VIDYA, v. 37, n. 2, p. 459-477, jul./dez., 2017 - Santa Maria, 2017. **ISSN** 2176-4603

PERCURSOS DE APRENDIZAGEM DE ALUNOS AO RESOLVEREM UMA TAREFA DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

STUDENTS' LEARNING PATHAWAY BY SOLVING A TASK OF DIFFERENTIAL AND INTEGRAL CAUCULUS

ADRIANA HELENA BORSSOI*
ANDRÉ LUIS TREVISAN**
HENRIQUE RIZEK ELIAS***

RESUMO

O objetivo do presente artigo é analisar os percursos de aprendizagem de alunos de uma turma especial, sem presença obrigatória, de Cálculo Diferencial e Integral 1 na busca de um modelo matemático para responderem a uma tarefa proposta. A pesquisa foi realizada com alunos de uma universidade pública federal do estado do Paraná e, por meio da análise de suas produções escritas registradas em um Ambiente Virtual de Ensino e Aprendizagem, buscamos indícios da passagem de um modelo particular da situação proposta para um modelo geral, o que favoreceria o desenvolvimento do pensamento matemático desses alunos. Analisamos o movimento de resolução de dez grupos de alunos, mas focamos nas produções escritas de apenas dois grupos, pois estes, apesar de apresentarem percursos distintos, realizaram o esperado movimento pela busca de um modelo geral, explicitando um raciocínio criativo desejado para a aprendizagem da matemática.

Palavras-chave: Ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral. Tarefas matemáticas. Percursos de aprendizagem. Ambiente Virtual de Ensino e Aprendizagem.

ABSTRACT

The objective of this paper is to analyze the students' learning pathway of a special class, without compulsory presence, of Differential and Integral Calculus 1 in the search for a mathematical model to answer a proposed task. The research was carried out with students from a federal public university in the state of Paraná and, through the analysis of their writing productions recorded in a Virtual Teaching and Learning Environment, we looked for evidence of the passage from a particular model of the situation proposed to a general model, which would be favorable the development of the mathematical thinking of these students. We analyzed the resolution movement of ten groups of students, but we focused on the writing production of only two groups, since these, despite presenting distinct paths, made the expected movement for the search of a general model, explaining a desired creative reasoning for learning of mathematics.

Keywords: *Teaching and learning of Differential and Integral Calculus. Mathematics tasks. Learning pathway. Virtual Teaching and Learning Environment.*

* Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL). Professora da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Londrina/PR, Brasil. E-mail: adrianaborssoi@utfpr.edu.br.
** Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL). Professor da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Londrina/PR, Brasil. E-mail: andrelt@utfpr.edu.br.
*** Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL). Professor da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Londrina/PR, Brasil. E-mail: henriqueelias@utfpr.edu.br.

INTRODUÇÃO

Alunos com dificuldades em conceitos matemáticos básicos, índice de reprovação elevado, salas cheias, alto número de alunos que procuram se matricular em uma disciplina, mas não há turmas para todos (muitos alunos, poucas salas de aula e/ou número de professores insuficiente). Essa descrição é bem conhecida para muitos professores de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) de muitas universidades brasileiras. Para a Educação Matemática, enquanto uma área do conhecimento, esses problemas também são bastante comuns, pois são diversas as pesquisas que discutem aspectos do ensino e da aprendizagem de CDI em cursos de Ensino Superior. Isso fica evidenciado em livros (por exemplo, o livro *Disciplinas Matemáticas em Cursos Superiores: reflexões, relatos e propostas*, organizado por Helena Cury) e em pesquisas de levantamento bibliográfico que explicitam a diversidade de publicações seja em congressos específicos da área de Educação Matemática (por exemplo, ZEFERINO; WROBEL; CARNEIRO, 2013) ou em congressos de Educação em Engenharia (por exemplo, WROBEL; ZEFERINO; CARNEIRO, 2013).

Nós, professores universitários interessados em compreender e enfrentar os problemas referentes às disciplinas de Matemática, em particular de CDI, na instituição pública em que atuamos, também temos nos dedicado a pesquisar nossas práticas, a aprendizagem de nossos alunos, nossa instituição, enfim, nossa realidade. Assim, munidos dessa vasta literatura acadêmica acerca do ensino e da aprendizagem de CDI, temos desenvolvido, desde o primeiro semestre de 2014, um projeto de pesquisa[1] que visa investigar os processos envolvidos na caracterização, na implementação e na avaliação de um ambiente educacional para a disciplina de CDI e suas consequências para a aprendizagem.

Por mais que as pesquisas já realizadas no âmbito da Educação Matemática nos forneçam uma base para lidarmos com a realidade das salas de aula de CDI, é preciso, também, refletirmos e pesquisarmos a nossa situação particular para avançarmos na busca por minimizar os problemas por nós enfrentados. Diante disso, temos nos debruçado a investigar as condições reais da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) - Câmpus Londrina, que possui, atualmente, 5 cursos de Engenharia (Ambiental, Materiais, Mecânica, Produção e Química), o curso de Licenciatura em Química e o curso de Tecnologia em Alimentos. Quando afirmamos nosso intuito de caracterizar um ambiente educacional em condições reais de ensino, temos que levar “em consideração aspectos estruturais (estrutura da instituição de ensino, a natureza dos cursos de graduação oferecidos por ela, o perfil do egresso que se almeja e o perfil dos alunos matriculados na disciplina de Cálculo, entre outros) e aspectos pedagógicos e procedimentais” (BORSSOI; SILVA; FERRUZZI, 2016, p. 4).

Do ponto de vista dos aspectos pedagógicos e procedimentais, o ambiente educacional que temos proposto e investigado ao longo do referido projeto busca atender as seguintes características, apontadas por Palha et al. (2013): os alunos trabalham a partir de sequências de tarefas não precedidas por exemplos, adaptadas para que se tornem problemas para serem resolvidos; o professor, ao invés de sempre fornecer explicações, incentiva os alunos a apresentar e discutir suas ideias; os alunos trabalham sempre que possível em grupos e participam de discussões matemáticas, mostrando, explicando, justificando suas ideias.

Do ponto de vista dos aspectos estruturais[2], muitas são as características, mas uma das situações delicadas que temos encontrado na instituição é o alto índice de reprovação nas turmas de CDI 1, que gera uma grande procura por vagas nas turmas regulares dessa disciplina.

[1] Aprovado no Edital Universal 14/2014 do CNPq.

[2] Ramos, Fonseca, Trevisan (2016) nos trazem mais detalhes sobre nossas condições reais de ensino.

Entretanto, nem sempre essa grande procura pode ser atendida pelo Departamento Acadêmico de Matemática (DAMAT), pois não há uma quantidade de professores suficiente, ainda mais se considerarmos outras disciplinas que apresentam problema semelhante, como Geometria Analítica e Álgebra Linear. Uma alternativa que temos encontrado é a chamada disciplina Sem Presença Obrigatória (SPO), em que o professor fica à disposição para atender os alunos, mas não há aulas regulares. O conteúdo, as tarefas e boa parte do acompanhamento dos estudantes são realizados pelo Ambiente Virtual de Ensino e Aprendizagem (AVEA), no MOODLE[3]. Essa foi uma maneira que encontramos de matricular e atender uma maior quantidade de alunos.

A proposta da disciplina nessa modalidade se deve à necessidade de ampliar a oferta de vagas para alunos dependentes na disciplina, no contexto da instituição. Assim, a proposta, organizada por uma comissão do DAMAT e aprovada pelo Conselho de Graduação e Educação Profissional da universidade, foi uma alternativa à demanda apresentada.

