VIDYA, v. 37, n. 1, p. 199-219, jan./jun., 2017 - Santa Maria, 2017. **ISSN** 2176-4603

INVESTIGANDO A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE POLINÔMIO: UMA ABORDAGEM ENVOLVENDO TEORIAS DAS CIÊNCIAS COGNITIVAS

INVESTIGATING THE CONSTRUCTION OF THE POLYNOMIUM CONCEPT: AN APPROACH INVOLVING THEORIES OF COGNITIVE SCIENCES

ETIENNE LAUTENSCHLAGER*
ALESSANDRO JACQUES RIBEIRO**
YOSSI ZANA***

RESUMO

A compreensão da construção de conceitos matemáticos e sua representação é uma questão fundamental e constante no campo de Educação Matemática. Nesse sentido, o presente artigo, parte integrante de uma tese de doutorado defendida pela primeira autora, tem por objetivo compreender como os professores concebem o conceito de polinômio antes e depois de participarem de um processo de formação, assim como verificar se há movimento entre as concepções estrutural e operacional dos conceitos de polinômio e anel antes e depois desse processo de formação continuada. Trata-se de uma pesquisa de abordagem qualitativa, a qual utilizou-se de análises e atividades matemáticas envolvendo o tema indicado. As conclusões de nossa investigação apontam para a necessidade de uma formação para o professor que ensina matemática, a qual contemple o conhecimento conceitual e procedimental de maneira equilibrada, pois consideramos que a competência matemática baseia-se no desenvolvimento de ambos conhecimentos.

Palavras-chave: Ensino e Aprendizagem de Polinômios. Construção do Conceito em Matemática. Educação Matemática. Ensino e Aprendizagem de Álgebra. Formação de Professores de Matemática.

ABSTRACT

The understanding of the construction of mathematical concepts and their representation is a fundamental and constant question in the field of Mathematics Education. In this sense, this article, an integral part of a doctoral dissertation defended by the first author, aims to understand how teachers conceive the concept of polynomial before and after participating in a training process, as well as to verify if there is movement between structural and operational conceptions of the concepts of polynomial and ring before and after this process of continuous formation. It is a qualitative-quantitative research, which used mathematical analysis and activities involving the indicated topic. The conclusions of our research point to the need for a training for the teacher who teaches mathematics, which contemplates conceptual and procedural knowledge in a balanced way, because we consider that mathematical competence is based on the development of both knowledges.

Keywords: *Teaching and Learning of Polynomials. Concept Construction in Mathematics. Mathematics Education. Teaching and Learning of Algebra. Mathematics Teacher Education.*

* Doutora em Neurociência e Cognição. Secretaria Municipal de Educação da Prefeitura de São Paulo. E-mail: elautens@yahoo.com.br
** Doutor em Educação Matemática. Universidade Federal do ABC (UFABC). E-mail: alessandro.ribeiro@ufabc.edu.br
*** Doutor em Neurociências e Comportamento. Universidade Federal do ABC (UFABC). E-mail: yossi.zana@ufabc.edu.br

INTRODUÇÃO

Este trabalho é parte integrante da tese[1] de doutoramento da primeira autora, desenvolvida junto ao Programa de Pós-graduação em Neurociência e Cognição da Universidade Federal do ABC (UFABC). A referida tese buscou investigar a construção do conhecimento matemático para o ensino do conceito de polinômios com professores de Matemática que lecionam na Educação Básica. Vale ressaltar que a tese se encontra vinculada a um projeto mais amplo[2] financiado pelo Programa Observatório da Educação (Obeduc), financiado pela Coordenadoria de Aperfeiçoamento de Pessoal do Ensino Superior (Capes).

Apresentado o contexto no qual a pesquisa de doutorado foi desenvolvida, situamos nossa intenção de, neste artigo, buscar compreender como os professores concebem o conceito de polinômio antes e depois de participarem de um processo de formação, bem como verificar se há movimento entre as concepções estrutural e operacional do conceito de polinômio antes e depois desse processo de formação continuada.

Nossa problemática foi construída tomando por base as pesquisas que apontam para a importância da construção dos conceitos matemáticos no processo de ensino e aprendizagem de Matemática (MIGUEL, 2011; MANECHINE; CALDEIRA, 2010).

Antes de prosseguirmos com este trabalho, entendemos ser necessário explicitarmos nosso entendimento a respeito do que seja "conceito" segundo algumas pesquisas e teóricos por nós revisados.

Thagard (2008) afirma que os conceitos são representações mentais correspondentes às palavras. O autor exemplifica da seguinte maneira: o conceito "cachorro" é uma estrutura mental que corresponde à palavra "cão", que se refere a cães no mundo.

Wisniewski (2002) é outro pesquisador sobre conceitos e categorização. Para esse pesquisador os conceitos têm sido vistos como representações mentais que permitem às pessoas categorizar ou escolher um grupo de coisas não idênticas (por exemplo, o conceito de cão permite categorizar muitas entidades como "cães", embora elas não sejam idênticas).

Sobre categorização, Jacob e Shaw (1998, p. 155) consideram que "é um processo cognitivo de dividir as experiências do mundo em grupos de entidades, ou categorias, para construir uma ordem física e social do mundo".

Diante do que foi exposto, empregamos o termo "conceito" fazendo referência a uma unidade de representação mental estruturada de conhecimento simbólico de um objeto, ação ou ideia, incluindo todos os elementos a ele associados. O termo "categoria" será empregado para representar uma classe de um conjunto de elementos à qual os conceitos podem pertencer ou estar associados segundo algum critério (PINKER, 1994).

Destacamos assim as principais questões em relação aos conceitos nas ciências cognitivas, quais sejam: (1) como os conceitos são representados; (2) como construímos conceitos (VINNER, 1993); (3) como categorizamos os conceitos e seus exemplares (LIMA, 2010).

Ressaltamos que o estudo dos conceitos se faz importante não somente no contexto da Educação Matemática, mas também são cruciais para processos psicológicos, tais como: a categorização, inferência, memória, aprendizagem e tomada de decisão.

---

[1] A tese tem como título *"Conhecimento Matemático para o Ensino de Polinômios na Educação Básica"* e foi desenvolvida no formato *multi-paper*, tendo em sua composição outros dois artigos (LAUTENSCHLAGER, 2017; LAUTENSCHLAGER; RIBEIRO, 2017) que contemplam outros objetivos específicos da referida pesquisa.

[2] Projeto de pesquisa *"Conhecimento Matemático para o Ensino de Álgebra: uma abordagem baseada em perfis conceituais"*, coordenado pelo orientador desta tese e desenvolvido no seio do grupo de pesquisa "FORMATE - Formação Matemática para o Ensino". Disponível em: <https://goo.gl/dCCR8h>.

O artigo inicia-se pela discussão da literatura acerca de três teorias cognitivas da construção e representação de conceitos: o modelo clássico, a teoria do protótipo e a teoria dos exemplares. Em seguida, discutiremos sobre o conhecimento procedural e o conhecimento conceitual e descreveremos a teoria de construção de conceitos proposta por Anna Sfard. Exploramos os métodos e procedimentos metodológicos da pesquisa, culminando com a análise e a discussão dos dados, finalizando nosso artigo com as conclusões e as considerações finais de nosso estudo, apontando desdobramentos e implicações da pesquisa.

AS DIFERENTES COMPREENSÕES SOBRE O QUE SE ENTENDE POR CONCEITOS: O MODELO CLÁSSICO, A TEORIA DE PROTÓTIPOS E A TEORIA DE EXEMPLARES

O modelo clássico de conceitos consiste em regras lógicas de classificação de objetos como pertencentes a determinadas categorias. Por exemplo, uma forma geométrica fechada de três lados formada por linhas retas é classificada como pertencente à categoria de triângulos. Por outro lado, a representação de um conceito pode ser mais complexa que a própria regra, uma vez que esta é utilizada em tarefas que exigem alta complexidade.

Cada conceito corresponde a um conjunto ou a uma coleção de entidades em que a associação é tudo ou nada, isto é, os membros de uma categoria são somente aqueles objetos ou exemplares que exibem todas as características necessárias e suficientes que definem a categoria.

