VIDYA, v. 37, n. 2, p. 355-365, jul./dez., 2017 - Santa Maria, 2017. **ISSN** 2176-4603

COMO PROFESSORES EM FORMAÇÃO CONTINUADA COMPREENDEM O CONCEITO DE LIMITE

AS TEACHERS IN CONTINUOUS TRAINING UNDERSTAND THE CONCEPT OF LIMIT

ELENI BISOGNIN*
VANILDE BISOGNIN**

RESUMO

Nesse trabalho são apresentados resultados de uma pesquisa que teve como objetivo analisar como o conceito de limite é compreendido por professores em formação continuada, por meio da análise das imagens conceituais desses professores acerca do conceito de limite. Os participantes da pesquisa são professores que estão cursando o mestrado em Ensino de Matemática. Os resultados da pesquisa foram analisados seguindo as ideias de Tall e Vinner (1981) e Vinner (1991) sobre *imagem de conceito* e *definição de conceito* que constituíram a base da fundamentação teórica dessa pesquisa. Foi aplicada uma sequência de atividades com perguntas abertas sobre as diferentes representações do conceito de limite expressas na forma verbal, gráfica e algébrica. As observações feitas sobre o desempenho dos professores foram registradas no diário de campo das pesquisadoras e serviram de subsídios para análise dos dados. Os resultados da pesquisa apontam que o conceito de limite, apesar de ter sido trabalhado no curso de licenciatura, ainda apresenta dificuldades para compreensão pela maioria dos professores participantes da pesquisa, principalmente quando o conceito é apresentado por meio de uma representação gráfica.

Palavras-chave: Formação Continuada de professores. Educação Matemática. Conceito de Limite.

ABSTRACT

In this work are presented the results of a research that had as objective to analyze how the concept of limit is understood by teachers in continuous formation, through the analysis of the conceptual images of these teachers about the concept of limit. The research participants are professors who are pursuing a master's degree in Mathematics Teaching. The results of the research were analyzed following the ideas of Tall and Vinner (1981) and Vinner (1991) on concept image and definition of concept that formed the basis of the theoretical foundation of this research. A sequence of activities was applied with open questions about the different representations of the concept of limit expressed in verbal, graphic and algebraic form. Observations on teachers 'performance were recorded in the researchers' field diaries and served as input for data analysis. The results of the research indicate that the concept of limit, although it has been worked on in the undergraduate course, still presents difficulties for the understanding of the majority of the teachers participating in the research, especially when the concept is presented through graphic representation.

Keywords: *Continuing Teacher Training. Mathematics Education. Limit Concept.*

* Doutor em Matemática e Professora do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemá-tica do Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, RS. E-mail: eleni@unifra.br
** Doutor em Matemática e Professora do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Mate-mática do Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, RS. E-mail: vanilde@unifra.br

INTRODUÇÃO

O processo de ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral tem sido um tópico de interesse de pesquisadores da Educação Matemática, tanto em nível nacional quanto internacional, devido ao fato de que as noções fundamentais dessa área de estudo, que contempla os números reais, funções, limites, derivada e integral, serem tópicos que apresentam dificuldades para os alunos que cursam o ensino superior. Pesquisas como de Orton (1984), Tall e Vinner (1981), Amit e Vinner (1990), Tall (1991),Igliori e Almeida (2013), Denbel (2014),entre outros, tratam da problemática do ensino de conteúdos de Cálculo.

Segundo esses autores, as dificuldades de compreensão dos conceitos relacionados ao Cálculo Diferencial e Integral são resultados de diferentes causas e investigá-las e propor a superação das mesmas, são objetos de pesquisas fundamentais para a área de Educação Matemática.

Pesquisadores tais como, Vinner (1989), Tall (1994), Pimentel (1995), Cury (2001, 2009), Meyer e Igliori (2003), Meyer (2003), Nasser (2009), Pinto e Cunha (2014) e os trabalhos em Frota e Nasser (2009), entre outros, têm-se dedicado ao ensino e aprendizagem de tópicos de Matemática no Ensino Superior, em particular aos conceitos referentes ao **Cálculo Diferencial e Integral.** Os resultados dessas pesquisas indicam que os estudantes das disciplinas tanto de Cálculo como de Análise, têm melhor desempenho quando realizam atividades em que predominam questões que enfocam os aspectos operatórios e técnicos.