Nessas condições da disciplina SPO, as tarefas apresentadas aos alunos, bem como o acompanhamento e as ações dos professores, precisam ser pensadas levando em conta certas particularidades como: (i) todos alunos que cursam essa disciplina especial já reprovaram, pelo menos, uma vez em CDI 1 e, portanto, demandam uma atenção específica; (ii) pelo fato de não ter aulas regulares e não cobrar presença obrigatória, espera-se que os alunos tenham iniciativa para conduzirem com maior autonomia sua própria aprendizagem. Nesses casos, a interação entre os alunos pode ser central para a aprendizagem de cada um deles.

Em Trevisan, Borssoi e Elias (2015), analisamos o movimento de elaborar, aplicar, analisar, discutir e reelaborar uma sequência de tarefas desencadeada a partir de uma situação proposta a alunos de uma turma regular de CDI 1 de cursos de Engenharia, que envolvia a construção de uma calha. Dada a diferença de contexto entre uma turma de disciplina regular e uma turma de uma disciplina SPO e as especificidades que levantamos no parágrafo anterior para esta última, propusemos, novamente, a discussão acerca da construção de uma calha para alunos de uma disciplina SPO. Diante disso, o objetivo do presente artigo é *analisar os percursos de aprendizagem de alunos de uma turma SPO de CDI 1 ao resolverem uma tarefa*, *na busca de um modelo matemático para a situação proposta.*

Iniciamos o artigo apresentando nossas concepções teóricas sobre tarefas matemáticas e sobre o potencial destas para propiciar aos alunos a elaboração de uma nova realidade matemática (GRAVEMEIJER; VAN GALEN; KEIJZER, 2005) ao buscarem um modelo matemático para a tarefa apresentada. Ao processo pelo qual os alunos caminham na construção do conhecimento matemático, traçando estratégias para passar de um modelo particular para um modelo geral diante da situação proposta, estamos chamando, neste artigo, de percurso de aprendizagem. Na sequência, detalhamos o contexto em que estamos situados, apresentando suas especificidades, e trazemos as tarefas e a maneira como foram apresentadas aos alunos. Na seção seguinte, descrevemos a organização dos dados, obtidos a partir das respostas dos alunos quando lidavam com uma das duas tarefas propostas, e os procedimentos de análise adotados. Em seguida, realizamos as análises das produções escritas de dois dos dez grupos de alunos participantes ao buscarem um modelo matemático para a situação proposta. Finalizamos o artigo destacando alguns pontos positivos da experiência relatada e indicando possíveis continuidades para nossas pesquisas.

[3] MOODLE - Modular Object Oriented Dynamic Learning Environment. Nas próximas seções, daremos mais detalhes sobre este recurso no contexto da disciplina SPO.

TAREFAS MATEMÁTICAS

Uma das ações desenvolvidas durante a realização do projeto, do qual este artigo é um recorte, trata da organização de tarefas para integrar o ambiente educacional. Para tanto, buscamos investigar as influências dessas tarefas em processos de aprendizagem em condições reais de ensino e identificar como essas tarefas podem ser utilizadas pedagogicamente em aulas de CDI.

Diversos autores definem o que entendem por tarefa. Ponte et al. (2015) afirmam que no "ensino da Matemática que valoriza o papel ativo dos alunos, este conceito é essencial, uma vez que neste caso as tarefas são reconhecidas como elemento organizador da atividade dos alunos" (p. 111). Fica evidente, nessa concepção, que há diferenças entre tarefa e atividade. Enquanto a "atividade, que pode ser física ou mental, diz respeito essencialmente ao aluno e refere-se àquilo que ele faz num dado contexto" (PONTE, 2014, p. 15), a tarefa

> representa apenas o objetivo de cada uma das ações em que a atividade se desdobra e é exterior ao aluno (embora possa ser decidida por ele). Na verdade, as tarefas são usualmente (mas não necessariamente) propostas pelo professor, mas, uma vez propostas, têm de ser interpretadas pelo aluno e podem dar origem a atividades muito diversas (ou a nenhuma atividade) (PONTE, 2014, p. 15).

Portanto, a atividade é uma ação do estudante e a tarefa é exterior a ele. Posto desse modo, as tarefas se apresentam como uma ferramenta importante nos processos de ensino e aprendizagem, possibilitando ao estudante se colocar em atividade, e é "pela sua atividade e pela sua reflexão sobre essa atividade que o aluno aprende" (PONTE, 2014, p. 17). Para Watson et al. (2013), tarefas "geram atividade que proporciona oportunidade de descobrir conceitos matemáticos, ideias, estratégias, e também o uso e o desenvolvimento do pensamento matemático e de modos de investigação" (p. 12).

Inspirados nas ideias de Watson et al. (2013) e de Ponte (2014), por tarefa estamos entendendo "o amplo espectro composto por 'coisas a fazer' pelos estudantes em sala de aula, o que inclui desde a execução de exercícios algorítmicos até a realização de investigações ou construção de modelos matemáticos" (TREVISAN; BORSSOI; ELIAS, 2015, p. 3).

É preciso estar ciente, entretanto, que somente a elaboração cuidadosa de uma tarefa não garante que os alunos se coloquem em atividade. Como aponta Ponte (2014), uma tarefa pode ter ou não potencialidades para mobilizar conceitos e processos matemáticos, originando atividades diversas. Outros fatores influenciam, como "o modo como for proposta, a forma de organização do trabalho dos alunos, o ambiente de aprendizagem, e a sua própria capacidade e experiência anterior" (PONTE, 2014, p. 16). Isso significa que, para uma tarefa dar lugar a atividades diversas, o modo como é proposta, bem como as situações de ensino criadas pelo professor e o compromisso dos próprios estudantes também compõem esse processo.

Ao propor tarefas aos alunos, esperamos que estas geram atividades que oportunizem a descoberta de conceitos matemáticos, ideias, estratégias, e também que favoreçam o desenvolvimento do pensamento matemático e de modos de investigação. Para tanto, o ensino pautado em tarefas demanda cuidados como a seleção, modificação, desenho, montagem, observação e avaliação dessas tarefas (WATSON et al., 2013, p. 12). Além disso, segundo Watson et al. (2013), o sequenciamento também é relevante, uma tarefa não deve ser pensada apenas como um evento isolado, mas como parte de uma sequência de outras tarefas.

A Educação Matemática Realística (RME) também ressalta a importância do sequenciamento de tarefas. Nessa abordagem, uma sequência de tarefas começa a partir de uma situação particular, que remeta ao uso de estratégias e representações informais, e progressivamente leva à formalização e generalização dos procedimentos de solução. Dos princípios que fundamentam a RME, Gravemeijer, van Galen e Keijzer (2005) destacam três: a reinvenção guiada (oferecer aos estudantes a oportunidade de "reiventar" matemática, sob orientação do professor), a fenomenologia didática (encontrar os fenômenos do qual podem "emergir" matemática) e a modelagem emergente.

Acerca desse último princípio, Gravemeijer, van Galen e Keijzer (2005) conjecturam que a emergência de um modelo se relaciona, de forma reflexiva, à elaboração de "nova" matemática (para os alunos). No início, os modelos referem-se a situações concretas ou paradigmáticas, que, por serem experiencialmente reais para os alunos, devem ser entendidos como modelos específicos do contexto. "Conforme o estudante reúne mais experiência com problemas semelhantes, o modelo torna-se mais próximo de um objeto [...] Um *modelo de* atividade matemática informal torna-se um *modelo para* o raciocínio matemático mais formal (GRAVEMEIJER; VAN GALEN; KEIJZER, 2005, p. 105, tradução nossa, grifos do autor).

