensão relacional e avaliações em que prevalece o instrumental. Ou seja, o problema a que estamos nos referindo é o problema da incoerência de posturas de professores na condução de suas aulas e nas avaliações. O ideal seria ter um ensino em que tanto o entendimento relacional quanto o instrumental fossem explorados e valorizados e em que os exercícios de aula, testes e provas envolvessem tarefas matemáticas que focalizassem nos dois tipos de entendimento matemático.

Contudo, em geral, o ensino que é praticado por professores e livros da educação básica prioriza uma compreensão instrumental, assim como questões de provas[6]. Daí, é natural que os alunos achem estranho quando surge um professor que decide trabalhar de forma relacional. Na experiência docente do primeiro autor no primeiro semestre de 2016, atuando em várias turmas de ensino médio para jovens e adultos, pode-se constatar isso na prática. Experimentamos muitas dificuldades ao tentar dar aulas que trouxessem algo de compreensão relacional, isto é, que mostrassem o porquê de determinadas regras.

Como exemplo, trabalhávamos com divisão de frações em uma dessas turmas citadas anteriormente e decidimos reservar duas aulas para mostrar o verdadeiro significado dessa operação. Iniciamos com o significado da divisão de uma fração por um número inteiro. Em seguida, com a noção de 'quantos cabe', trabalhamos a questão da divisão de uma fração qualquer por uma fração do tipo $\frac{1}{b}$ e, finalmente, abordamos a divisão de uma fração qualquer $\frac{a}{b}$ por uma fração qualquer $\frac{c}{d}$. A intenção era dar todos os passos na direção da construção com significado e explicações do porquê da conhecida regra de divisão de frações: "repete a primeira e multiplica pelo inverso da segunda". Após vários quadros e etapas de demonstração, apresentamos a referida regra e, logo em seguida, um aluno perguntou: "professor, mas não é mais fácil fazer dessa forma"?

Pensamos que todo o trabalho realizado para chegar até a fórmula não fez sentido para o aluno por se tratar de uma abordagem que valorizava a compreensão relacional. Em nosso modo de pensar,

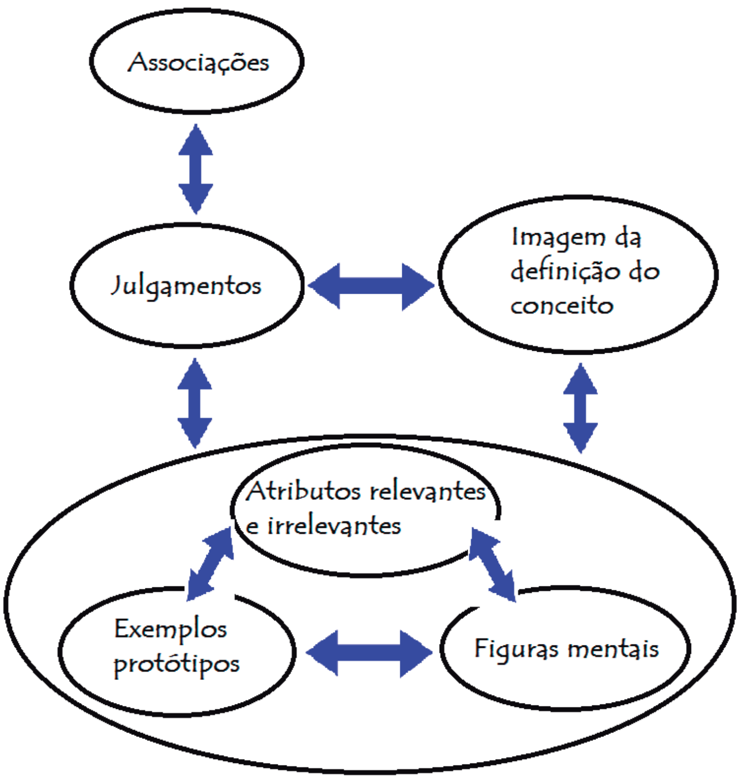
[6] Em Broetto (2016), analisamos as questões do ENEM que envolveram o assunto números irracionais no período de 2009 a 2014. Constatamos que todas essas questões exigiam apenas conhecimentos instrumentais por parte dos alunos.