Na mesma linha de pesquisa, Artigue (1991), ao tratar do ensino e aprendizagem de diferentes conteúdos do Cálculo Diferencial e Integral, afirma que os alunos apresentam "um razoável domínio algoritmo algébrico e uma significante dificuldade em conceitualizar os processos de limite". (p. 176).

Os documentos oficiais como as Diretrizes Curriculares Nacionais (BRASIL, 2015) para os cursos de Licenciatura em Matemática indicam o conteúdo de limites de funções como um tópico fundamental num curso de Cálculo e recomendam que sejam abordados os aspectos analíticos, gráficos e suas aplicações. Apesar dessas recomendações, o que se observa ainda é que, o aspecto analítico se sobrepõe ao gráfico, ou seja, há uma valorização dos procedimentos técnicos em detrimento da exploração da capacidade intuitiva e gráfica.

O conceito de limite é essencial para a construção de outros conceitos básicos do Cálculo, como o conceito de taxa de variação, o conceito de derivada, de integral e de limite de sucessão numérica, além de ser uma ferramenta para resolução de problemas ou modelos oriundos de outras áreas do conhecimento.

Cornu (1991) destaca que o conceito matemático de limite possui uma posição central que permeia toda a análise matemática como base da teoria da aproximação, da continuidade e do Cálculo Diferencial e Integral. Segundo o autor este conceito matemático é uma idéia particularmente difícil, típico do tipo de pensamento exigido em matemática avançada.

Em particular, ao tratar do estudo de limites de funções, a maioria dos professores participantes da pesquisa informou que em seus cursos de graduação, o conceito foi introduzido sem relacionar com uma situação concreta, partindo-se, de imediato, para o estudo de regras operacionais seguido de exercícios. Não foram exploradas as múltiplas representações do conceito, especialmente a gráfica.

As dificuldades apontadas nos resultados das pesquisas acima indicadas motivaram o presente trabalho de investigação, realizado com professores em formação continuada que participam de um curso de mestrado em Ensino de Matemática, integrantes da disciplina de Fundamentos de Cálculo. Esta pesquisa tem como objetivo investigar qual conhecimento os professores têm a respeito do conteúdo de limite envolvendo as representações verbais, gráficas ou algébricas, que tipo de dificuldades os professores apresentam e como esses professores analisam, interpretam e relacionam as informações explicitadas pelas diferentes representações do conceito de limite.

Fundamentação Teórica

Para tentar compreender como se processa a aquisição de conhecimentos matemáticos os autores Tall e Vinner (1981), desenvolveram uma teoria com base nas noções de “imagem de conceito” e “definição de conceito”.

Os autores colocam que no trabalho de sala de aula, muitas vezes, há uma dissonância entre a linguagem usada pelo professor e a linguagem matemática. Essa dissonância está relacionada com a complexidade do cérebro humano, que funciona de uma forma que não segue a lógica matemática. Desse modo, cada indivíduo pensa de uma forma e na sala de aula uma idéia pode ser entendida por alguns alunos e não ser compreendida por outros. Para Tall e Vinner (1981) a imagem de conceito

> [...] descreve a estrutura cognitiva que está associada ao conceito que inclui todas as figuras mentais e propriedades associadas. Ela é desenvolvida ao longo dos anos, através de experiências de todos os tipos, mudando enquanto o indivíduo encontra novos estímulos e amadurece. (TALL; VINNER, 1981, p. 2).

Definição de conceito, segundo os autores, está relacionada às definições, que podem ter sido memorizadas ou construídas pelo indivíduo. É toda forma em palavras utilizadas para especificar um conceito, e essa forma de se expressar pode se modificar à medida que o sujeito é submetido a novos estímulos.