Nas palavras de Oliveira (2014), os modelos emergem de soluções informais dos alunos e, inicialmente, seu papel é servir como base para resolver uma situação particular. A partir do momento em que esse modelo não depende mais do problema em si, mas, sim, de suas características matemáticas, assume um caráter geral, sendo mais relevante para o pensamento matemático do aluno do que uma forma de representar uma situação-problema qualquer (OLIVEIRA, 2014). Isso nos permite dizer, portanto, que as estratégias elaboradas pelos estudantes para resolver situações particulares (que constituem um modelo emergente) podem ser bons pontos de partida para problematizar um conceito (GRAVEMEIJER, 1999).

Com base nesses referenciais, no presente trabalho, tomamos a situação de construção de uma calha como um tema para produzir tarefas que oportunizem o desenvolvimento do pensamento matemático, e analisamos o percurso traçado por alunos da turma SPO na busca de caminhar de um *modelo de* para um *modelo para* o raciocínio matemático mais formal ao tentarem resolver uma das tarefas solicitadas. Como já afirmamos, em Trevisan, Borssoi e Elias (2015) havíamos discutido um formato de tarefas contemplando a situação da construção da calha, mas, neste artigo, o contexto é outro e, por isso, houve a necessidade de uma reconfiguração e nova abordagem para as tarefas. Na sequência, apresentamos mais detalhes sobre esse novo contexto - a turma SPO - e a maneira como as tarefas foram propostas.

AS TAREFAS EM OUTRO CONTEXTO

A caracterização de uma turma na modalidade SPO difere consideravelmente de uma turma regular, assim, trazemos nesta seção informações complementares sobre o ambiente educacional, em relação ao apresentado por Ramos, Fonseca e Trevisan (2016), quanto às condições reais de ensino para a disciplina de CDI, considerando peculiaridades da turma SPO oferecida na instituição desde o segundo semestre de 2015.

A cada semestre o DAMAT tem ofertado uma turma com 50 vagas para alunos em regime de dependência dos sete cursos de graduação do Câmpus. Para se matricular na turma, o aluno com dependência na disciplina de CDI 1 deve ter cursado a disciplina em turma regular pelo menos uma vez, com pelo menos 75% de frequência e ter obtido nota igual ou superior a 4,0.

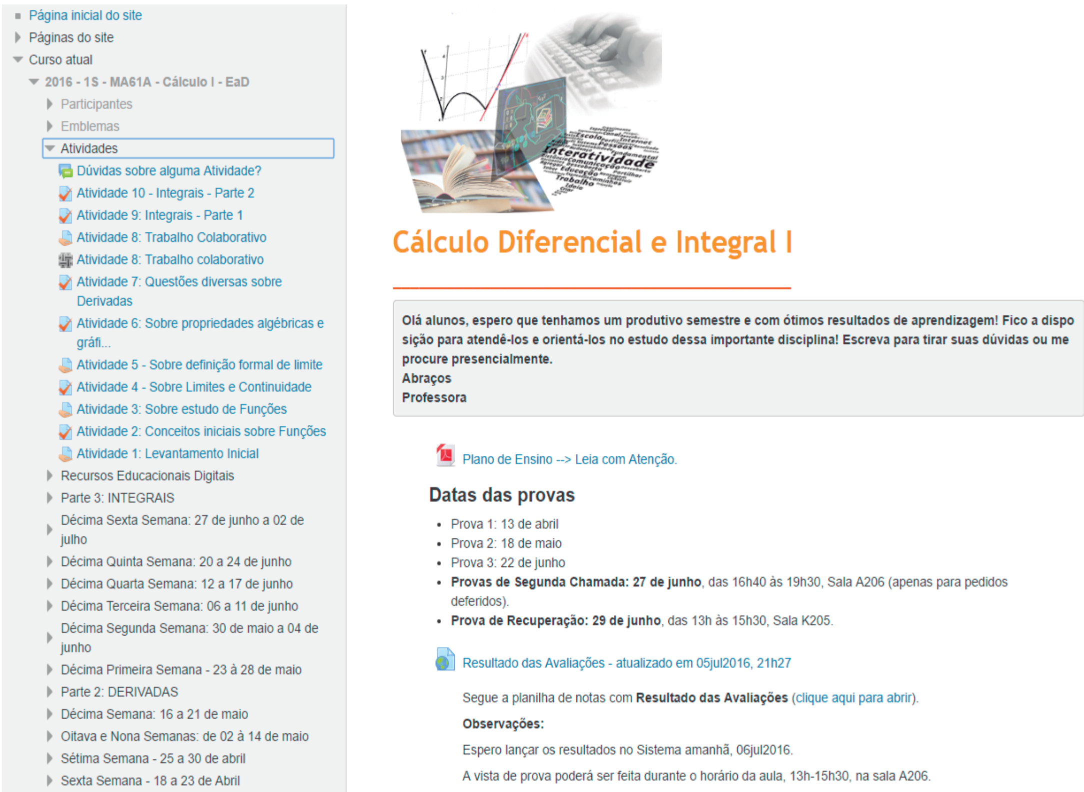
Desde o início da oferta da turma SPO a docente responsável é a mesma (também autora deste texto), o que tem permitido um aprimoramento na organização da disciplina, bem como do ambiente de interação que congrega alunos matriculados, professora e monitor da disciplina.

O desenvolvimento das atividades da disciplina se dá por intermédio de um ambiente virtual, institucionalmente denominado AVEA, que tem o suporte do MOODLE.

De acordo com Bacich, Tanzi Neto e Trevisani (2015), um Ambiente Virtual de Ensino é uma ferramenta que oferece meios para a organização de materiais ou atividades que possam apoiar os processos de ensino e aprendizagem. O AVEA é entendido também como um espaço que permite a construção coletiva do conhecimento e o desenvolvimento da aprendizagem.

A Figura 1 ilustra a interface do AVEA organizado para a turma SPO do primeiro semestre letivo de 2016, turma a qual dedicamos atenção nesta e na próxima seções deste artigo, apresentando e discutindo algumas resoluções dos alunos ao lidarem com uma das duas tarefas propostas.

Figura 1 - Parte da página inicial do AVEA, organizado para a turma SPO.



Fonte: Acervo da docente.

Nesse ambiente estavam disponíveis materiais de apoio selecionados ou elaborados pela docente, com intenção de orientar o estudo dos alunos, dentre eles: notas de aula da docente, livros eletrônicos de acesso livre, *links* para videoaulas produzidas por uma reconhecida universidade pública brasileira, bem como, acesso a recursos educacionais digitais com potencial para exploração de conceitos pertinentes ao CDI, desenvolvidos para compor tarefas de aprendizagem.

A carga horária semanal da disciplina é de seis horas-aula e, embora seja sem presença obrigatória, é disponibilizado aos alunos um encontro de três horas-aula com a docente, destinado a tratar pontualmente dos assuntos planejados para a semana de estudo. Os alunos dispõem de pelo menos outras três horas-aula para atendimento individual ou em pequenos grupos, além do atendimento virtual, pelo AVEA ou por e-mail. Outro recurso de apoio ao estudo é dado pelo programa institucional de monitoria, sendo que o monitor interage tanto presencialmente quanto virtualmente com os alunos e com a docente.

Como atividades de avaliação são propostas três provas regulares, sendo estas, as únicas atividades presenciais obrigatórias e cuja média aritmética compreende sessenta por cento da nota final na disciplina. Atividades à distância, propostas semanalmente a partir dos tópicos da ementa e da programação constante no plano de ensino compõem os outros quarenta por cento da nota da disciplina. Neste último conjunto de "coisas a fazer" pelos alunos é que se inserem as tarefas que discutiremos neste texto.