isso se deve às suas experiências anteriores em que a matemática sempre foi abordada de forma instrumental. Na concepção desse aluno, talvez nem reconheça o que foi feito como matemática, visto que em suas experiências anteriores, essa disciplina sempre foi abordada por meio de comandos e instruções do tipo 'essa regra serve para isso', 'esse cálculo serve para aquilo'. Uma abordagem que visa à compreensão relacional é tão diferente de uma que visa a compreensão instrumental que é preciso ter cuidado ao transitar de uma para a outra. O professor deve ter consciência dessas sutilezas em seu trabalho diário, seja nas atividades de sala de aula, seja nas avaliações.

MODELO DE ANÁLISE DE DADOS

Tendo em vista as considerações anteriores acerca das ideias de Tall, Vinner, Hershkowitz e Skemp, criamos nosso próprio modelo de imagem do conceito. Agrupamos todas as propriedades relacionadas a um conceito nos balões 'atributos relevantes e irrelevantes', e, a partir da sugestão de Hershkowitz (1994), estabelecemos que esses atributos, juntamente com as figuras mentais e os exemplos protótipos, são os **elementos fundantes** da imagem do conceito. A partir deles, desenvolve-se uma nova etapa ou 'camada' da imagem do conceito, formada pelos julgamentos, associações e imagem da definição do conceito[7] (Figura 5).

Figura 5 - Modelo que será utilizado de imagem do conceito.



[7] É possível também que a imagem da definição do conceito figure entre os elementos fundantes. Isso ocorrerá quando o conceito é introduzido por sua definição, antes mesmo que qualquer figura mental, exemplo ou atributo esteja presente na imagem do conceito. Pensamos que no ensino superior isso seja mais comum do que na educação básica, quando, em geral, procura-se contextualizar a situação antes de partir para a formalização dos conceitos.

Os elementos fundantes influenciam-se mutuamente e são retroalimentados, isto é, qualquer mudança em um deles pode acarretar em mudanças nos outros. Por exemplo, o contato com algum dado novo relativo ao conceito - como um novo contraexemplo - pode alterar as figuras mentais associadas ao conceito, que por sua vez, podem transformar um atributo relevante em irrelevante, que por sua vez, trarão um novo contraexemplo à tona, e assim sucessivamente. Sendo mais específico em nosso exemplo, quando um estudante entende que um quadrado é um retângulo, isso pode levar a uma alteração das figuras mentais existentes para quadrados e retângulos (como na Figura 2). Essa mudança, por sua vez, fará com que o atributo 'ter os lados diferentes' deixe de ser relevante para a classificação de um quadrilátero como um retângulo. A partir daí o exemplo protótipo de retângulo também poderá ser alterado.

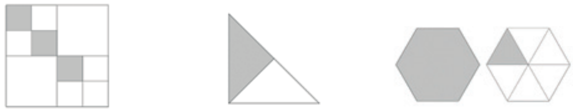
Os elementos fundantes - exemplos protótipos, figuras mentais e atributos relevantes e irrelevantes - formam a base para os julgamentos e, à medida que se repetem, podem se cristalizar e, nesse caso, formarão o que chamamos de associações. Visualizamos outras ligações e interconexões entre os elementos que compõem a imagem do conceito ilustrada pela Figura 5, bem como a influência da autoridade do professor em todos esses elementos. Contudo, optamos por um esquema simplificado e mais próximo do que utilizamos de fato na análise dos dados em nossa pesquisa de doutorado (BROETTO, 2016).