Para (TALL; VINNER, 1981, p.2) um conceito pode simplesmente ser memorizado pelos estudantes, mas também pode ser aprendido de modo significativo, na medida em que tenham oportunidades de criar diferentes imagens de conceitos referentes a um determinado conteúdo matemático. Assim, acredita-se que trabalhar um conceito, levando-se em consideração as suas múltiplas representações, é proporcionar aos alunos oportunidades de criar imagens ricas de significados que permitem a compreensão do conceito.

Ao trabalhar com um conceito matemático, as diferentes representações desempenham um papel fundamental no sentido de facilitar sua construção e podem contribuir significativamente para construção de imagens conceituais que levem, de fato, à compreensão do conceito.

De acordo com Tall (1994), o ensino centrado nos aspectos técnicos e analíticos, que desvaloriza o raciocínio que faz uso da representação visual, é uma das razões do insucesso em matemática. Com isso, os estudantes têm dificuldades em fazer a conexão do pensamento visual com o pensamento analítico e não conseguem passar facilmente de uma representação para outra.

De acordo com Tall (1992) e Willians (1991), o conceito de limite é fundamental para compreensão de outros conceitos do Cálculo e da Análise Real. Os autores relatam que é muito difícil um aluno ter uma compreensão completa do conceito de limite pois, em geral, ele sente dificuldade ao trabalhar com este conceito quando está lidando com funções ou com sequências numéricas. Os autores destacam ainda que muitas das dificuldades encontradas na compreensão de outros conceitos do Cálculo estão relacionadas com a não compreensão do conceito de limite. Um dos motivos pode estar relacionado à construção de imagens de conceito fracas ou inadequadas a respeito desse conceito e a pouca ligação com os demais conceitos do Cálculo. Imagens de conceito bem construídas e um estabelecimento de relações entre os tópicos de Cálculo são fundamentais para a compreensão do significado de limite.

Numa pesquisa, com o propósito de investigar a compreensão do conceito de derivada, Dreyfus (1990) e Tall (1994), afirmam que a visualização gráfica desempenha um papel central na aprendizagem do conceito e na compreensão das relações e propriedades. No entanto, para os autores, o aspecto visual não é valorizado e raramente os alunos traçam uma reta tangente a uma curva em um determinado ponto a partir de sua representação gráfica.

Da análise dos resultados das referidas pesquisas, é possível inferir que, em geral, os alunos apresentam dificuldades de abordar um conceito de limite ou de derivada utilizando diferentes representações. Estas dificuldades podem estar relacionadas com a valorização, no trabalho em sala de aula, de aspectos analíticos em detrimento de aspectos gráficos e podem contribuir para a criação de imagens de conceito restritas.

Kaput (1992, apud KARATAS et al, 2011) destaca que o uso de mais de uma representação auxilia os alunos a obter uma melhor imagem de um conceito matemático. Assim, a capacidade de identificar e representar o mesmo conceito por meio de diferentes representações é considerado como um pré-requisito para a compreensão do conceito.

Procedimentos Metodológicos

A fim de atender ao objetivo desta pesquisa e responder às questões propostas, foi aplicado um teste composto de nove questões sobre o conceito de limite para um grupo de dez professores de Matemática, alunos de um Curso de Mestrado em Ensino de Matemática, no primeiro semestre de 2015.

Este teste foi aplicado na disciplina de Fundamentos de Cálculo e os resultados serviram de subsídios para identificar os conhecimentos dos professores a respeito desse conceito, as dificuldades apresentadas e planejar as atividades da disciplina. A turma foi dividida em três grupos sendo dois grupos constituídos de três professores e um grupo de quatro. A aplicação teve uma duração de duas horas-aula de 60 minutos cada. Após a conclusão as respostas foram separadas e agrupadas de acordo com cada categoria para serem analisadas. Para tanto as respostas foram classificadas em correta, parcialmente correta, incorreta e sem resposta. Foram consideradas corretas as respostas que atendiam a todos os aspectos solicitados e com justificativas corretas. Àquelas respostas que apresentavam algum aspecto correto e outros incorretos ou com justificativas corretas, mas não correspondendo, por exemplo, ao gráfico traçado, foram consideradas parcialmente corretas. Foram consideradas incorretas as respostas que não atenderam a nenhum dos aspectos solicitados e foram separadas as questões que não foram respondidas.