A proposição de tarefas, em geral, explora ferramentas disponíveis no ambiente virtual, tais como: fórum - espaço que permite aos participantes interagirem de forma assíncrona, com a finalidade de discutir algum tópico do conteúdo, tirar dúvidas, fazer sugestões, etc.; *questionário* - permite ao professor criar e configurar testes de múltipla escolha, questões associativas, questões abertas, entre outros; *tarefa* - o módulo com essa denominação permite ao professor propor uma tarefa que os alunos possam desenvolver por meio de texto *online* ou anexando arquivos (documentos de texto, planilhas, imagens ou áudio e vídeo) em resposta; e *wiki* - esse módulo permite que os participantes adicionem e editem uma coleção de páginas da *web*. Uma *wiki* pode ser colaborativa, com todos podendo editá-la, ou individual, onde cada um tem sua própria *wiki*. Um histórico de versões anteriores de cada página da *wiki* é mantido, listando as edições feitas por cada participante. *Wikis* podem ter muitos usos, e se configuram em um espaço propício para trabalhos colaborativos. De modo geral, em todas essas ferramentas há possibilidade de troca de mensagens entre professor e aluno. Assim, após analisar as postagens dos alunos, o professor pode deixar comentários de *feedback* ou fazer *upload* de arquivos.

Bacich, Tanzi Neto e Trevisani (2015), consideram que um AVEA

> [...] é um espaço *on-line* construído para proporcionar interações entre usuários. Essas interações podem ser variadas, síncronas ou assíncronas, de um-para-todos (uma mensagem compartilhada com todos que estão no ambiente, por exemplo, um aviso enviado pelo tutor aos estudantes), de um-para-um (uma mensagem privada enviada a uma pessoa específica, por exemplo, de um aluno para seu tutor) ou de todos-para-todos (mensagens podem ser enviadas e visualizadas por todos, por exemplo, as discussões via fórum). Dessa forma, há semelhanças com a sala de aula presencial (p. 146-147).

As tarefas que trazemos à discussão integram o que foi denominado Trabalho Colaborativo, para o qual os alunos foram organizados em dez grupos (denominados A, B, ... , I e J), constituídos aleatoriamente pelo MOODLE, de modo que cada grupo contasse com quatro ou cinco integrantes. A opção pela escolha aleatória se deu por se tratar de uma turma heterogênea, por se considerar que os integrantes da turma estavam distribuídos entre os sete cursos de graduação oferecidos no Câmpus, de diferentes períodos dos respectivos cursos.

A Figura 2 ilustra a proposta de trabalho, em que o espaço para interação de cada grupo foi uma *wiki*. O enunciado comum a todos os grupos era visualizado na tela inicial da *wiki*, no entanto, a visualização da produção de cada grupo ficou restrita a seus integrantes e à docente.

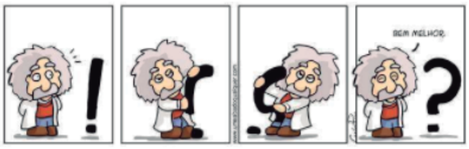
A tarefa 1, apresentada no início na Figura 2, foi colocada de forma aberta, de acordo com uma das proposições de Trevisan, Borssoi e Elias (2015), com o objetivo de que os alunos vinculados a cada grupo interagissem virtualmente, e chegassem a um produto coletivo, permitindo que cada grupo tivesse encaminhamentos distintos. A estratégia da docente foi de, inicialmente, acompanhar as proposições dos grupos, e, a medida do necessário, fazer intervenções que os levassem a avançar em direção à exploração de conceitos e técnicas do CDI 1.

Figura 2 - Recorte da proposta conforme visualizada em tela pelos alunos.

Como construir uma calha, dispondo de uma longa folha retangular de metal de 30 cm de largura, de modo que a quantidade de água recolhida seja a maior possível? *(Calha: artefato colocado ao longo do beiral de um telhado cuja finalidade é recolher a água que dele escorre)*

Primeira etapa: o grupo deve fazer considerações sobre como se poderia resolver esse problema. Nessa etapa o importante são as ideias. Cada um pode escrever o que pensa ser um (ou mais) procedimento adequado. Aguardo, para depois passar novas orientações.

"Não são as respostas que movem o mundo, são as perguntas"



(Albert Einstein)

Antes de seguir, leia com atenção as seguintes orientações:

A Atividade 8 ficará aberta por duas semanas, durante esse tempo a atividade deve ser desenvolvida com a participação dos integrantes de cada grupo. São dez grupos ao todo, que foram compostos aleatoriamente pelo Moodle. Ao final da atividades, todos os estudantes poderão visualizar os outros Grupos.

A ideia é que os estudantes vinculados a cada grupo interajam virtualmente, e cheguem a um produto que seja coletivo. No início, cada uma pode postar suas ideias para que os colegas leiam e vejam se são razoáveis, mas nunca apague o texto que outro colega escreveu, se discordar ou tiver alguma sugestão a fazer, faça comentários entre parênteses... se quiserem podem conversar também presencialmente, mas não é necessário.

A avaliação levará em conta a qualidade da solução do problema, mas também as discussões, as contribuições dos membros, a participação. Essa será uma atividade experimental e vocês podem perguntar, sugerir, e principalmente colaborar!

A professora fará visitas periódicas aos Grupos (todo dia) para acompanhar o andamento do trabalho e fará perguntas para ajudar no desenvolvimento do trabalho, se necessário.

Fonte**:** Acervo da docente.

Conforme os alunos manifestavam seus encaminhamentos, construindo seus percursos de aprendizagem, e na medida em que a docente percebia que os grupos avançavam em termos de uma resposta para a situação proposta, uma nova tarefa (tarefa 2) com configuração mais fechada foi sugerida pela docente. A Figura 3 traz o enunciado da tarefa 2.

Figura 3 - Tarefa 2 com configuração mais fechada, proposta em uma segunda etapa do trabalho.

Uma representação da calha pode ser acessada no link http://ggbtu.be/mppCiv7aUe poderá auxiliá-lo na compreensão da situação-problema e na validação do resultado que foi apresentado pelo Caio, que, se estiver correto, deverá coincidir com o que vocês encontrarão analiticamente.

Uma calha deve ser construída com uma folha de metal de largura 30 cm dobrando-se para cima 1/3 da folha de cada lado, com isso, um ângulo θ é formado com a horizontal. Decida como deve ser escolhido θ de forma que a capacidade de carregar a água da calha seja máxima?

Nessa atividade espera-se que você:
a) Considere a figura acima e obtenha a função a ser maximizada;
b) Determine o intervalo de validade para ângulo θ em radianos;
c) Explique qual deve ser o encaminhamento para se calcular a solução da situação;
d) Encontre o ângulo que maximiza a função.
e) Comente sobre as dificuldades encontradas para resolver a questão.

Fonte: Acervo da docente.

Nas próximas seções, dedicamo-nos a analisar o desenvolvimento das tarefas pelos grupos, dando enfoque à tarefa 1.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS E ORGANIZAÇÃO DOS DADOS

Nosso intuito é analisar o percurso realizado pelos grupos de alunos na busca de um modelo matemático para as tarefas propostas, procurando indícios de que estas tenham dado origem a atividades e oportunizado a descoberta de conceitos matemáticos, ideias, estratégias, e também tenha favorecido o desenvolvimento do pensamento matemático e de modos de investigação.

Para tanto, lançamos mão, inicialmente, da análise da produção escrita dos grupos como estratégia de investigação, no intuito de evidenciar estratégias (modo como se aborda a tarefa) e procedimentos (modo como se desenvolve a estratégia) adotados. A partir disso, caracterizar se, na resolução, o grupo avança para a construção de um *modelo de* (configuração particular para a calha) para um *modelo para* (configuração mais geral para calha)[4].