Todas as partes integrantes da estrutura representada na Figura 5 podem estar interconectadas de alguma forma. Porém, a existência, a qualidade e a força dessas ligações dependem do nível de compreensão matemática do indivíduo relativo a um determinado conceito. Alguém que possua uma compreensão instrumental de um dado conceito terá construído uma estrutura semelhante à representada na Figura 5, porém, com ligações fracas entre as diversas partes da imagem do conceito. Por outro lado, uma compreensão relacional possibilitará ao indivíduo a construção de ligações fortes entre as diversas partes de sua imagem do conceito. Entendemos uma ligação forte como uma ligação significativa e duradoura, isto é, ao ser acionada a estrutura - por algum estímulo como o nome do conceito ou por uma imagem - o sujeito é capaz de refazer todas as ligações e reativar toda a estrutura em sua mente. Quando as ligações são fracas, esse processo de reativação da estrutura fica comprometido.

Na verdade, toda a estrutura é sensível e está em constante transformação, e novos estímulos podem desencadear mudanças em qualquer parte da imagem do conceito que, por sua vez, poderá alterar outras partes. Todavia, a base é especialmente sensível, pois seus elementos são os primeiros que são formados toda vez que algum indivíduo é exposto a um novo conceito. Vamos exemplificar possíveis usos do modelo de análise de dados proposto na Figura 5 por meio de dois exemplos, sendo um na educação básica e outro no ensino superior.

No primeiro semestre de 2016, lecionando em uma turma de Proeja do Ifes, o primeiro autor deste artigo fazia uma revisão do conteúdo 'frações', e trabalhava com a ideia de fração como parte-todo. Vários exemplos com representações gráficas, como os itens 'a' e 'b' da figura 6, todos representando frações próprias, foram apresentados durante aproximadamente duas semanas. Em certa aula, pediu-se para que representassem a fração 4/3, quando um dos alunos disse que não seria possível, pois não é possível tomar 4 partes de 3 partes.

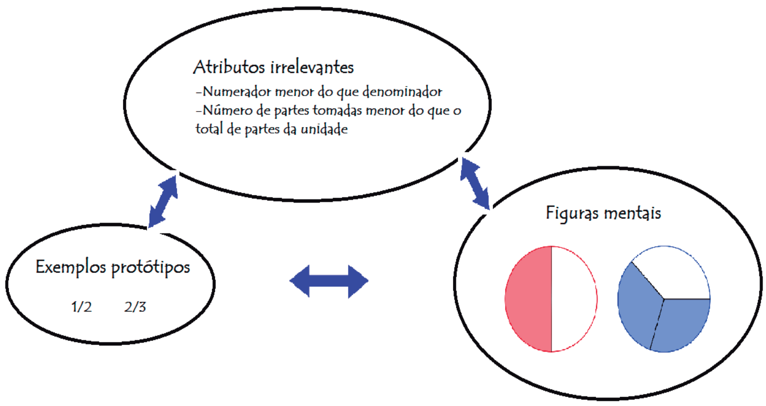
Figura 6 - Frações como parte-todo.



(a) (b) (c)

Um possível esquema (simplificado) da utilização do nosso modelo na análise desse caso está ilustrado na figura 7. Não é possível listar tudo que acontece em uma estrutura complexa como a imagem do conceito, e é bastante provável que outras figuras mentais, exemplos protótipos e atributos estejam presentes. Todavia, optamos por trazer um exemplo simplificado que evidenciasse a inter-relação de partes de elementos da imagem do conceito, e como o conteúdo de cada um dos balões da figura 7 reforçam-se mutuamente.

Figura 7 - Exemplo de utilização do modelo criado de imagem do conceito.