Características do modelo clássico (SMITH E MEDIN, 1981):

1. As categorias são arbitrárias. Itens podem ser agrupados de inúmeras maneiras para formar categorias e as pessoas podem aprender a identificar ou construir essas categorias definidas pela sua cultura, pois nada no mundo ou em nosso sistema nervoso determina como devemos repartir as nossas observações;
2. As categorias possuem atributos definidores ou críticos. Todos os membros de uma categoria compartilham destes atributos definidores, nenhum não membro compartilha deles, e não há sobreposição entre membros e não membros;
3. O conjunto de atributos determina a extensão de uma categoria (quais itens são membros). De maneira que não faz sentido falar que uma categoria tem uma estrutura interna, com alguns itens se destacando como membros melhores do que outros itens.

Além dessas características, o modelo clássico baseia-se em três pressupostos; apesar de não serem os únicos usados, são os que mais foram utilizados pelos principais trabalhos do ponto de vista da psicologia cognitiva, abordando a temática sobre conceitos de 1920 até 1970 (SMITH E MEDIN, 1981).

Os três pressupostos são:

1. A representação dos conceitos, que envolve descrição sumária da classe; cada conceito possui definições que vão caracterizá-los e determinar se tal elemento pertence ou não àquela classe. Por exemplo, o chipanzé é um animal mamífero? Faça-se uma comparação das características de um chipanzé com a representação sumária, ou conjunto de definições que o caracterizariam como um animal mamífero. Pode-se observar que os mamíferos se alimentam de leite, têm pelos e procriam; o chipanzé possui essas características; então o chipanzé é um animal mamífero;

2. As características definidoras de uma categoria precisam ser tanto individualmente necessárias quanto suficientemente agrupadas, para definir a categoria. Um objeto deve ter quatro lados de tamanho igual e de ângulos iguais para ser uma figura fechada e ser categorizada como um quadrado; se algum desses lados for diferente, a figura não é um quadrado.
3. Somente a definição das características determina se ele pertence ou não àquela categoria;
4. Categorias são agrupadas, destacando-se que a categoria subordinada possui todas as características da categoria supraordenada. Quando se determina que um objeto possui todas as características que o fazem ser reconhecido como uma "rosa", por exemplo, sabemos que ele possui também todas as características definidoras para "flores", para "plantas" e para ser uma "coisa viva".

Nesse modelo, está claramente demarcado o que constitui ou não um exemplar de uma categoria cujas fronteiras estão claramente definidas. Talvez esse seja o problema dessa elegante e difundida teoria dos conceitos. O conceito de um "solteirão" não se relaciona muito com o Papa, mesmo ele sendo um homem adulto e solteiro. Esses fatos desafiam o caráter de tudo ou nada dos conceitos proposto pelo modelo clássico.

Uma outra compreensão acerca do que se entende por conceitos é discutida na Teoria de Protótipo, a qual foi proposta para explicitar deficiências do ponto de vista de definição de atributos (EYSENK e KEANE, 1990). A maior crítica em relação ao modelo clássico era sobre a necessidade e a suficiência das propriedades das classes, mas não questionava a noção da representação do conceito (MURPHY, 2002). "Cães" é a descrição que se aplica a todos os cães, em geral. No modelo clássico, um sumário de definições de atributos é necessário para quantificar as características dos membros, como por exemplo "todos os cães têm quatro patas". Assim, para esses estudiosos existem poucas características que todos os membros de uma categoria têm, mas a sua representação envolve uma lista geral de características que a maioria ou muitos dos membros possuem; e essa lista é a descrição da categoria e não dos membros em particular.

Essa concepção se apoiava sobre as seguintes teses (KLEIBER, 1990):

1. A categoria tem uma estrutura interna prototípica;
2. O grau de representatividade de um exemplar corresponde ao seu grau de vinculação à categoria;
3. As fronteiras das categorias ou dos conceitos são imprecisas;
4. Todos os membros de uma categoria não apresentam as mesmas propriedades comuns;
5. O preenchimento de uma categoria se efetua sobre a base do grau de similaridade com o protótipo;
6. A similaridade não se opera de maneira analítica, mas de modo global.

A última abordagem acerca de nossa discussão sobre o que se entende por conceitos diz respeito à Teoria de Exemplares. De acordo com esta teoria, os indivíduos fazem julgamentos de categorias comparando novos estímulos com as instâncias já armazenadas na memória. A instância armazenada na memória é o "exemplar". O novo estímulo é atribuído a uma categoria com base no maior número de semelhanças que mantém com exemplares dessa categoria. Por exemplo, o modelo propõe que as pessoas criem a categoria "pássaro" ao manter em sua memória uma coleção de todas as aves que conheciam: pardais, avestruzes, pinguins, etc. Se um novo estímulo é semelhante o suficiente a outros exemplos de aves, a pessoa categoriza o estímulo como “pássaro”. De acordo com a Teoria de Exemplares, armazenamos muitos exemplos de cada conceito.

Essa teoria não funciona muito bem com os conceitos simples e apresenta dificuldades em considerar os efeitos do conhecimento sobre a aprendizagem de conceitos.

APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA E TEORIAS COGNITIVAS: A CONSTRUÇÃO DE CONCEITOS SEGUNDO ANNA SFARD

O insucesso escolar na disciplina de Matemática é uma realidade reconhecida por muitos pesquisadores de diferentes áreas, os quais têm concentrado esforços na investigação das possíveis causas e soluções para esse problema (RITTLE-JOHNSON; ALIBALI,1999; RIBEIRO, 2001; ALMEIDA, 2011; OLIVEIRA; LEÃO, 2015).

Muitas dessas dificuldades estão relacionadas à falta de compreensão de muitos dos conceitos matemáticos que são ensinados, desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental até o Ensino Superior, uma vez que esses conceitos apresentam um grau de complexidade acrescido, necessitando a recorrência a um pensamento matemático avançado (DOMINGOS, 2006).

Isso posto, apresentamos as principais características das abordagens estrutural e operacional e descrevemos questões associadas à reificação, teorização desenvolvida por Anna Sfard (SFARD, 1991), a qual procura explicar o modo como os indivíduos se envolvem na compreensão dos conceitos matemáticos que estão subjacentes. Assim sendo, esse referencial teórico nos revela a peculiaridade do raciocínio matemático por meio de reflexões sobre o aspecto ontológico (a natureza das entidades matemáticas) e psicológico (a forma como estas são compreendidas pelo indivíduo).

O ponto de partida para o desenvolvimento desta teoria parece residir na consideração de que as construções matemáticas avançadas são inacessíveis aos nossos sentidos e só podem ser vistas com os olhos da nossa mente. Ser capaz de enxergar essas construções invisíveis parece ser um componente essencial de habilidade matemática, pois a falta dessa capacidade pode ser uma das maiores razões de a matemática parecer praticamente impermeável a tantas “mentes bem formadas”. Assim sendo, o aprendizado matemático em níveis mais avançados não ocorre de modo espontâneo, isto é, sem que ocorra uma intervenção externa, e por isso pode ser considerado dependente de um estímulo (do método de ensino) que foi usado (SFARD, 1991).

Sfard (1991) considera que os matemáticos, de maneira geral, olham para os objetos matemáticos como algo real e inquestionável, como a caneta que utilizam para escrever seus artigos. A pesquisadora salienta que as noções de um objeto matemático são apresentadas aos alunos dessa maneira, sendo esperado que após essa apresentação os estudantes manipulem esse novo objeto com a naturalidade de alguém que olha para ele como algo real, que faça parte de sua vida. No entanto, muitos estudantes não são capazes de desenvolver essa habilidade e não conseguem olhar e manipular os objetos matemáticos com tanta naturalidade, pois, ao contrário de objetos materiais, os constructos matemáticos avançados só podem ser vistos com os olhos da nossa mente. Por isso, quando escrevemos um número ou esboçamos um gráfico devemos ter “em mente” que o que está no papel é apenas uma entre as muitas representações possíveis de alguma entidade abstrata, que por si só não pode ser vista ou manipulada (SFARD, 1991).

Essa maneira de olhar para os objetos matemáticos como algo real e inquestionável parece prevalecer na Matemática Moderna e é designada pela autora como concepção estrutural, assentada na capacidade de ver uma entidade matemática como se fosse uma coisa real, uma estrutura estática que existe em algum lugar no espaço e no tempo. Significa ser capaz de reconhecer a ideia "de relance" e manipulá-la como um todo sem entrar em detalhes.