Por produção escrita estamos considerando todo texto ou registro[5] presente na área de trabalho de cada grupo (*wiki*) no AVEA, incluído *links* para arquivos externos, quando fosse o caso. Enquanto ações que possibilitam analisar a produção escrita em matemática (SANTOS, 2014), realizamos uma leitura vertical da produção dos grupos (produção particular como um todo, no intuito de ter uma visão geral do percurso realizado por cada grupo), seguida de uma leitura horizontal (o que permitiu perceber semelhanças entre as resoluções de todos os grupos).

Tais leituras foram combinadas a um processo de codificação desse conjunto de dados, para o qual lançamos mão de alguns preceitos da Teoria Fundamentada (CHARMAZ, 2006, 2009 apud

[4] Trata-se de uma "apropriação" dos termos *modelo de* e *modelo para* propostos por Gravemeijer, uma vez que, em nosso contexto entendemos como *modelo para* o resultado de uma forma de pensamento que levou a pensar configurações quaisquer para a calha.

[5] Lembramos que um histórico de versões anteriores de cada página da *wiki* é mantido, listando as edições feitas por cada participante. Foi desse histórico que realizamos nossas análises.

ALMEIDA; BORSSOI; SILVA, 2015). As leituras vertical e horizontal permitiram a seleção de fragmentos da produção escrita (*codificação inicial*) e a posterior “extração” de suas ideias centrais e subordinações (*codificação axial*), o que resultou na elaboração de categorias e conexão entre categorias. Desse movimento, por meio da codificação *focalizada* (etapa em que é feita a revisão e avaliação das categorias) resultaram *categorias teóricas* que permitem compreender o percurso de aprendizagem do grupo na busca de um modelo matemático para a situação proposta, a constar:

1. *Ideia geral*: presente nas respostas dos alunos, nas quais expressam, por meio de argumentos intuitivos, uma possível configuração para calha (como em formato de U ou _/)[6], mas sem um tratamento matemático;
2. *Ideia específica*: ainda baseada em argumentos intuitivos, assume uma configuração particular para calha (como |_| ou \/), mas sem um tratamento matemático;
3. *Modelo particular sucinto*: trata da organização matemática da situação proposta considerando uma situação particular para a configuração da calha (|_|), e lida com esse modelo de modo “padrão”.
4. *Modelo particular detalhado*: agrega, em relação à categoria anterior, um maior detalhamento nas resoluções, apresentando algumas justificações para os procedimentos realizados.
5. *Modelo*[7] *geral*: reflete uma forma de pensar mais generalizada, explorando configurações mais gerais de calha que contempla modelos particulares (no caso, _/ e U), agregando um tratamento matemático (uso de incógnitas, construção de expressões matemáticas, etc.).

Em função do caráter dinâmico da proposição da tarefa 1, em que as equipes poderiam agregar elementos à resolução no período em que a tarefa esteve “aberta” no AVEA, inclusive por conta das intervenções realizadas pela professora, foi possível observar um transitar entre diferentes categorias nas resoluções das equipes. Esse movimento, representado no Quadro 1, reflete a diversidade de maneiras como a tarefa configurou-se para os grupos. No caso dos Grupo A e B, não houve um “percurso” entre categorias, uma vez que a solução apresentada não evoluiu temporalmente; além disso, os integrantes do Grupo A (Aluno 1, Aluno 2) apresentam propostas de forma independente, sem que haja uma integração entre elas ou mesmo entre os dois alunos.

Quadro 1 - Movimento das equipes na tarefa.

Grupo A	Aluno 1: *Ideia geral* → X Aluno 2: *Modelo particular sucinto* → X
Grupo B	Aluno 1: *Ideia geral* → X
Grupo C	*Modelo particular sucinto* → *Modelo particular detalhado*
Grupo D	*Ideia particular* → *Modelo particular detalhado*
Grupo E	*Ideia geral* → *Modelo particular sucinto* → *Ideia geral* → *Modelo particular detalhado* → Outro *Modelo particular detalhado* → *Modelo geral*
Grupo F	*Ideia geral* → *Modelo particular detalhado*

6 As representações U, |_|, \/, _/ apareceram na produção escrita dos grupos e, neste texto, as usaremos ao nos referirmos aos formatos semicilíndrico ou tipo U, retangular, tipo V, e trapézio, respectivamente.

7 A palavra está sendo usada de forma mais “livre”, sem referência imediata as definições da área de Modelagem Matemática, por exemplo. Reflete um tratamento mais amplo, respaldado matematicamente, e que não considera um único modelo para representar a situação. Para Gravemeijer (1999), modelos surgem a partir da própria atividade dos estudantes. Sob seu ponto de vista, o que denominados *modelos particulares* na verdade nem seriam modelos, mas estruturas pré-existentes da qual o estudante “apropria-se”.

Grupo G	*Modelo particular sucinto* → *Ideia geral* → Outro *Modelo Particular sucinto*
Grupo H	*Ideia geral* → *Modelo particular sucinto* → *Ideia geral*
Grupo I	*Modelo particular sucinto* → *Modelo particular detalhado* → *Ideia geral* → *Modelo geral*
Grupo J	*Ideia geral* → *Modelo particular detalhado*

Fonte: Os autores.

Em função da diversidade de movimentos observados durante o desenvolvimento da tarefa 1 (Figura 2) e da presença da categoria de *Modelo geral*, optou-se, para esse artigo, analisar apenas as configurações dos grupos E e I.

ANÁLISE DOS DADOS

Os Quadros 2 e 3 ilustram o percurso entre as categorias observado nos grupos E e I, por meio da apresentação de extratos de suas produções, sendo estes inseridos conforme sequência cronológica.

Os extratos apresentados nos Quadros 2 e 3 nos orientam a perceber como se deu a busca de um modelo matemático para a situação proposta.

No Grupo E, o percurso inicia-se a partir do levantamento de ideias mais gerais sobre a configuração da calha (*Ideia geral*), revelando uma predisposição do grupo em pensar de uma forma mais livre. Em seguida apresenta uma resolução baseada em uma configuração específica (calha no formato do tipo |_|) em que o máximo é identificado a partir do vértice da função quadrática (*Modelo particular sucinto*).

O grupo sinaliza ser possível melhorar a solução e passa a considerar o trapézio isósceles invertido, que é uma configuração mais geral, mas aponta ser "muito difícil" expressar matematicamente sua ideia. Ao citar a altura, a base e os ângulos como elementos necessários para encaminhar a sua ideia, mostra reconhecer intuitivamente as variáveis necessárias para escrever o *Modelo geral*. Assim, contorna a dificuldade ao assumir a regularidade do polígono como condição para maximização da sua área, justificando por meio de analogias com o quadrado e, supostamente ao triângulo equilátero[8]. Por fim, aponta o formato cilíndrico e mostra que este resulta em uma solução ainda melhor que as discutidas anteriormente; indica ainda uma nova possibilidade de configuração, a elíptica, que seria um novo indicativo de *Modelo geral*, agora para calhas do tipo U.

No Grupo I o percurso de iniciou a partir de uma configuração específica (*Modelo particular sucinto*). Neste caso, o grupo obtém uma função quadrática, resultante de um formato do tipo |_|, deriva a função, a iguala a zero e determina um ponto crítico, concluindo de imediato se tratar do ponto de máximo. Identificamos ser um procedimento similar aos apresentados em livros didáticos, possivelmente estabelecido com base em experiências anteriores do indivíduo em ambiente de aprendizagem. Ao propor a representação de formato de trapézio, indicado na Quadro 3 (*Modelo particular detalhado*) lançam mão de uma ferramenta auxiliar para obter a solução, e, embora não a desenvolvam matematicamente, demonstram reconhecer as variáveis referentes a um *Modelo geral.* Seguindo o percurso do grupo, percebemos que, ao expressar falta de compreensão de um desenvolvimento anterior, um aluno indica em sua reflexão indícios de caminhar para o *Modelo geral* quando menciona ter explorado "diversas angulações" para o trapézio e depois, ao propor (*Ideia geral)* a configuração de "meia circunferência".