O teste proposto foi composto de questões abertas primeiramente expressas de modo verbal, a segunda parte foi constituída de questões em que as funções foram descritas por meio de uma representação algébrica e, no terceiro grupo de questões, as funções foram descritas graficamente.

As Questões Propostas e a Análise das Soluções

No primeiro grupo foram apresentadas questões descritas na forma verbal as quais foram adaptadas de Stewart (1992). A seguir são apresentadas as questões e as respostas dadas pelos alunos.

I)Analise se as afirmativas são verdadeiras ou falsas e justifique sua resposta.

$I_{a)}$ Para que exista o limite de uma função num ponto *x=a* basta que exista o limite à direita e à esquerda da função nesse ponto.

I_b) Para que o limite de uma função exista no ponto x=a é necessário que a função esteja definida nesse ponto.

I_c) Se os valores f(x) de uma função f se aproximam cada vez mais de um número então existe o limite dessa função nesse ponto.

O Quadro 1, a seguir, mostra o número de respostas dos dez alunos, de acordo com a classificação estabelecida.

Quadro 1 - Distribuição das questões de acordo com a classificação.

Tipo de resposta	I_a	I_b	I_c
Correta	6	3	3
Parcialmente correta	3	1	4
Incorreta	1	4	3
Sem resposta	0	2	0

Dos dez participantes, seis responderam corretamente a questão I_a. Eles afirmaram que a sentença não é verdadeira, mas, se os limites laterais existem e são iguais então o limite da função existe nesse ponto. Dos três professores que responderam de modo parcialmente correto, escreveram as seguintes justificativas:

A afirmação é correta desde que os limites laterais sejam iguais e a função esteja definida no ponto x=a.

Um professor respondeu que a afirmativa era verdadeira e "*que para existir o limite a função deveria apresentar um "salto" nesse ponto".* Essa justificativa foi classificada como incorreta.

Quanto a questão I_b, dois professores responderam corretamente afirmando que "*para uma função ter limite num ponto não é necessário a função estar definida nesse ponto mas, os limites laterais à direita e à esquerda, devem existir e serem iguais".* Dois responderam que não há necessidade da função estar definida no ponto, mas apresentaram, como exemplo, o gráfico de uma função quadrática e consideraram o ponto x=0 em que a função está definida no ponto.

No exemplo dado os professores justificaram: *"a função quadrática possui limite no ponto x=0 pois os limites laterais tanto à esquerda como à direita valem zero".*

Essa justificativa foi considerada correta.

Pode-se inferir que esses professores evocaram imagens conceituais relativas ao conceito de limite quando este está representado graficamente, mas, eles ainda não têm clareza das condições necessárias para descrever a definição de limite e analisar sua veracidade no caso de as afirmações serem descritas verbalmente.

Quatro professores responderam que se a função está definida no ponto é porque os limites laterais existem e, portanto, o limite existe. Essa justificativa foi considerada incorreta.

Dois professores não justificaram as respostas dadas.

Na questão I_c, três professores responderam que a afirmação era verdadeira e justificaram pela definição de limite de uma função num ponto. Acrescentaram que esta era uma condição necessária para existência do limite. Um deles acrescentou que dada a *função $f(x) = x+1$, por exemplo, os valores da função f se aproximam de 1 quando x se aproxima de zero.* Quatro respondentes afirmaram que a sentença é verdadeira mas, justificaram considerando casos particulares de gráficos de uma função linear e uma função quadrática. Três professores responderam de modo incorreto. Afirmaram que a sentença era verdadeira mas que "*em alguns casos a função pode crescer indefinidamente".*

Pode-se inferir, das respostas desses professores participantes da pesquisa, que suas imagens de conceito a respeito de limite, estão relacionadas à definição da função no ponto, isto é, para existir o limite é necessário a função estar definida no ponto.

Percebemos, ainda, que os entraves relativos à aprendizagem do conceito de limite

estão ligados, principalmente, às dificuldades em correlacionar as noções intuitiva e formal desse conceito.