A introdução de um novo conceito a partir de outros já conhecidos, como por exemplo a introdução da estrutura algébrica de anel a partir do estudo de polinômios, também faz parte de uma concepção estrutural, considerando que o ponto de partida normalmente é um conceito já conhecido e tido como algo pronto e acabado. A abordagem estrutural deve ser considerada como a fase mais avançada de desenvolvimento do conceito. A formação de uma concepção estrutural é um processo demorado e por isso pode ser muitas vezes dolorosamente difícil. Trata-se de uma concepção muito difícil de se alcançar e talvez seja essa habilidade para desenvolver uma concepção estrutural o que distingue matemáticos de "pessoas comuns".

Na concepção operacional, uma noção é concebida como um processo operacional e não como uma construção estática. O pensamento operacional deve ser compreendido como uma sequência de operações sequenciais, ou seja, como um programa de computador que pode traçar o gráfico de uma função, executa cálculos exaustivos, a fim de plotar ponto a ponto para obter o gráfico. No ensino da matemática, considerando as ideias de Sfard, muitas vezes basta a concepção operacional, ou seja, basta saber como lidar com os algoritmos para conviver bem com a Matemática.

Nessa perspectiva, verificar se o conjunto dos números inteiros possui as seguintes propriedades: associativa da adição, comutativa da adição, elemento neutro da adição, elemento oposto da adição, associativa da multiplicação, distributiva da multiplicação e elemento neutro da multiplicação, trata-se de uma concepção operacional. Identificar ou saber que o conjunto Z dos números inteiros é um anel refere-se à concepção estrutural.

Sfard (1991) afirma que as concepções estrutural e operacional podem ser percebidas no desenvolvimento histórico do conceito. Assim, podemos perceber que, embora essas concepções sejam incompatíveis, na verdade são complementares, pois se analisarmos de perto qualquer conceito matemático na maioria das vezes veremos que pode ser definido - e concebido - tanto estrutural quanto operacionalmente.

A partir da análise histórica da formação de alguns conceitos matemáticos, Sfard (1991) defende a conjectura de que a concepção operacional deve preceder a estrutural. Para exemplificar, toma como exemplo a noção de número, mostrando a existência da concepção operacional muito antes de sua concepção estrutural ter sido estabelecida.

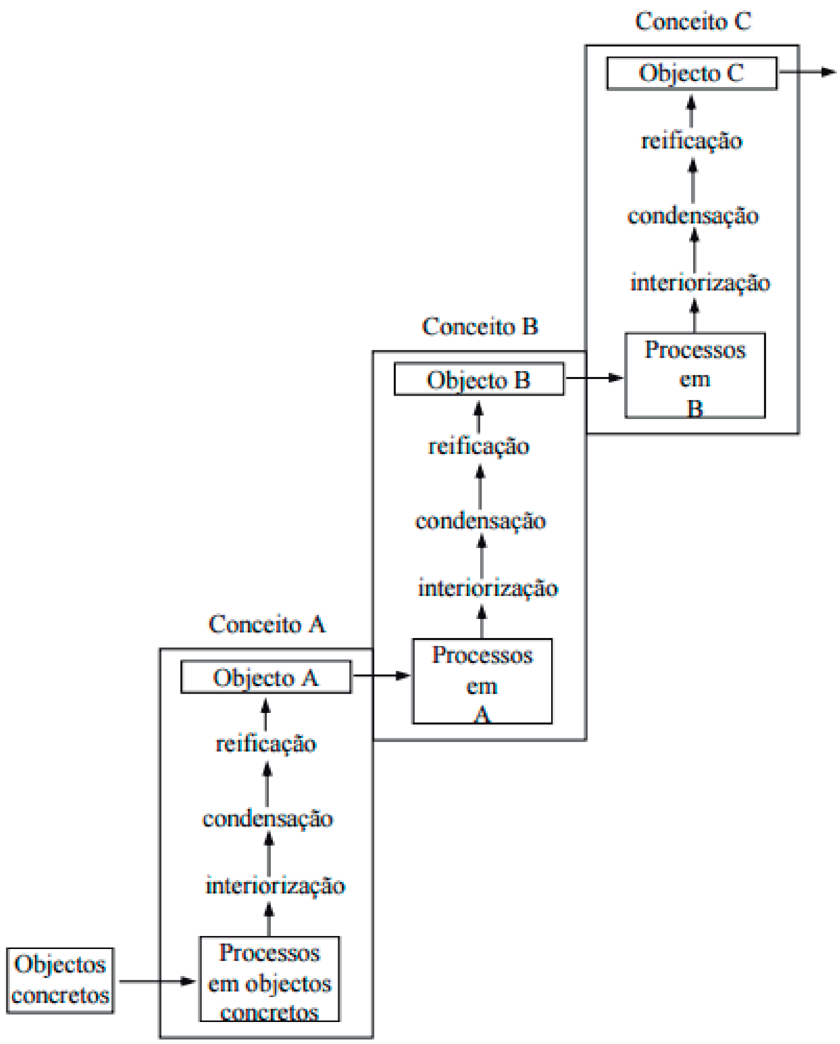
Para Sfard (1991), o aprendiz precisa passar pelo estágio operacional para conseguir construir o conhecimento estrutural de um objeto. Entretanto, a autora enfatiza que isso pode não ser uma condição geral a todos os sujeitos. Nesse sentido Sfard prefere empregar o termo dualidade em vez de dicotomia quando se refere às concepções estrutural e operacional.

Corroborando as observações realizadas por Sfard (1991), Rittle-Johnson, Schneider e Star (2015) também afirmam que a competência matemática baseia-se no desenvolvimento de ambos conhecimentos: conceitual e procedural. Segundo os autores, o conhecimento conceitual é definido como o conhecimento de conceitos que são abstratos e princípios gerais, podendo ser explícitos ou implícitos (não verbalizáveis). O conhecimento procedural é definido como o conhecimento dos procedimentos, que é uma série de passos, ou ações, feitos para alcançar um objetivo. Em seu estudo, os pesquisadores afirmam que as relações entre os dois tipos de conhecimento são bidirecionais e que o aprendizado de procedimentos relacionado com conceitos parece ser melhor do que a aprendizagem de procedimentos com pouca ou nenhuma atenção aos conceitos. Também sinalizam que o conhecimento conceitual não precisa ser bem desenvolvido antes de começar a instrução em procedimento.

Na transição da concepção operacional para a estrutural, Sfard (1991) identifica um padrão com três etapas sucessivas: 1) interiorização: as características de um novo conceito vão aparecendo para o aluno por meio de uma sequência de processos que podem dar origem a um novo conceito; 2) condensação: o estudante começa a pensar sobre o processo como um todo; para exemplificar, Sfard compara a condensação e um programa de computador, isto é, o estudante pensa no problema em termos de entrada-saída em vez de pensar em cada operação específica; 3) reificação: refere-se à súbita capacidade para ver algo familiar de uma forma totalmente nova. As duas primeiras etapas representam o aspecto operacional da notação matemática e a última fase o seu aspecto estrutural.

Embora o processo de reificação seja difícil de atingir, uma vez conseguido facilita a realização matemática - diminui a dificuldade e aumenta a manipulabilidade. A transição do operacional ao estrutural pode ser simplisticamente "comparad[a] ao que acontece quando uma pessoa que está a transportar na mão muitos objetos diferentes e soltos, decide pôr toda a carga num saco" (SFARD; LINCHEVSKI, 1994, p. 198).

Figura 1 - Modelo de formação de conceitos.



Fonte: Sfard, 1991, p. 22

MÉTODO DE NOSSO ESTUDO: OS PROCEDIMENTOS E INSTRUMENTOS ANALISADOS

Descrição do curso de extensão

O curso *O Ensino de Álgebra para a Educação Básica* teve por objetivo promover a ampliação do universo de conhecimentos dos professores de matemática da rede pública de ensino a respeito do processo de ensino e aprendizagem da Álgebra. Foi oferecido nas dependências da Universidade Federal do ABC (UFABC), no estado de São Paulo, nos meses de março a dezembro de 2016 e foi conduzido por professores universitários integrantes do programa Observatório da Educação (Obeduc). O curso teve como carga horária 180 horas, distribuídas em dois módulos de 90 horas cada. No total, foram realizados 31 encontros presenciais e nove sessões à distância, sendo cada uma com duração de 4 horas e 30 minutos, onde foram discutidos os temas: (1) grupos colaborativos; (2) conjuntos dos números naturais, conjunto dos números inteiros, anéis e anéis de polinômios, conjunto dos números racionais e a noção de corpo dos racionais; (3) estudo de funções e corpo dos reais.