8 A partir do que expressou o grupo, inferimos tratar-se de um triângulo equilátero.

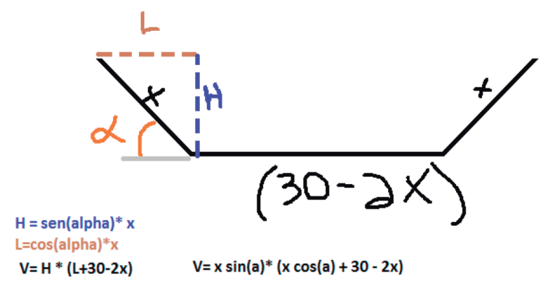
Quadro 2 - Extratos da produção do Grupo E.

	Grupo E
Ideia geral	Ou seja, pensando em formatos , poderíamos faze-la em formato de V ou formato de U, ou qualquer formato entre os dois. Dentro dessa perspectiva, o objetivo é conseguir calcular qual formato permitiria maior valor de volume do objeto(calha).
Modelo particular sucinto	Desenvolvi outra solução galera, pensei em fazer uma calha quadrática. tipo assim : |_| . Ae fiz os cálculos para maximizar a área desse retângulo. para os cálculos chamei: Lado A = x Lado B = x Base = 30 - x Desenvolvendo: Equação da área : F(x)=Base.Altura= x(30-2x) = $-2x^2 + 30x$. Com a Equação encontrada, procurei saber o ponto de máximo, calculando o vértice da parábola. Assim, X(max) = -b/2a = -30/-4 = 7,5 Y(max) = $-2(7,5)^2 + 30x7,5 = 112,5$. cm^2 Dessa maneira, A área máxima é obtida quando o lado mede x= 7,5cm e a base mede 2x = 15cm. Sendo esta àrea igual á **112,5cm²**
Ideia geral	Depois dessa solução , pensei que seria possível melhorar a área através de um trapézio isósceles invertido. Mas ficou complicado pois conforme as informações dadas. Eu teria como informação que , os lados do trapézio somado à base menor é igual a 30cm. Sendo muito difícil maximizar a área do trapézio pois não sei a altura desse trapézio e a base maior, visto que eu precisaria saber os ângulos para saber tais informações.
Modelo particular detalhado	Dessa forma, pensei assim : O quadrado obtém área máxima quando os lados são iguais: Ex) A=b.h = 2.2 = 4 > 3.1 = 3 Assim como à área do triangulo, maximiza-se a área quando a base é igual a altura. Nessa lógica, a área de um hexágono é maximizado quando os lados são iguais. E dividindo um hexágono pela metade obtemos um trapézio, onde os lados medem o mesmo valor da base. Assim esse trapézio teria Lado + Lado + Base = 30 , e para maximizar cada lado deve ser de 10cm e a base ser de 10cm. A área de hexágono regular é : A = $(6a^2\sqrt{3})4$, sendo a=aresta. base menor = 10cm lados = 10cm cada Assim à área do trapézio maximizado é $(3a^2\sqrt{3})/4$ = $3.10^2\sqrt{3})/4$ = **129,90 cm²**
Outro Modelo particular detalhado	Comparando esta alternativa com a alternativa anterior , vemos que o trapézio regular apresenta maior área do que o retângulo. Outra alternativa, seria fazer a calha em formato cilíndrico, sendo metade de um cilindro. Logo a área desse semicírculo de raio 9,549 é : A = $\pi.r^2/$**2** = $\pi.9,549^2/2$ = **143,21 cm²**

Modelo geral	Assim percebemos que o cilindro pela metade, apresenta em área valor maior que as alternativas do trapézio e do retângulo.. -- Outra hipótese para obter maiores valores de área que podemos testar é a metade de uma elipse:

Fonte: Os autores.

Quadro 3 - Extratos da produção do Grupo I.

	Grupo I
Modelo particular sucinto	Idéia 1: Fazer uma calha dobrando as bordas perpendicularmente a folha. f(x)= x(30-2x) f(x)= -2x²+30x derivar e iguar a 0 para descobrir o valor de x para que o volume seja máximo. f'(x)= -4x+30 0= -4x+30 x= 30/4= 7,5 Teste para x= 7,5 f(7,5)= -2(7,5)²+30(7,5) f(7,5)= -112,5+225= 112,5 Volume máximo da calha é 112,5cm³
Modelo particular detalhado	pensei em angular as laterais da calha formando um trapézio como a imagem abaixo:  (observar que quando escrevi "V" e "volume" na verdade me referia a area do trapézio que é o que queremos maximizar. Entretanto a função area do trapézio depende de duas variaveis desconhecidas (angulo alpha e X) **e não consegui achar uma relação matematica entre essas duas variaveis** portanto não consegui resolver o exercicio matematicamente. Porém montei um algoritimo no visualG que por "tentativas" calcula todas as areas possiveis e retorna os valores de X e alpha para a maior Area possivel, desta forma resolvi o exercicio encontrando x=10 e alpha= 60° com um volume de 130 cm³ (129.9 e algo).
Ideia geral	Não consegui entender o processo de desenvolvimento da primeira aluna e nem relacionar a resolução do problema com o estudo de integrais. Minha linha de raciocínio foi parecida com a do [redacted] e formulei trapézios que excediam a capacidade de captação de 112,5 cm³, mas nenhum que chegasse a 130 cm³ como ele fez. Durante o processo de experimentações, observando como se comportavam diversos polígonos sob diversas angulações, me ocorreu que o mais eficaz seria moldar a folha de metal em forma de meia circunferência. Considerando **c = 2 π r** , para uma circunferência completa, o raio para uma meia circunferência com 30 cm seria de aproximadamente 9,55 cm. A área, que seria equivalente a capacidade de captação da calha, seria de aproximadamente 143,24 cm³

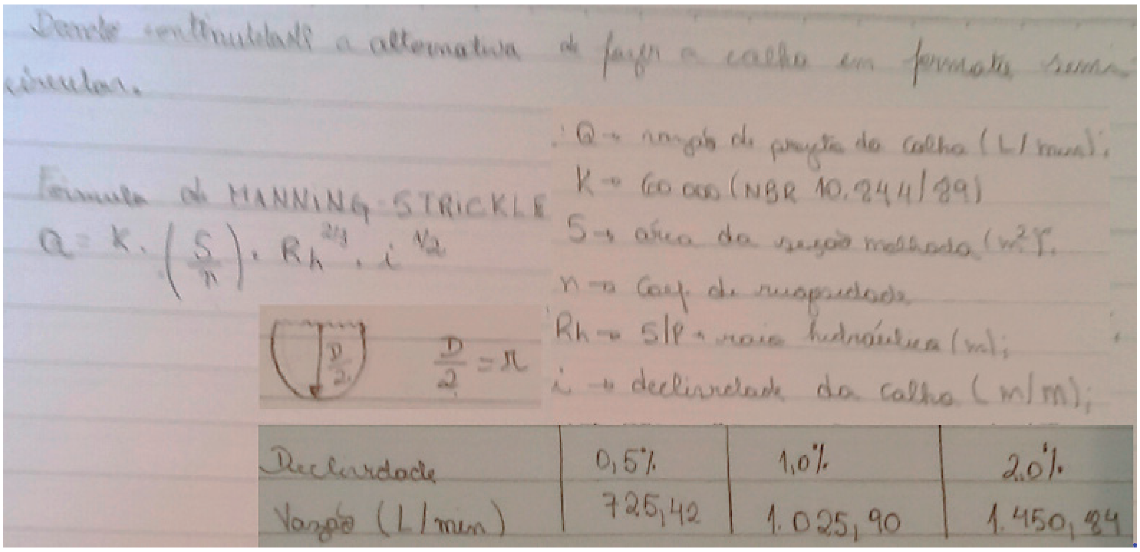
Modelo geral	~~([redacted]) : (no calculo do raio o [redacted] esqueceu de dividir por 2, sendo assim o raio seria de 9,55/2 cm e a area de 71cm², logo não é uma solução)~~ ([redacted])Não entendi a necessidade de dividir o raio por 2. Na conta considerei que se tratava de uma meia circunferência e utilizei c = π r(ao invés de c = 2 π r). Mas se considerarmos 60 = 2 π r também obtemos um raio de 9,55 cm. E sendo o raio (e não o diâmetro) não há necessidade de dividir por 2. ([redacted]) **desculpa colega.** Me equivoquei e esqueci que se tratava de um semicirculo e não de um circulo completo.