No segundo grupo foram apresentadas questões em que as funções foram descritas de modo algébrico.

II) Responda as questões a seguir e justifique sua resposta.

II_a) Existe o limite da função f no ponto x= 0 se $f(x)= -3/(x-3)$, $x \neq 3$?

II_b) Existe o limite da função f no ponto x= -1 se $f(x)= (x^3-x^2-x-1)/(x+1)$?

II_c) Seja $f(x) = (x+1)/(x-1)$. Existe o limite da função f no ponto x= -1?

No Quadro2, a seguir são mostradas as respostas apresentadas pelos professores de acordo com a classificação.

Quadro 2 - Distribuição das questões de acordo com a classificação.

Tipo de resposta	**II_a**	**II_b**	**II_c**
Correta	6	4	6
Parcialmente correta	2	2	2
Incorreta	2	2	2
Sem resposta	0	2	0

Para a questão II_a seis professores responderam que existia o limite no ponto x=0 e que este limite valia 1. Justificaram, também, que o ponto x=0 "*não era problema",* pois, "*a função não apresenta uma descontinuidade nesse ponto".* Pode-se inferir desta resposta, que estes professores interpretaram as condições dadas e evocaram imagens conceituais relativas à continuidade de uma função num ponto e relacionaram esse fato com a existência do limite. Dois professores justificaram corretamente, mas, erraram o cálculo. Colocaram que substituindo o valor de x resultava que o limite valia -1. Dois responderam que o limite não existia pois, no ponto x=3, a função ficava ilimitada.

Na questão II_b, dois professores não responderam e quatro responderam corretamente. Colocaram que bastava dividir o numerador pelo denominador e substituir o valor de x para obter o valor do limite igual a 4.

Dois professores efetuaram a simplificação, mas erraram no sinal do valor do limite.

Dois professores não responderam justificando que "*era muito complicado*".

Na questão II_c, seis responderam corretamente, obtendo o valor zero para o limite e comentaram que o raciocínio era semelhante à questão II_a. Possivelmente esses professores conseguiram estabelecer uma conexão entre as duas questões e evocaram as imagens conceituais criadas a partir da questão anterior.

Dois professores calcularam corretamente, mas, não justificaram seus cálculos e dois interpretaram erradamente a questão. Descreveram que "*quando x se aproxima de -1 o denominador se aproxima de zero, portanto o limite não existe".*

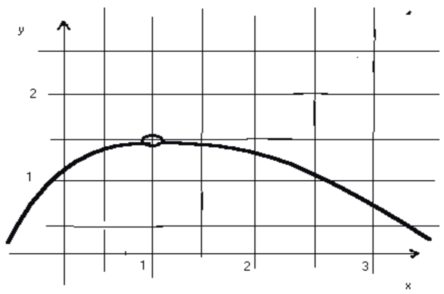
Pode-se concluir que os obstáculos relativos à aprendizagem do conceito de limite estão relacionados principalmente à dificuldade em correlacionar as ideias intuitivas e a noção formal desse conceito.

Tall (1992) ao investigar a compreensão do conceito de limite por alunos no primeiro ano de graduação destaca que a maioria dos alunos tem em mente que calcular o limite de uma função é simplesmente uma substituição mecânica e uma manipulação algébrica e muitos deles pensam que o limite e o valor da função no ponto coincidem. Esses aspectos também foram identificados nessa investigação.

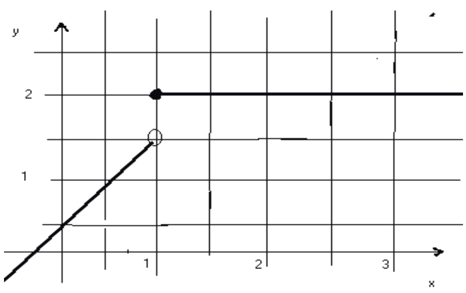
No terceiro grupo foram apresentadas questões em que as funções foram descritas por meio de seus gráficos. Essas questões foram adaptadas de Karatas et al. (2011, p.263).

III) Analise os gráficos, a seguir, e verifique se existe o limite da função no ponto x=1.