Quando o aluno foi confrontado com um caso que não se enquadrou nos seus exemplos protótipos de fração, sua primeira reação foi dizer que aquilo não se tratava de uma fração. Na verdade, esse aluno provavelmente havia construído para si um modelo para frações que chamamos de próprias, isto é, aquelas em que o numerador é menor do que o denominador. Pensamos que esse comportamento é comum, pois é reforçado pelos livros didáticos e pelos exemplos apresentados pelos professores, que, em geral, são de frações próprias. Nesses casos, o papel do professor é contribuir para o enriquecimento da imagem do conceito do aluno apresentando figuras como o item ‘c’ da figura 6 e discutindo a necessidade de atributos como ‘numerador menor do que denominador’. Feito isso, o aluno tem maiores chances de criar novas ligações em sua imagem do conceito que contribuam para um entendimento mais amplo do conceito de fração e assim provavelmente poderá elaborar imagem do conceito de fração imprópria.

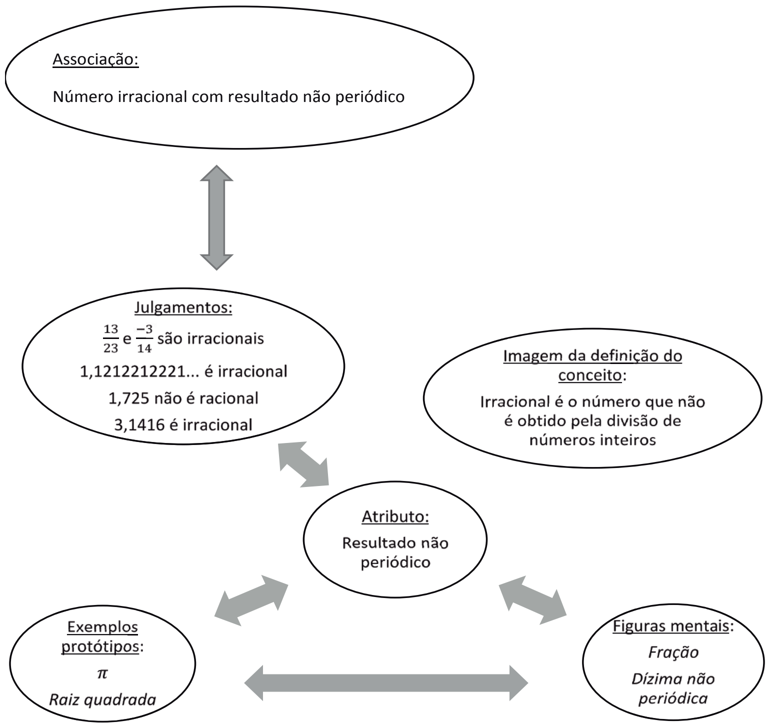
O segundo exemplo retiramos de Broetto (2016) e mostra como utilizamos o modelo de análise de dados aqui apresentado para compreender como um aluno da graduação em matemática utiliza a imagem do conceito relacionada aos números irracionais. A aluna se chama Agatha (nome fictício) e, por meio da aplicação de questionários e participação em diversas atividades, alguns atributos, exemplos protótipos, julgamentos e associações foram identificadas. Destacaremos aqui um dos atributos detectados e alguns dos julgamentos relacionados com esse atributo e que se cristalizaram na associação do número irracional com o 'resultado não periódico' (ver Figura 8).

Foi detectada uma relação do atributo 'resultado não periódico' com as figuras mentais 'fração' e 'dízima não periódica'. A relação com as dízimas não periódicas ficou evidente em diversos julgamentos realizados pela estudante, enquanto a relação com as frações foi detectada na classificação de 13/23 e -3/14 como números irracionais e em uma de suas falas, que transcrevemos a seguir.