Fonte**:** Os autores.

Apesar de percursos distintos, reconhecemos no encaminhamento dado pelos dois grupos elementos comuns. Em ambos, reconhecemos um modo do grupo lidar com a tarefa, próprio do raciocínio criativo, segundo Lithner (2008). No caso do Grupo E, tal caracterização aparece na análise global do percurso; não pareceu ter havido a "preocupação" em apresentar uma resolução que atendesse uma eventual expectativa do professor, ou mesmo que trouxesse conceitos matemáticos próprios do CDI. A equipe encaminhou uma resolução de forma flexível e criativa, tendo havido um efetivo engajamento na resolução da tarefa proposta. Já no Grupo I, inicia-se com um raciocínio mais imitativo (LITHNER, 2008), mas que, ao longo do percurso, agrega características de um raciocínio criativo, mais flexível e generalizado, sem perder aspectos matemáticos que o fundamentem.

Em ambos, há indícios da modelagem emergente (GRAVEMEIJER; VAN GALEN; KEIJZER, 2005), o que se justifica pelo uso de esquemas, desenhos, diagramas, tabelas, desenvolvimento de notações informais ou ainda o uso de notações matemáticas convencionais como meios para lidar com aquele fenômeno envolvido na tarefa. Representações que mostram indícios de modelagem emergente podem ser observadas nos Quadros 2 e 3, bem como nas Figuras 4 e 5.

Figura 4 - Recortes do desenvolvimento de um *modelo particular detalhado* do Grupo E.



Fonte**:** Acervo da docente.

A Figura 4 traz alguns elementos do desenvolvimento do Grupo E, que indica um novo modelo particular para o formato semicircular para calha, no entanto, considera uma abordagem conhecida na literatura para vazão em calhas nesse formato. A Figura 5 remete a outro recurso utilizado pelo Grupo I, o desenvolvimento de um algoritmo, para discutir a solução do modelo particular detalhado (Quadro 3). O desenvolvimento do algoritmo expressa o pensamento matemático do aluno que o elaborou e permite uma resposta para a situação-problema, complementando uma representação informal (esboço da calha em formato de trapézio) para a qual não conhecia a solução.

Figura 5 - Uso de aplicativo no desenvolvimento de um *modelo particular detalhado* do Grupo I.

deixarei em anexo o algoritimo caso alguem se interesse em conferi-lo.

https://onedrive.live.com/redir?resid=D6BD73B8F53DD599I208&authkey=!ALZW1hiF6VNtDws&ithint=folder%2calg

observar que o resultado fornecido pelo algoritimo se encontra em dizima peridica aproximada dos valores reais, isso ocorre por causa das aproximações que o algoritimo faz para o calculo e por causa do incremento de 0.1, seria possivel calcular com mais precisão no entanto levaria tempo demais pois o programa não é feito para isso.

Fonte: Acervo da docente.

Conforme apontam Gravemeijer, Van Galen e Keijzer (2005), em algum momento do percurso esses modelos referem-se a um contexto específico (uma configuração particular para calha), mas, à medida que os estudantes se mostram engajados com a tarefas, esses recebem um caráter mais estrutural, fundamentado matematicamente, tornando-se gradativamente base para a obtenção de um *Modelo geral*.

Como antecipamos, ao tratarmos do contexto em que a tarefa 1 (Figura 2) foi proposta, a estratégia da docente foi de acompanhar as proposições dos grupos e fazer intervenções que os levassem a avançar em direção a exploração de conceitos e técnicas do CDI 1. O Quadro 4 traz extratos que ilustram a natureza das intervenções da docente, para o Grupo I a título de exemplo, e o momento em que aparece no percurso de aprendizagem do grupo.

Com a tarefa 1, identificamos o uso de estratégias e representações, algumas mais informais, outras com algum nível de formalização no que se refere a conceitos matemáticos. As intervenções da docente têm importância à medida que podem orientar o grupo a, progressivamente, chegar à formalização e à generalização dos procedimentos de solução e mesmo à elaboração ou ressignificação de conceitos.

Conforme discutido em Trevisan, Borssoi e Elias (2015), área e volume de sólidos com faces planas ou faces curvas, funções trigonométricas, derivada de uma função de uma ou mais variáveis, regras e propriedades de derivação, determinação de valores extremos de uma função e otimização são alguns dos conhecimentos matemáticos que a situação pode mobilizar.

Nesse sentido, os dois grupos analisados foram instigados a dar sequência ao processo de busca por uma solução para a tarefa no sentido de um *Modelo geral* quando a proposta de uma tarefa “mais fechada” foi apresentada (Figura 3).

Este encaminhamento se aproxima do que Gravemeijer, Van Galen e Keijzer (2005) definem como princípio da fenomenologia didática, que pressupõe olhar para aplicações da Matemática, a fim de encontrar os fenômenos que possam subsidiar a organização das tarefas que levem os estudantes a desenvolver um conceito ou ferramenta matemática.

O olhar para o percurso de aprendizagem dos Grupos E e I nos permite inferir que a tarefa 1 mobilizou os alunos dos grupos a se colocarem em atividade, no sentido de Ponte (2014). Isso permitiu avançar na construção da solução da tarefa ao mesmo tempo que lhes permitiu mobilizar conceitos matemáticos "espontaneamente" ou a partir das intervenções da docente a fim de que conceitos do CDI fossem considerados.

Quadro 4 - Extratos que ilustram intervenções da docente ao longo do percurso do Grupo I.

	Grupo I
Modelo particular sucinto	Gostaria que os colegas de grupo comentassem se consideram essa opção viável e se tiveram alguma outra ideia. Todos entenderam o que o x e o f(x) representam? É sempre bom definir as variáveis inicialmente, para que todos entendam a que se referem as equações (modelos matemáticos). Será que essa é a melhor calha? Se alguém tiver outra sugestão pode apresentar, fico no aguardo de novas postagens. [redacted], que argumento matemático pode garantir que 7,5 é o lado que maximiza a função usada? A unidade de medida indicada em "112,5cm^3" está adequada? Outros colegas podem comentar.
Modelo particular detalhado	Depois darei uma olhada no algoritmo, mas foi uma ótima iniciativa. De fato, as ferramentas do Cálculo 1 podem ser limitadas para resolver esse problema, se uma condição não for inserida, mas sugiro que voltem a pensar na função obtida pelo [redacted] quando estiverem estudando Extremos de funções no Cálculo 2. Vejam mais abaixo uma Nova Proposta, baseada nessa conjectura, porém fixando uma das variáveis indicadas pelo [redacted].
Ideia geral	[redacted], não há nenhuma menção de que seria necessário utilizar o estudo de Integrais para tratar o problema, ok.
Modelo geral	Nas proposições anteriores estavam sendo consideradas relações matemáticas que envolviam variáveis, mas nesse caso não. Podemos voltar nessa questão em outro momento... Vocês captaram o espírito do trabalho, as colocações e discussões estão interessantes. Sugiro que leiam a Proposta, a seguir (e insere a tarefa da Figura 3 desse texto).