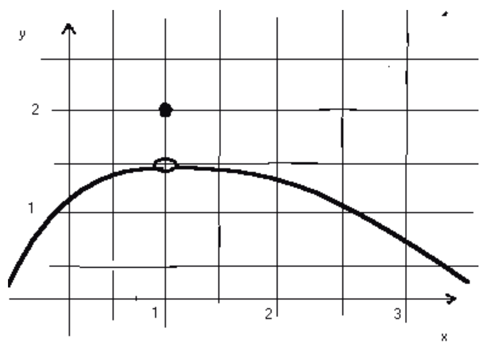
III_a)



III_b)



III_c)



No Quadro 3, a seguir, é apresentada a classificação das respostas a esse grupo de questões.

Quadro 3 - Distribuição das questões de acordo com a classificação.

Tipo de resposta	III_a	III_b	III_c
Correta	3	3	3
Parcialmente correta	4	2	3
Incorreta	3	4	3
Sem resposta	1	1	1

Nas respostas apresentadas para a questão $III_{a,}$ somente três professores justificaram que o limite da função existia no ponto x=1 porque os limites laterais à esquerda e à direita existiam e eram iguais. Colocaram ainda que, nesse caso, não havia necessidade de a função ser definida no ponto. Quatro responderam que o limite existia, mas, não justificaram, de modo muito claro, que os limites laterais existiam e eram iguais. Três colocaram que: " *para existir o limite a função não poderia apresentar buracos*" e um aluno não respondeu.

Na questão $III_{b\,,}$ três professores justificaram que o limite não existia porque os limites laterais, apesar de existirem, não eram iguais. Dois colocaram que o limite não existia porque os limites laterais eram distintos uma vez que a função estava definida no ponto x=1 somente para $x \geq 1$. Quatro justificaram que o limite não existia porque não existiam os limites laterais. Esses professores possivelmente ainda não possuíam imagens conceituais claras sobre o conceito de limites laterais.

Um professor não respondeu.

Para a questão III_c, três professores responderam que o limite existia e que a justificativa era igual à primeira questão desse grupo pois, "*para existir o limite não é necessário a função estar definida no ponto, basta que os limites laterais existam e sejam iguais".* Três responderam que o limite existia porque os limites laterais existiam e eram iguais a 2. Três professores colocaram que o limite não existia porque f(1) = 2. Um professor não respondeu.

Observa-se, das respostas dos professores, que as imagens do conceito de limite são pobres e ainda apresentam pouca clareza e muitas dificuldades para interpretar e transferir o conceito de uma situação para outra.

Das análises das respostas das questões é possível concluir que os professores em formação continuada, apresentam dificuldades na compreensão do significado do conceito de limite quando este é apresentado em diferentes formas. A pesquisa realizada está de acordo com resultados das pesquisas Tall e Winner (1981) e Winner (1991) em que os algoritmos algébricos se sobressaem em relação aos demais. Isto possivelmente deve-se ao fato de que nos cursos de licenciatura o aspecto técnico prevalece sobre a interpretação gráfica do conceito de limite quando esse conceito foi construído.

A verificação das concepções desses professores aponta para o fato de que a maioria deles possui imagens de conceito muito limitadas a respeito de limites e isto pode ser atribuido a diferentes fatores, como por exemplo, o tempo restrito que o professor tem nos cursos de licenciatura para abordar este conteúdo, a forma como o conceito foi introduzido, noções limitadas sobre os conceitos de pré-cálculo, necessários para sua compreensão.

Vários pesquisadores investigaram as concepções e as dificuldades que os alunos em geral têm sobre o conceito de limite e as conclusões obtidas nessa investigação estão de acordo com os resultados desses pesquisadores. Tall (1992) e William (1991), mencionam que as concepções de limite de modo geral são confundidas com a ideia de: se uma função pode atingir seu limite, se o limite é um processo ou se o limite é uma aproximação de um valor que nunca é atingido, concepções essas também verificadas nessa pesquisa.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Da análise das respostas às questões propostas, o estudo revelou que a maioria dos professores possui problemas em termos de conhecimentos do conceito de limite quando a função é apresentada principalmente na forma de um gráfico. Esta afirmação deve-se ao fato de que a maioria não conseguiu justificar, de forma conveniente, as questões do terceiro grupo, mesmo nas situações em que as funções foram apresentadas de forma mais simples. Especificamente, em relação às dificuldades demonstradas pelos alunos, elas estão relacionadas, possivelmente, com a construção de um número restrito de imagens conceituais.