No período considerado para a nossa pesquisa foram realizadas aproximadamente 9 sessões presenciais, que ocorreram entre os meses de março a junho.

Destacamos que durante os encontros a teoria dos anéis foi apresentada como a teoria que estuda estruturas algébricas com duas operações binárias, adição (+) e multiplicação (.), e que possuem propriedades similares às dos inteiros. Assim sendo, o conjunto dos números inteiros Z, com as operações usuais, é um anel, enquanto para os números naturais N a não existência do inverso aditivo ou simétrico (-x) inviabiliza este conjunto como anel. Também foi falado que o estudo de anéis se originou a partir do estudo de polinômios e da teoria de inteiros algébricos; por isso foi proposto também o estudo do conceito e das propriedades dos polinômios. Nesse sentido, foram propostas atividades que abordavam as operações de adição e multiplicação de polinômios, bem como o grau e a igualdade de polinômios, correlacionando esses assuntos com o que é estudado no Ensino Básico.

No primeiro encontro, foi realizada uma palestra a respeito da matemática para o ensino de números e formação de professores. A Tabela 1 apresenta o conteúdo apresentado nos encontros presenciais realizados entre março e junho de 2016, considerados neste trabalho.

Tabela 1 - Atividades realizadas nos 9 encontros no curso de extensão.

Encontro nº	Atividade realizada
2	Aplicação do pré-teste Apresentação do Curso e estudo sobre Grupos Colaborativos
3	Estudo do conjunto dos números naturais
4	Estudo do conjunto dos números inteiros
5	Estudo da estrutura algébrica: anel
6	Estudo da estrutura algébrica: anel
7	Estudo dos polinômios
8	Estudo dos polinômios
9	Estudos da estrutura algébrica: anel dos polinômios
10	Aplicação do pós-teste1 e apresentação dos conteúdos que serão estudados na próxima etapa

Fonte: Elaborado pelos autores.

Critérios de Inclusão e Exclusão dos Participantes no Curso

Os critérios de inclusão do curso foram: a) ser licenciado em Matemática por uma Instituição de Ensino Superior privada; b) estar em exercício na rede pública de educação básica como professor regular (não substituto); c) possuir tempo mínimo de atuação como professor igual ou superior a dois anos. Não foram utilizados critérios de exclusão.

O instrumento e os procedimentos

O curso de extensão utilizou-se de um instrumento de coleta de informações sobre os participantes e de um instrumento de avaliação. O questionário foi composto por dez questões de informações sobre o nome, e-mail, data de nascimento, sexo, nome da instituição onde obteve a graduação, dados sobre a vida acadêmica e profissional. O instrumento de avaliação, elaborado por três professores universitários de matemática e Educação Matemática, era composto de dois tipos de questões: questões de conhecimento matemático elementar sobre as operações com polinômios (5 questões), questões relacionadas ao conceito e propriedades dos anéis (3 questões) e questões relacionadas com ensino de matemática (2 questões) (Tabela 2). As últimas não foram consideradas neste trabalho.

Tabela 2 - Instrumento de avaliação.

Questão	Característica
1, 3 e 4	Conceito e as propriedades da estrutura algébrica: anel.
2, 5, 6, 7 e 8	Conceito e das operações com polinômios
9 e 10	Ensino de matemática

Fonte: Elaborado pelos autores

O questionário de caracterização do perfil dos participantes foi aplicado no primeiro dia do curso de extensão. Em seguida, no mesmo dia, foi aplicado o instrumento de avaliação do que seria considerado o Pré-Teste (1) neste trabalho. A duração do teste foi de 3 horas. Decorridos aproximadamente nove encontros, nos quais foi empregada uma variedade de estratégias, tais como: aulas expositivas, realização de atividades em grupo e individualmente, grupos para discussão e análise de atividades e/ou situações matemáticas, foi aplicado o instrumento de avaliação novamente com a mesma duração. Assim sendo, decorridos 30 dias, durante os quais não foi realizada nenhuma atividade com os participantes, o mesmo instrumento foi aplicado pela terceira vez (Pós-teste 2). Os testes foram quantificados por dois avaliadores, ambos professores universitários e não relacionados com este projeto de pesquisa, de forma independente e sem conhecimento da identidade dos avaliados. Evidenciamos que os testes (pré e pós) que foram realizados pelos professores não tiveram como objetivo atribuir-lhes um conceito ou nota.

ANÁLISE DOS DADOS: DESVELANDO O QUE OS PROFESSORES CONHECEM SOBRE OS CONCEITOS DE ANEL E DE POLINÔMIOS

Os dados foram avaliados por meio de estatística descritiva e de forma qualitativa. Não foi realizada uma análise inferencial, uma vez que o número de participantes é muito pequeno e há uma aparente heterogeneidade muito grande entre os sujeitos.

No que se refere ao perfil dos participantes, levantamos que o curso obteve 69 inscrições, porém somente os primeiros 44 inscritos que atenderam os critérios de inclusão foram selecionados. Destes 44 selecionados, somente 10 permaneceram até a fase de pós-teste (2). Dos 10 participantes, 8 foram homens. A idade média foi de 37 anos. Todos obtiveram a licenciatura em instituições de ensino superior privadas localizadas no estado de São Paulo. Quatro participantes declararam possuir um curso de especialização e três possuem título de mestre em matemática ou ensino de matemática. Os dados individuais estão apresentados na Tabela 3.

Tabela 3 - Perfil dos participantes.

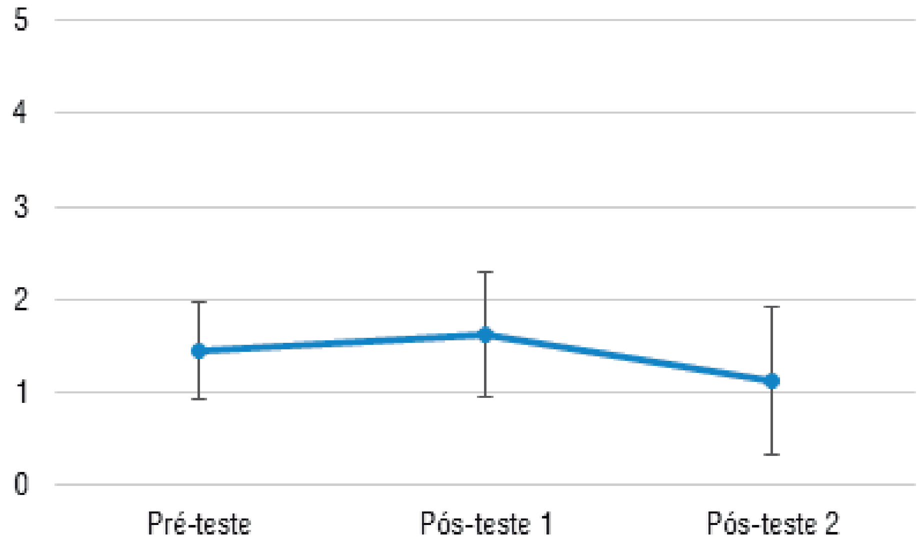
Participante	Idade	Sexo	Ano de conclusão da licenciatura	Pós-Graduação	Tempo de atuação no magistério (anos)
A	39	M	2002	Mestrado	12
B	30	M	2015	Não	2
C	29	F	2011	Mestrado	3
D	29	M	2011	Lato Sensu	6
E	45	M	2012	Lato Sensu	4
F	42	M	2003	Lato Sensu	13
G	38	M	2015	Lato Sensu	2
H	31	M	2011	Não	5
I	37	M	2001	Mestrado	15
J	51	F	1987	Não	26

Fonte: Elaborado pelos autores.