Fonte: Os autores.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A análise dos percursos de aprendizagem dos alunos de uma turma SPO ao buscarem um modelo matemático para a situação proposta permitiu-nos um aprofundamento sobre algumas questões que envolvem as condições sobre o ensino de CDI 1 em nossa instituição. Como afirmamos, a turma SPO tem suas especificidades que, de início, são desconhecidas para qualquer docente que a assuma. É preciso lembrar que os sete cursos oferecidos pela universidade são presenciais e que a oferta de turmas sem presença obrigatória, apesar de ser uma alternativa para atender à alta demanda de alunos que precisam cursar CDI 1, não é a regra. Isso significa que nem alunos nem professores estão adaptados ou, até mesmo, preparados para esse modelo. Nesse sentido, é necessário promover discussões para lidarmos com essa situação de uma forma mais adequada e que favoreça o aprendizado dos alunos.

No que tange as análises, por meio das produções escritas dos grupos, foi possível perceber que as tarefas, em especial a tarefa 1, cumpriu seu papel de possibilitar aos alunos se colocarem em atividade. Os quadros 2 e 3 nos mostram que os integrantes dos grupos E e I foram ativos no processo de busca por um modelo para a situação proposta. Acreditamos que alguns fatores que envolvem a maneira como a docente propôs e acompanhou as tarefas sejam relevantes para essa avaliação positiva, a saber: a proposição, em um primeiro momento, da tarefa aberta, permitindo que os alunos tivessem liberdade para criar e propor soluções para o problema; acompanhar o processo de construção do modelo pelos alunos, intervindo quando visse necessidade, conforme ilustrado no Quadro 4; a escolha pela *wiki*, uma ferramenta que propicia o trabalho colaborativo.

Assim, a proposição da tarefa 2 representa um direcionamento da docente, no sentido de explorar a potencialidade da situação-problema proposta na tarefa 1. Isso porque, os percursos dos diferentes grupos podem não ter avançado para exploração de conceitos almejados para o estudo do CDI 1, ainda que tenham chegado a soluções viáveis para o problema. De fato, concordamos com Ponte (2014), para o qual o modo como uma tarefa é proposta, as situações de ensino criadas pelo professor, bem como o próprio engajamento dos alunos, são tão relevantes quanto a própria elaboração criteriosa da tarefa, para que a mesma coloque os alunos em atividade.

Quanto ao trabalho colaborativo, embora a discussão não esteja no escopo deste artigo, percebemos que o AVEA e, em particular, a ferramenta *wiki* associada a uma tarefa aberta, que comporta um grau de indeterminação significativo no que é dado ou no que é pedido (PONTE, 2015), se mostrou um ambiente propício para o compartilhamento de ideias, bem como para a interação dos alunos e destes com a docente. A investigação sobre as interações é, também, uma preocupação do nosso grupo de pesquisa, que tem desenvolvido pesquisas - por exemplo, Borssoi e Silva (2017, no prelo) - no sentido de apontar que as interações entre os alunos e entre alunos e a docente no AVEA têm papel relevante na caracterização do trabalho colaborativo.

Evidentemente, não temos somente pontos positivos acerca do desenvolvimento das tarefas no contexto em que foram realizadas e apresentadas aqui. A própria participação de alguns alunos e a interação entre eles é um fator a ser pontuado, já que há quem deixe de se envolver com as tarefas propostas justamente pelo fato de não estar acostumado com o AVEA. A inclusão desses alunos a esse novo contexto de turma SPO é, também, um desafio com o qual temos que nos preocupar, pois, cada vez mais, tem se tornado uma realidade para nós.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos ao CNPq pelo financiamento por meio do Edital Universal 14/2014 (Processo 457765/2014-3).

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. M. W.; BORSSOI, A. H.; SILVA, K. A. P. Teoria Fundamentada em Dados: uma metodologia para pesquisas em Modelagem Matemática. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 8, p. 803-821, 2015.

BACICH, L.; TANZI NETO, A.; TREVISANI, F. M. **Ensino Híbrido: personalização e tecnologia na educação**, Porto Alegre: Ed. Penso, 2015. p. 47-65.

BORSSOI, A. H.; SILVA, K. A. P.; FERRUZZI, E. C. Tarefas desencadeadas em aulas com modelagem matemática. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. 12., 2016. São Paulo. **Anais**... São Paulo, 2016.

BORSSOI, A. H.; SILVA, K. A. P.; Mídias Educacionais em um Ambiente Virtual de Ensino e Aprendizagem: ampliando possibilidades para o Trabalho Colaborativo. **Revista Contexto & Educação**. 2017. No prelo.

CURY, H. N. (Org.). **Disciplinas matemáticas em cursos superiores**: reflexões, relatos e propostas. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2004. 430 p.

GRAVEMEIJER, K. How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. **Mathematical Thinking and Learning**. n.1, v.1, p.155-177, 1999.

GRAVEMEIJER, K. P. E.; GALEN, F. H. J.; KEIJZER, R. Designing instruction on proportional reasoning with average speed. CHICK, H.; VICENT, J. L (Eds.). **Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME 29)**. Melbourne: PME, 2005, p. 93-121.

LITHNER, J. A research framework for creative and imitative reasoning. **Educational Studies in Mathematics**, v. 67, n. 3, p. 255-276, 2008.

OLIVEIRA, R. C. **Matematização**: estudo de um processo. 2014. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

PALHA, S. et al. Developing shift problems to foster geometrical proof and understanding. **The Journal of Mathematical Behavior***. Springer,* v. 32, p. 141-159, 2013.

PONTE, J. P. da. Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. PONTE, J. P. da (Org.). **Práticas Profissionais dos Professores de Matemática**. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2014. p.13 - 30.

PONTE, J. P. et al. Exercícios, problemas e explorações: Perspetivas de professoras num estudo de aula. **Quadrante**, v. 24, n. 2, 2015.

RAMOS, N. S.; FONSECA, M. O. S.; TREVISAN, A. L. Ambiente de aprendizagem de cálculo diferencial e integral pautado em episódios de resolução de tarefas. In: SIMPÓSIO NACIONAL DE ENSINO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA, 5., 2016. Ponta Grossa. **Anais**... Ponta Grossa, 2016. p. 1-12.

SANTOS, E. R. **Análise da produção escrita em matemática**: de estratégia de avaliação a estratégia de ensino. 2014. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

TREVISAN, A. L.; BORSSOI, A. H.; ELIAS, H. R. Delineamento de uma Sequência de Tarefas para um Ambiente Educacional de Cálculo. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5, 2015. Pirenópolis. **Anais**... Pirenópolis, 2015. p. 1-12.

WATSON, A. et al. Task Design in Mathematics Education. MARGOLINAS, C et al. (Eds.). **Proceedings of the ICMI Study 22**, Oxford, UK, (p. 9 - 16). Oxford: ICMI, 2013.

WROBEL, J. S.; ZEFERINO, M. V. C.; CARNEIRO, T. C. J. Um mapa do ensino de Cálculo nos últimos 10 anos do COBENGE. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO EM ENGENHARIA. 41, 2013, Gramado. **Anais**... Gramado, 2013.

ZEFERINO, M. V. C.; WROBEL, J. S.; CARNEIRO, T. C. J. Cálculo Diferencial e Integral no ENEM: um mapa da produção científica na última década. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. 11, 2013. Curitiba. **Anais**... Curitiba, 2013.

RECEBIDO EM: 19 jun. 2017.
CONCLUÍDO EM: 04 set. 2017.