> Pesquisador: *Alguém te pergunta aí no corredor o que é um número irracional. Você falaria o que para essa pessoa?*
> Agatha: *Se ele estiver em fração, se o resultado dele não der exato, exato assim, der uma dízima não-periódica, ele é irracional. Números irracionais podem ser escritos através de raiz, né? Se não forem quadrados perfeitos. Não sei. π é um número irracional, mas eu não sei te explicar, definir.*

Entendemos posteriormente que a estudante não observou a formação da parte periódica das frações 13/23 e -3/14, o que a levou a considerá-las como números irracionais, de acordo com o atributo 'resultado não periódico'. Nesse ponto, destacamos a imagem da definição do conceito de número irracional construída por Agatha (ver Figura 8). A observação cautelosa dessa definição poderia ter evitado que a estudante classificasse 13/23 e -3/14 como números irracionais. Porém, ou a aluna não utilizou sua própria definição ou não notou a contradição existente. Por isso, optamos por representar sua imagem da definição do conceito sem conexão com os outros elementos de sua imagem do conceito.

Figura 8 - Imagem do conceito de Agatha.



O atributo 'resultado não periódico' também tem relação com os exemplos protótipos de número irracional 'π' e 'raiz quadrada'. No caso de π entendemos que se deva à sua representação decimal, presente em muitos livros didáticos, reconhecidamente como não periódica. O papel da representação decimal de π como exemplo protótipo de número irracional é tão marcante que, mesmo quando a representação é periódica, mas remete a 3,1416..., o julgamento é se tratar de um número irracional, como no caso de 3,1416. No caso da raiz quadrada existe um equívoco já que podem resultar em números racionais ou até mesmo inteiros, mas pensamos que isso se deva aos exemplos de números irracionais mais comumente apresentados pelos livros didáticos, ao lado de π, que são $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$.

Apesar de 'resultado não periódico' ser um atributo relevante crítico dos números irracionais, isto é, presente em todos os exemplos positivos de números irracionais, a forma como se utiliza pode levar a equívocos. Assim como Agatha classificou 1,1212212221... corretamente como número irracional, também considerou 1,725 como número irracional. Em uma entrevista, entendemos que ela considerava decimais finitos como não periódicos, e essa 'ausência' de um período, fez com que classificasse 1,725 como número irracional. Aqui tivemos uma evidência muito forte de que a construção da imagem do conceito de número irracional de Agatha era eminentemente instrumental. Isso significa que suas relações e interconexões eram frágeis e superficiais, no sentido de que, por exemplo, a estudante não entendia por que uma fração de inteiros tem que, necessariamente, resultar em uma dízima periódica e, portanto, não pode ser a representação de um número irracional.

CONCLUSÃO

O modelo aqui proposto é um modelo em desenvolvimento. Foi criado para resolver um problema específico - análise de dados referentes a uma pesquisa de doutorado - mas, que entendemos ter potencial para ser utilizado em diversos casos, especialmente quando o pensamento matemático avançado está envolvido. Precisamos construí-lo, pois, as teorias de Tall e Vinner, Skemp e Hershkowitz sozinhas não eram capazes, do nosso ponto de vista, de responder a questões importantes relativas às relações entre a definição e as imagens mentais criadas pelos estudantes para o conceito de número irracional.

Dessa forma, é natural que o modelo ainda passe por alterações, ajustes e adequações para ser aplicado em outras situações diferentes da que aplicamos. No entanto, entendemos que seja um modelo promissor, com potencial para ser expandido. As suas limitações são evidentes. Além das limitações de qualquer modelo mental - como a pretensão de representar o que não se vê - o modelo aqui apresentado deve ser melhor compreendido e estabelecido à medida que o conhecimento relativo às relações entre suas partes forem aprofundadas. Por exemplo, dentre os três elementos fundantes, todos têm o mesmo peso em um julgamento? As figuras mentais não seriam mais efetivas do que os atributos ou exemplos de um conceito? Ou seriam os exemplos os elementos mais fortes, responsáveis inclusive pela formação das figuras mentais?

Muitas questões permanecem em aberto e muitas outras provavelmente ainda surgirão, o que é inevitável quando se propõe a utilização de uma estrutura como a que descrevemos brevemente neste trabalho. Inclusive a própria existência de uma estrutura pode ser questionada. Estamos cientes e preocupados com essas questões, porém, os resultados obtidos em Broetto (2016) e os exemplos aqui apresentados nos levam a pensar que o uso desse modelo possibilita compreender as dificuldades relacionadas à construção de um conceito matemático não elementar como os números irracionais e, portanto, pode contribuir para o ensino e aprendizagem de matemática.