Conhecimento matemático dos professores acerca do conceito de polinômios

A Figura 2 apresenta as notas, considerando as atribuições dos dois avaliadores, dos 10 participantes nas questões 2, 5, 6, 7 e 8, relativas a conhecimento matemático de polinômios nas 3 fases de teste. A nota média na fase inicial foi de 1,45, de um máximo possível de 5,00. Na segunda fase a mudança foi pequena (1,63), mas na terceira fase a média caiu para 1,13.

Figura 2 - Nota dos participantes nas 3 fases de teste de conhecimento de polinômios (questões 2, 5,6,7,8)[3]



Fonte: Elaborado pelos autores.

A Tabela 4 apresenta a nota média das questões de conhecimento matemático de polinômios nas 3 fases de teste. Observa-se uma taxa de acerto muito baixa, sendo que em nenhuma questão ou fase a média foi superior a 50% do máximo possível.

Na Tabela 5 podemos observar as notas segmentadas por participante e avaliador nas três fases. Observa-se que, dentre os dez participantes, somente três (A, C e I) obtiveram notas acima de 2 em alguma das 3 fases; estes três possuem Mestrado. Em relação a estes três participantes, dois (participantes 1 e 3) apresentam uma melhora nominal no desempenho, enquanto o terceiro não. As notas dos dois avaliadores são bastante consistentes entre si.

Tabela 4 - Conhecimento matemático de polinômios.
Nota média por questão de um máximo de 1 nas 3 fases de testes.

	Q2	Q5	Q6	Q7	Q8
Pré-teste	0,30	0,30	0,50	0,00	0,35
Pós-teste 1	0,37	0,37	0,56	0,12	0,19
Pós-teste 2	0,25	0,25	0,25	0,13	0,25

Fonte: Elaborado pelos autores.

[3] A nota máxima possível é 5. Nota média, a partir das atribuições de 2 avaliadores. Barras verticais representam desvio padrão.

Tabela 5 - Conhecimento de polinômios. Soma da pontuação por participante nas questões 2, 5-8 nas 3 fases, atribuída pelo avaliador 1 e 2.

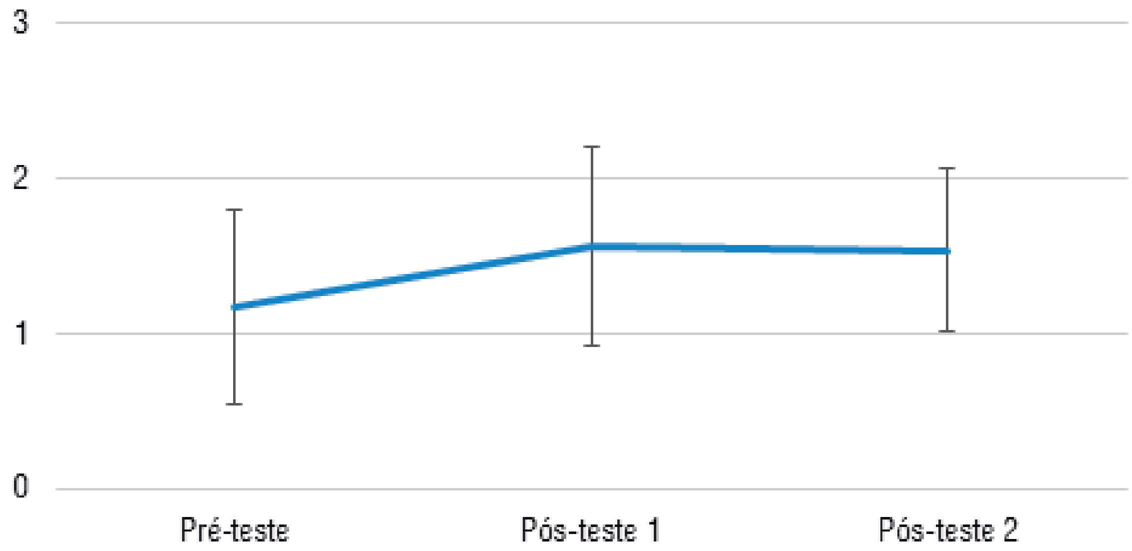
Participante	Pré-teste		Pós-teste(1)		Pós-teste (2)	
	A1	A2	A1	A2	A1	A2
A	4	4	5	5	4	4
B	1	1	0	0	0	0
C	3	3	3	3	2	2
D	2	2	2	2	0	0
E	0	0	0	0	0	0
F	2	2	0	0	NC	NC
G	0	0	1	1	0	0
H	0	0	NC	NC	0	0
I	4	4	3	3	5	5
J	0	0	NC	NC	0	0

Fonte: elaborado pelos autores. NC: não compareceu.

Conhecimento matemático dos professores sobre anéis e suas propriedades

A Figura 3 apresenta as notas, considerando as atribuições dos dois avaliadores, dos dez participantes nas questões 1, 3 e 4 relativas ao conhecimento do conceito de anéis nas 3 fases de teste. A nota média na fase inicial (figura 3) foi de 1,11 de um máximo possível de 6,00. Na segunda fase a mudança foi pequena para cima (1,56) e uma estabilização na terceira (1,53).

Figura 3 - Nota dos participantes nas 3 fases de teste de Anéis (questões 1,3,4)[4]



Fonte: elaborado pelos autores.

[4] Barras verticais representam desvio padrão. A nota máxima possível é 6. Nota média, a partir das atribuições de 2 avaliadores.

A Tabela 6 apresenta a nota média das questões de conhecimento matemático de anéis nas 3 fases de teste. Observa-se uma taxa de acerto muito baixa em geral, nunca superior a 40% do máximo possível.

A Tabela 7 apresenta as notas segmentadas por participante e avaliador nas três fases. Observa-se que, dentre os dez participantes, somente dois participantes (A e I) obtiveram notas consistentemente altas.

Em relação a estes dois participantes, um apresenta uma melhora nominal (participante A) e o outro não. As notas dos dois avaliadores são bastante consistentes entre si.

Tabela 6: Conhecimento matemático de anéis. Nota média por questão de um máximo de 2 nas 3 fases de testes.

	Q1	Q3	Q4
Pré-teste	0,58	0,47	0,05
Pós-teste 1	0,44	0,81	0,31
Pós-teste 2	0,53	0,60	0,40

Fonte: elaborado pelos autores

Tabela 7 - Conhecimento de anéis. Nota geral por participante de um máximo de 6 nas questões 1, 3 e 4 nas 3 fases, atribuída pelo avaliador 1 e 2

Participante	Pré-Teste		Pós-Teste(1)		Pós-Teste2	
	Avaliador 1	Avaliador 2	Avaliador 1	Avaliador 2	Avaliador 1	Avaliador 2
A	4	4	5	6	6	6
B	0	0	0	0	1	0
C	2	2	4	2	3	3
D	0	0	0	0	0	0
E	0	0	0	0	0	0
F	1	0	0	0	NC	NC
G	1	0	5	0	1	0
H	2	0	NC	NC	2	0
I	5	4	2	2	5	5
J	0	0	NC	NC	0	0

Fonte: elaborado pelos autores. NC: não compareceu.

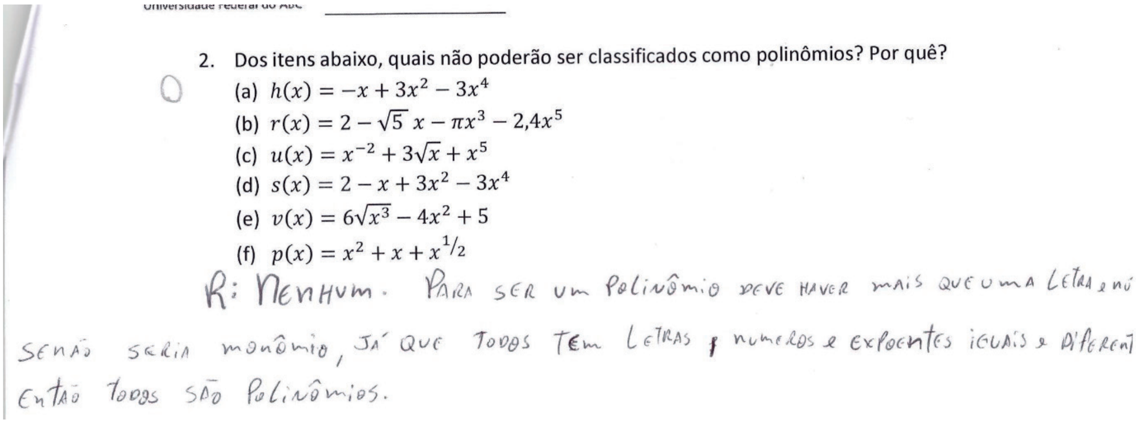
ANÁLISE QUALITATIVA ACERCA DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO DOS PROFESSORES INVESTIGADOS

Apresentamos a seguir uma análise dos dados obtidos na aplicação da avaliação (pré e pós--testes) sob uma perspectiva qualitativa, com um enfoque teórico interpretativo (BOGDAN; BIKLEN,

1994; CRESWELL, 2010; LÜDKE; ANDRÉ, 1986) e utilizando uma abordagem qualitativa. Isto posto, destacamos que nossas análises que trazemos no presente artigo referem-se às questões 2, 3 e 4, por serem aquelas mais relacionadas aos conceitos de polinômio e de anel.