Os professores, em geral, trabalharam o conceito de limite durante sua graduação, mas o que se observou é que criaram imagens conceituais muito restritas, que pouco contribuíram para a compreensão do conceito. As imagens conceituais restritas estão relacionadas com o trabalho que é realizado na sala de aula que, segundo Tall (1994), está centrado no desenvolvimento de um vasto número de algoritmos e de regras. Para o autor, a forma como os conceitos do Cálculo são ensinados em sala de aula faz com que os alunos se sintam incapazes de utilizá-los na resolução de atividades que envolvem estes conceitos em outros contextos.

Ao trabalhar com os conceitos relacionados com o limite de funções, a criação de imagens conceituais, especialmente as advindas das representações gráficas, é fundamental para a sua compreensão. De acordo com Pinto (2009, p.33), ao referir-se a construção de imagens conceituais, "*uma vez constituída a imagem conceitual para um conceito, é a esta imagem que nos referimos, ao ouvirmos o nome do conceito".*

Em relação ao objetivo desta investigação, constatou-se que a maioria dos participantes recordou alguns conceitos relacionados ao limite de uma função que foram, possivelmente, memorizados ao longo da formação inicial, especialmente com os aspectos algébricos, mas sentiram dificuldades de aplicá-los em um novo contexto de conhecimento. Sobre o trabalho dos professores, no que se refere à representação gráfica, ficou clara a dificuldade que tiveram para identificar as propriedades e de justificar matematicamente suas afirmações. Outras dificuldades foram observadas em relação à compreensão do conceito de limite oriundas, possivelmente, da forma errônea de entendê-lo e devido a equívocos relacionados com a falta de compreensão e a criação de poucas imagens conceituais.

As dificuldades de interpretar o conceito de limite detectadas nesta investigação foram aspectos que se buscou aprofundar ao longo da disciplina de Fundamentos de Cálculo. O conceito de limite é fundamental na Matemática e sua compreensão tem implicações na resolução de problemas em níveis avançados. Assim, o conhecimento que os professores têm sobre limite e a exploração de suas múltiplas representações, com ênfase nas conexões entre as representações verbal, algébrica e gráfica, precisa ser discutido, nas disciplinas de Cálculo. As conclusões deste trabalho apontam no sentido de que, não apenas em relação ao conceito de limite, mas também em relação a outros conceitos, se valorize e integre, nas práticas de sala de aula, abordagens diversificadas no sentido de criar imagens conceituais que deem significado aos tópicos abordados.

REFERÊNCIAS

AMIT, M. & VINNER, S. Some misconceptions in calculus: anedotes or the tip of the iceberg? In George Booker, Paul Cobb & T. N. de Mendicuti (Eds.), **Proceedings of the 14th International Conference for the Psychology of Mathematics Education**, 1, Oastepec, Mexico: CINVESTAV, p. 3-10, 1990.

ARTIGUE, M. Analisys. In D. Tall (ed.), **Advanced Mathematical Thinking**, Kluwer, Dordrecht, p. 167-198, 1991.

ALMEIDA, M.V.; IGLIORI, S.B.C.; Educação Matemática no Ensino Superior e abordagens de Tall sobre o ensino/aprendizagem do Cálculo. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 15, n. 3, p. 718-734, 2013.

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. **Diretrizes Curriculares** Nacionais para a formação inicial em nível superior 2015. Disponível em: <http:// www.mec.gov.br>. Acesso em: 15 ago. 2016.

CORNU, B.; Limits. In: TALL,D.(ed). **Advanced Mathematical Thinking**, Kluwer Academic Press. p. 153-166, 1991.