REFERÊNCIAS

BINGOLBALI, Erhan; MONAGHAN, John. Concept image revisited. **Educational Studies in Mathematics**, v. 68, n. 1, p. 19-35, 2008.

BRASIL. **Base Nacional Curricular Comum -** proposta preliminar. 2ª versão revista. MEC/Consed/Undime. Brasília: Ministério da Educação, 2016. Disponível em: <https://goo.gl/msp6jY>. Acesso em 06/04/2017.

______. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio -** Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: Ministério da Educação, 2000.

______. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: matemática (3° e 4° ciclos do ensino fundamental). Brasília: MEC/SEF, 1998.

BROETTO, Geraldo. Claudio. **O ensino de números irracionais para alunos ingressantes da licenciatura em matemática**, 2016. Tese (Doutorado em Educação). Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2016.

DIAS, Marisa da Silva. **Formação da imagem conceitual da reta real**: um estudo do desenvolvimento do conceito na perspectiva lógico-histórica. 2007. 253 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007.

______. **Reta real**: conceito imagem e conceito definição. 2002. 107 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2002.

DOMINGOS, António. **Compreensão de conceitos matemáticos avançados -** a matemática no início do superior. 2003. 407 f. Tese (Doutorado em Ciências e Educação). Universidade Nova de Lisboa, Lisboa, 2003.

GIRALDO, Victor Augusto. **Descrições e conflitos computacionais**: o caso da derivada. 2004. 230 f. Tese (Doutorado em Ciências em Engenharia de Sistemas). Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia - COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2004.

HERSHKOWITZ, Rina. Aspectos psicológicos da aprendizagem da geometria. **Boletim GEPEM**, v. 32, p. 3-31, 1994.

SILVA, Ana Lúcia Vaz. **Números reais no ensino médio -** identificando e possibilitando imagens conceituais. 2011. 340 f. Tese (Doutorado em Ciências Humanas - Educação). Programa de Pós-Graduação em Educação, Pontifícia Universidade Católica, Rio de Janeiro, 2011.

SKEMP, Richard R. Relational understanding and instrumental understanding. **Mathematics Teaching**, n. 77, p. 20-26, 1976.

TALL, David. **Concept image and concept definition**. 2003. Disponível em: <https://goo.gl/7bCDXz>. Acesso em: 17 set. 2015.

______. The transition to advanced mathematical thinking: functions, limits, infinity and proof. In: GROUWS, David (Org.). **Handbook of research on mathematics teaching and learning**. Nova Iorque: Macmillan, 1992. p. 495-511.

______. The psychology of the advanced mathematical thinking. In: TALL, David (Org.). **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991. p. 3-24.

______. Concept image and concept definition. **Senior Secondary Mathematics Education**, n. 1983, p. 37-41, 1988.

TALL, David; VINNER, Shlomo. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. **Educational Studies in Mathematics**, v. 12, p. 151-169, 1981.

VINNER, Shlomo. Concept definition, concept image and the notion of function. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 14, n. 3, p. 293-305, 1983.

VINNER, Shlomo. The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In: TALL, David (Org.). **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991. p. 65-81.

VINNER, Shlomo. The role of examples in the learning of mathematics and in everyday thought processes. **ZDM**, v. 43, n. 2, p. 247-256, 5 jan. 2011. Disponível em: <https://goo.gl/Jk38Yu>. Acesso em: 25 set. 2013.

WADSWORTH, Barry. **Inteligência e afetividade da criança na teoria de Piaget**. 5. ed. São Paulo: Pioneira, 1997.

RECEBIDO EM: 01 jul. 2017.
CONCLUÍDO EM: 11 set. 2017.