Com relação à questão número 2, no pré-teste apenas três dos dez professores (A, G e I) fizeram alusão à definição formal de polinômios[5], isto é, deram uma explicação parcial, sem referência ao vocabulário matemático específico. A Figura 4, ilustra problemas com relação à definição de polinômios:

Figura 4: Pré-teste - Professor C.


Universidade Federal do ABC

2. Dos itens abaixo, quais não poderão ser classificados como polinômios? Por quê?

(a) $h(x) = -x + 3x^2 - 3x^4$

(b) $r(x) = 2 - \sqrt{5}\, x - \pi x^3 - 2,4x^5$

(c) $u(x) = x^{-2} + 3\sqrt{x} + x^5$

(d) $s(x) = 2 - x + 3x^2 - 3x^4$

(e) $v(x) = 6\sqrt{x^3} - 4x^2 + 5$

(f) $p(x) = x^2 + x + x^{1/2}$

R: Nenhum. Para ser um polinômio deve haver mais que uma letra e nú senão seria monômio, já que todos têm letras e números e expoentes iguais e diferent então todos são polinômios.

Fonte: dados da pesquisa.

Com relação a essa questão, esperávamos que os itens (c), (e) e (f) fossem indicados, uma vez que o expoente não é um número inteiro positivo ou nulo.

De acordo com o professor C todos são polinômios, pois considera que para ser um polinômio "*deve haver mais que uma letra e números, senão seria monômio, já que todos têm letras, números e expoentes iguais e diferentes, então todos são polinômios*" (transcrição do registro do Professor C na Figura 4).

Fica evidente que esse professor entende polinômios como "algo" que possui letras e números misturados, pouco emprega vocabulário matemático, não faz uma distinção com relação aos coeficientes e expoentes e não identifica com exatidão os itens que não são polinômios, demonstrando um desconhecimento conceitual.

A figura 5 - professor H - também revela problemas com relação ao conhecimento conceitual. O protocolo abaixo nos sugere que o professor considera como polinômios apenas as expressões cujos coeficientes pertencem ao conjunto dos racionais.

[5] É denominada função polinomial ou polinômio na variável x toda expressão descrita da seguinte forma: $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_nx^n$, onde $a_0, a_1, a_2, ..., a$ são números reais, denominados coeficientes do polinômio. O coeficiente a_0 é o termo constante. O valor de *n* deve ser um número inteiro positivo ou nulo. Disponível em: <https://goo.gl/ZoedTt>. Acesso em 5 jan. 2016.

Figura 5 - Pré-teste - Professor H.

2. Dos itens abaixo, quais não poderão ser classificados como polinômios? Por quê?

(a) $h(x) = -x + 3x^2 - 3x^4$

~~(b)~~ $r(x) = 2 - \sqrt{5}\ x - \pi x^3 - 2{,}4x^5$

(c) $u(x) = x^{-2} + 3\sqrt{x} + x^5$

(d) $s(x) = 2 - x + 3x^2 - 3x^4$

(e) $v(x) = 6\sqrt{x^3} - 4x^2 + 5$

(f) $p(x) = x^2 + x + x^{1/2}$

Por possuírem $\sqrt{5}$ e π.

Fonte: dados da pesquisa.

Ao analisarmos os pós-testes, notamos que dos sete que erraram a questão no pré-teste apenas o professor D acerta a questão, porém sua justificativa é incompleta e sem referência ao vocabulário matemático específico (figura 6). Os outros seis professores não demonstraram alterações em suas respostas ou justificativas, mesmo após terem participado dos encontros que discutiram o conceito de polinômios e suas propriedades.

Conjecturamos que a situação descrita acima pode ter suas raízes na falta de compreensão desse conceito matemático durante a fase como estudante do Ensino Básico, resistindo ao Ensino Superior e perdurando até o momento (DOMINGOS, 2006).

Figura 6: Pós teste 1 - professor D.

2. Dos itens abaixo, quais não poderão ser classificados como polinômios? Por quê?

(a) $h(x) = -x + 3x^2 - 3x^4$

(b) $r(x) = 2 - \sqrt{5}\ x - \pi x^3 - 2{,}4x^5$

~~(c)~~ $u(x) = x^{-2} + 3\sqrt{x} + x^5$

(d) $s(x) = 2 - x + 3x^2 - 3x^4$

~~(e)~~ $v(x) = 6\sqrt{x^3} - 4x^2 + 5$

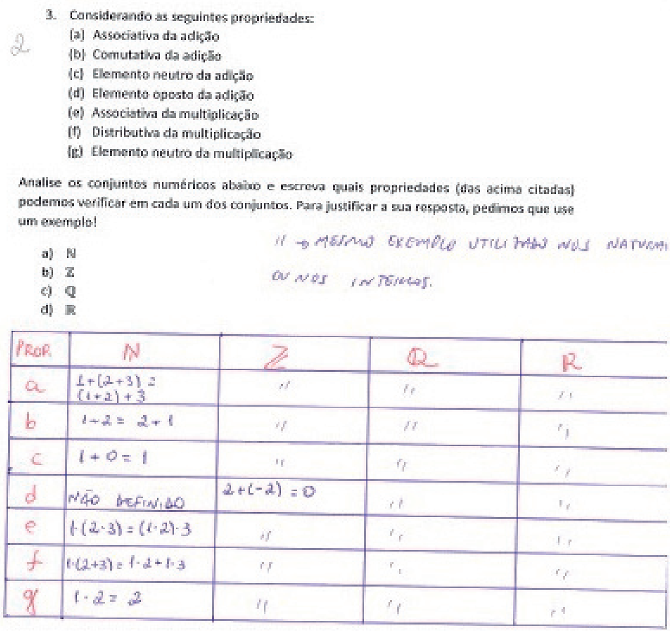
~~(f)~~ $p(x) = x^2 + x + x^{1/2}$

Por causa do expoente.

Fonte: dados da pesquisa (grifo nosso).

Ao analisarmos as respostas obtidas na questão 3 (pré-teste), observamos que os professores (A, H e I) respondem à questão corretamente, fazendo uso (ou não) do vocabulário matemático específico. Destacamos que a questão 3 apresenta as 7 condições que constituem a definição formal da estrutura algébrica anel, sem fazer menção a tal estrutura (concepção operacional; SFARD, 1991)

Figura 7 - Pré-teste - Professor I.


2

3. Considerando as seguintes propriedades:
(a) Associativa da adição
(b) Comutativa da adição
(c) Elemento neutro da adição
(d) Elemento oposto da adição
(e) Associativa da multiplicação
(f) Distributiva da multiplicação
(g) Elemento neutro da multiplicação

Analise os conjuntos numéricos abaixo e escreva quais propriedades (das acima citadas) podemos verificar em cada um dos conjuntos. Para justificar a sua resposta, pedimos que use um exemplo!

a) ℕ
b) ℤ
c) ℚ
d) ℝ

// → MESMO EXEMPLO UTILIZADO NOS NATURAIS OU NOS INTEIROS.