CURY, H. N.; Trabalhos realizados com alunos de Cálculo Diferencial e Integral A. **Anais do VII Encontro nacional de Educação Matemática.** Rio de Janeiro. Brasil. 2001.

CURY, H. N. ; Pesquisas em análise de erros no ensino superior: retrospectiva e novos resultados. In: FROTA, M. C. R.; NASSER, L. (Orgs). **Educação Matemática no Ensino Superior:** pesquisas e debates. Recife: SBEM. p. 223-238, 2009.

DREYFUS, T.; Advanced Mathematical Thinking. In: NESHER, P. et al. (Orgs). **Mathematics and Cognition:** a research synthesis by the international group for the psychology of mathematics education. Cambridge, University Press. p. 113-134, 1990.

FROTA, M. C. R.; NASSER, L.; **Educação Matemática no Ensino Superior:** pesquisas e debates. Recife: SBEM. 2009.

KARATAS, I; GUVEN, B; CEKMEZ, E.; A Cross-Age Study of Student's Understanding of Limit and Continuity Concepts. In: **Bolema,** n. 38, v. 24, p. 235-264, 2011.

MEYER, C.; **Derivada/Reta Tangente: imagem conceitual e definição conceitual.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo. 2003.

MEYER, C.; IGLIORI, S.B. C.; Um estudo sobre a interpretação geométrica do conceito de derivada por estudantes universitários. **Anais** do II Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, Santos, São Paulo, Brasil. 2003.

NASSER, L. ; Uma pesquisa sobre o desempenho de alunos de Cálculo no traçado de gráficos. In: FROTA, M. C. R.; NASSER, L. (Orgs). **Educação Matemática no Ensino Superior:** pesquisas e debates. Recife: SBEM. p. 43-56, 2009.

ORTON, A. Students' Understanding of Differentiation. **Educational Studies in Mathematics**, v. 14, p. 235-250, 1983.

PIMENTEL, T. ; **O papel da calculadora gráfica na aprendizagem de conceitos da análise matemática: um estudo de uma turma do 11º ano com dificuldades**. Lisboa: APM. 1995.

PINTO, M. F. (2009). Re-visitando uma teoria: o desenvolvimento matemático de estudantes em um primeiro curso de análise real. In: FROTA, M. C. R; NASSER. L. (Orgs) **Educação Matemática no Ensino Superior:** pesquisas e debates. Recife; SBEM. p. 27-42, 2009.

PINTO, M. M.F.; CUNHA, S.R.; O conhecimento esperado sobre limites e continuidade a partir de uma análise das provas unificadas de Cálculo I na UFRJ. **Educ. Matemática Pesquisa***,* São Paulo, v. 16, n. 1, p. 259-278, 2014.

STEWART, J.; **Cálculo**. São Paulo: Pioneira Thomson Learning. 1992.

TALL, D.; The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity and Proof. In: Grouws, D A (ed). **Handbook of Research on Mathematic Teaching and Learning.** New York. McMillan, p. 495-511, 1992.

TALL, D. ; Computer environments for the learning of mathematics. In: BICHLER, R. et al (Ed.) **Didatics of mathematicsas a scientific discipline.** Dordrecht, Kluwer. p. 189-199, 1994.

TALL,D.; **Advanced Mathematical Thinking***.* ME Library :Kluwer Academic Press.1991

TALL, D.; VINNER, S.; Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. In: **Educational Studies in Mathematics**. v. 12, p. 151-169, 1981.

VINNER, S.; The avoidance of visual consideration in Calculus Students. In:EISENBERG, T.; DREYFUS, T.(Eds). **Focus on learning problems in mathematics.** n. 2, v. 11, p. 149-156, 1989.

VINNER, S.; The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics In Tall, D (Ed), **Advanced Mathematical Thinking***.* ML Library: Kluwer Academic Press: p. 65-81, 1991.

WILLIAMS, SR.; Models of Limit held by College Calculus Students in **Journal for Research in Mathematics Education,** *v.* 22, n. 3, p. 219-236, 1991.

RECEBIDO EM: 25 jul. 2017.
CONCLUÍDO EM: 29 out. 2017.