PROP.	N	Z	Q	R
a	1+(2+3) = (1+2)+3	//	//	//
b	1+2 = 2+1	//	//	//
c	1+0 = 1	//	//	//
d	NÃO DEFINIDO	2+(-2) = 0	//	//
e	1·(2·3) = (1·2)·3	//	//	//
f	1·(2+3) = 1·2+1·3	//	//	//
g	1·2 = 2	//	//	//

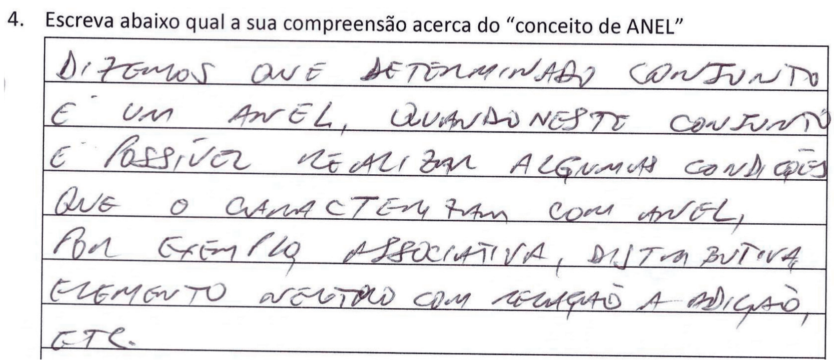
Fonte: Dados da pesquisa.

Quatro professores registraram “não lembro” ou “não sei” e três professores deixaram a questão em branco.

Com relação ao pós-teste, registramos que os professores C e G acertaram tal questão e os professores A, C e I continuaram respondendo corretamente. Percebemos que a maior parte dos professores apresentam dificuldades com as propriedades comutativas e associativas de operações binárias.

Com relação à questão 4, relacionada à concepção estrutural e tratando do conceito de anel[6], dois professores registraram a representação pictórica de um anel. A maioria deixou “em branco” esta questão, revelando a pouca familiaridade dos professores com esta estrutura algébrica. O professor I foi o único que forneceu uma resposta escrita em linguagem natural com expressões do vocabulário matemático (Figura 8).

Figura 8 - Pré-teste - Professor I.


4. Escreva abaixo qual a sua compreensão acerca do “conceito de ANEL”

DIZEMOS QUE DETERMINADO CONJUNTO É UM ANEL, QUANDO NESTE CONJUNTO É POSSÍVEL REALIZAR ALGUMAS CONDIÇÕES QUE O CARACTERIZAM COM ANEL, POR EXEMPLO ASSOCIATIVA, DISTRIBUTIVA ELEMENTO NEUTRO COM RELAÇÃO À ADIÇÃO, ETC.

Fonte: dados da pesquisa.

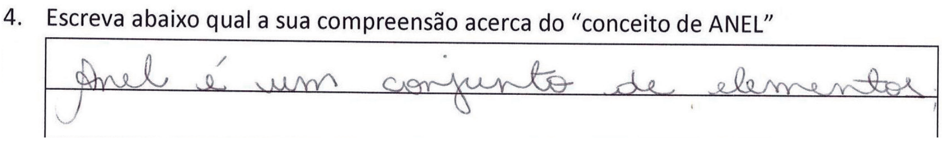
[6] Um anel A é um conjunto não vazio munido de duas operações binárias, denotadas por $+$ (adição) e $\cdot$ (multiplicação) tais que, para todos a, b, c $\in$ A, verificam-se as seguintes propriedades: associatividade da adição, comutatividade da adição, existência de elemento neutro aditivo, existência de elemento simétrico aditivo, associatividade da multiplicação, distributividade da multiplicação sobre a adição. (Retirado de VELOSO, PAULA M., JONES. Introdução à álgebra não comutativa via exemplos. Região Nordeste, SBM, 2014).

De acordo com o relato dos professores que ministraram o encontro referente ao conceito de anel, não foi registrado nenhum questionamento dos professores participantes em relação à exemplificação de $\mathbb{Z}$ como anel. Conjecturamos tratar-se de um conjunto numérico com o qual o professor teve/tem um amplo contato em sua vida escolar e em sua vida profissional; talvez por isso não houve muitos questionamentos. No entanto, esperávamos que os professores pudessem estabelecer alguma conexão entre os conceitos de anel e o de número inteiro.

Com relação ao pós-teste, observamos que somente os professores A, C, G e I responderam corretamente, mas sem preocupação com o rigor matemático. Os demais registraram respostas do tipo “não sei”, “não lembro” ou deixaram em branco.

Observamos que o conhecimento conceitual de anel que foi estudado durante o curso, mais especificamente a definição formal, permaneceu aparentemente inativo ou esquecido, pois os resultados obtidos nos pós-testes não revelam melhoria significativa com relação aos resultados (Figura 9). Isso nos remete a pensar sobre o processo longo e inerentemente difícil que é a transição de operações computacionais para objetos abstratos (SFARD, 1991).

Figura 9: Pós- teste1 - Professora J


4. Escreva abaixo qual a sua compreensão acerca do “conceito de ANEL”

Anel é um conjunto de elementos

Fonte: dados da pesquisa.

Assim sendo, todas as situações descritas acima, denunciam que a maior parte dos professores participantes do processo de formação possuem um frágil conhecimento sobre a estrutura algébrica em questão. Consideramos o nível de acertos abaixo do esperado, por se tratar de professores de Matemática em efetivo exercício na rede pública de ensino do estado de São Paulo e por já terem tido contato com a álgebra abstrata durante a graduação.

Na questão 7, é solicitado ao professor que determine as raízes de uma equação polinomial do 3º grau. Esse conteúdo é geralmente estudado no 3º ano do Ensino Médio, conforme indica a proposta curricular do estado de São Paulo.[7] Com relação ao pré-teste, observamos que nenhum professor conseguiu resolver com êxito tal questão: todos entregaram em branco, embora possamos tratar o conteúdo desta questão dentro do conhecimento procedimental (concepção operacional).

Após a realização do pós-teste, somente os professores A e I conseguiram empregar técnicas e procedimentos de maneira satisfatória para a determinação da solução da questão, conforme ilustra a figura a seguir:

[7] A Secretaria da Educação do Estado de São Paulo desenvolveu, em 2008, por meio da Coordenadoria de Gestão da Educação Básica, um currículo base para os anos iniciais e anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio. Com a medida, a Educação pretende fornecer uma base comum de conhecimentos e competências que, utilizada por professores e gestores das mais de cinco mil escolas estaduais paulistas, permita que essas unidades funcionem, de fato, como uma rede articulada e pautada pelos mesmos objetivos. Além desses documentos, o Currículo do Estado de São Paulo se completa com um conjunto de materiais dirigidos especialmente aos professores e aos alunos: os Cadernos do Professor e do Aluno, organizados por disciplina, de acordo com a série, ano e bimestre. Neles, são apresentadas Situações de Aprendizagem para orientar o trabalho do professor no ensino dos conteúdos disciplinares específicos e a aprendizagem dos alunos. (retirado de <https://goo.gl/vK3nio>, em 07/01/2017)

Figura 10: Pós-teste - Professor I.

7. Determine as raízes da seguinte equação polinomial:

$$15x^3 + 22x^2 - 15x + 2 = 0$$

1

DA PESQUISA DE RAÍZES RACIONAIS TE

$\{\pm 1, \pm 2\}$ E $\{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15$

ESCOLHENDO -2, VEM:

$$\underbrace{15\cdot(-2)^3}+22\cdot(-2)^2-15\cdot(-2)+2=$$

$$-120+88+30+2=0$$

APLICANDO BRIOT - RUFFINI

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 15 & 22 & -15 & 2 \\ \hline & 15 & -8 & 1 & 0 \end{array}$$

$$15x^2-8x+1=0$$

$$\frac{8\pm\sqrt{64-4\cdot 15\cdot 1}}{2\cdot 15}$$

$$\frac{8\pm 2}{30} \quad \begin{array}{l} \nearrow \ \frac{10}{30}=\frac{1}{3} \\ \searrow \ \frac{6}{30}=\frac{1}{5} \end{array}$$

$$S=\left\{-2,\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{3}\right\}$$

Fonte: dados da pesquisa.

CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÕES

A literatura na área de Educação (SHULMAN, 1986; 1987) e, em específico, na Educação Matemática (BALL; THAMES; PHELPS, 2008), nos fornece evidências com as quais corroboramos, no sentido de que o professor necessita deter um conhecimento aprofundado da Matemática - e do conceito de polinômio em particular (DODA; SAYBAS, 2011) - para que possa ter maior autonomia e autoconfiança no processo da reconstrução do saber.

No entanto, em nosso estudo, pudemos observar que isso não ocorre com a maioria dos professores participantes dessa pesquisa. A análise das questões que envolviam o aspecto operacional envolvendo os polinômios revelou que os professores desconhecem procedimentos para operar com polinômios, dado que cometem muitos equívocos nas operações com polinômios. Também foi revelado um conhecimento fragilizado a respeito do conceito de polinômio, considerando que somente dois dos dez investigados conseguiram identificar e justificar corretamente quais itens eram polinômios. Os dados também evidenciam que os professores, embora tenham cursado na Licenciatura em Matemática disciplinas sobre os conteúdos da álgebra abstrata, desconhecem o conceito de anel, seja por uma concepção estrutural ou processual (WASSERMAN, 2014; SFARD, 1991).

Também registramos que oito dentre os dez professores apresentaram mal-entendidos na definição formal de polinômios (DEDE; SOYBAŞ, 2011). Temos um indício de que as definições que vão caracterizar e determinar se tal elemento pertence ou não ao conceito de polinômio não estão claras para esses professores. Nesse caso, parece-nos que os professores representam um conceito baseados num grupo de características e não por suas definições, isto é, um elemento é caracterizado como sendo polinômio se é suficientemente similar ao "protótipo" que o professor possui em sua mente.

Destacamos que a maioria dos professores define os polinômios utilizando uma linguagem usual, sem o emprego da linguagem matemática, como sendo "uma soma algébrica de monômios", ou ainda "polinômios são expressões algébricas racionais e inteiras", sem a preocupação de especificar, por exemplo, que o grau do polinômio P(x) dado por n é um número inteiro não negativo. A maioria dos livros didáticos traz definições desse tipo para polinômios (JACOMELLI, 2003) e essa "visão simplista" do conceito de polinômios parece ser suficiente para o professor dar aula. Não consideramos que esta seja uma condição adequada; por isso apontamos a necessidade de realizar pesquisas sobre o tema, tendo como contexto a sala de aula.

Com base nas semelhanças estruturais, não podemos falar dos polinômios sem considerar a estrutura de anel. Assim sendo, parece-nos também que com relação a esse conceito, nos contextos operacional e estrutural, a maioria dos professores apresenta dificuldades. Foi observado no pré-teste que apenas dois dentre os dez possuem maior "desenvoltura" em operar com as propriedades que caracterizam um anel, mesmo não relacionando tais propriedades ao conceito. Por esse fato, justificamos que os mesmos conseguiram atingir a compreensão em um nível um pouco mais elevado, isto é, houve a formação de uma concepção estrutural na mente desses professores. Verificamos que a "reificação" aconteceu somente com esses dois professores, uma vez que conseguiram reconhecer a estrutura de anel "por detrás" do conjunto dos números inteiros e dos polinômios, sem receber nenhuma instrução sobre o assunto.

Constatamos que o conhecimento produzido durante o curso não contribuiu significativamente para a (re)construção de um conhecimento conceitual bem desenvolvido para a maior parte dos professores, o que reforça a ideia de que a concepção estrutural a respeito de um dado conceito é muito difícil de alcançar (SFARD, 1991). Assim sendo, conjecturamos a necessidade de mais encontros, aumento da carga horária de estudos e realização de atividades para alcançar a concepção estrutural de um dado conceito.

Por outro lado, também destacamos que esses professores não possuíam a concepção operacional do conceito estudado, uma vez que não conseguiram realizar com sucesso as atividades cujo foco estava no emprego de procedimentos para obtenção dos resultados. Considerando o fato de que, por vezes, os processos devem ser vistos como uma "base" para o entendimento dos conceitos, mais uma vez apontamos a dificuldade no desenvolvimento do conhecimento conceitual por parte dos participantes. Por fim, vale ressaltar que consideramos aqui a existência de uma relação bidirecional entre conhecimento conceitual e procedimental (RITTLE-JOHNSON; SCHNEIDER; STAR, 2015).

REFERÊNCIAS

ALIBALI, M. W. How children change their minds: Strategy change can be gradual or abrupt. **Developmental Psychology**, 35, 127-145, 1999.

ALMEIDA, M. M. R. **Insucesso na matemática:** as percepções dos alunos e as percepções dos professores. Portugal, Porto. Dissertação de Mestrado, 2011.

BOGDAN, R., BIKLEN, S., (1994). **Investigação Qualitativa em Educação** - uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora

CRESWELL, J. W. W. **Projeto de pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto**. 2. ed. Porto Alegre: Bookman, 2010.

DEDE, Y.; SOYBAŞ, D. Preservice mathematics teachers' concept images of polynomials. **Quality & Quantity**, v. 45, n. 2, p. 391-402, 2011.

DOMINGOS, A. Teorias cognitivas e aprendizagem de conceitos matemáticos avançados. **Anais...** XVII Seminário de Investigação em Educação Matemática, Setúbal, 2006.

EYSENK, M. W; KEANE, M. T. **Cognitive psychology**: a student's handbook. London: Laurence Erlbaum Associates, 1990.

JACOB, E. K.; SHAW, D. Sociocognitive perspectives on representation. In M. Williams (Ed.). **Annual review of information science and technology** (vol. 33, pp. 131-185). Information Today, Inc.: Medford, NJ, 1998.

JACOMELLI, K.Z. POLINÔMIOS DE "SABER A ENSINAR" A "SABER ENSINADO" em 7ª SÉRIE. 94p. Trabalho de conclusão de curso, Departamento de Matemática, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Universidade Federal de Santa Catarina, 2003.

KLEIBER, G. **La sémantique du prototype**: catégories et sens lexical. Paris: Presses Universitaires de France, 1990.

LAUTENSCHLGER, E. **Conhecimento matemático para o ensino de polinômios na Educação Básica**. 2017 (no prelo)

LAUTENSCHLGER, E.; RIBEIRO, A. J. Formação do professor de matemática e o ensino de polinômios. **Educação Matemática em Pesquisa**. v. 19, n. 2, 2017 (no prelo)

LIMA, G. Â. B. de O. Apresentando o modelo clássico e o modelo de protótipos. **Perspectivas em ciência da informação**, v. 15, n. 2, p. 108-122, 2010.

LUDKE, M. e ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação**: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

MANECHINE, S. R. S.,; CALDEIRA, A. M. de A. Construção de Conceitos Matemáticos na Educação Básica numa Abordagem Peirceana. **Boletim de Educação Matemática**, v. 23, n. 37, pp. 887-904, 2010.

MIGUEL, J. C. O ensino de matemática na perspectiva da formação de conceitos: implicações teórico-metodológicas. **Núcleos de Ensino-PROGRAD-UNESP**, v. 1, p. 375-394, 2011.

MURPHY, G. L. **The big book of concepts**. Cambridge: MIT Press, 2002.

OLIVEIRA, N. dos S.; LEÃO, M. F. Dificuldades de aprendizagem em adição e subtração ocorridas com estudantes da Educação de Jovens e Adultos. **# Tear: Revista de Educação, Ciência e Tecnologia***,* v. 4, n. 1, 2015.

PINKER, S. How could a child use verb syntax to learn verb semantics? **LINGUA**, v. 92, 377-410, 1994.

RIBEIRO, A. J.. **Analisando o desempenho de alunos do Ensino Fundamental em Álgebra, com base em dados do SARESP**. Dissertação de Mestrado, 2001.

RITTLE-JOHNSON, B.; SCHNEIDER, M.; STAR, J. R. Not a one-way street: Bidirectional relations between procedural and conceptual knowledge of mathematics. **Educational Psychology Review**, v. 27, n. 4, p. 587-597, 2015.

SFARD, A. On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. **Educational studies in mathematics**, v. 22, n. 1, p. 1-36, 1991.

SFARD, A.; LINCHEVSKI, L. The gains and the pitfalls of reification—the case of algebra. **Educational studies in mathematics**, v. 26, n. 2-3, p. 191-228, 1994.

SHULMAN, L. S. Those who understand: Knowledge growth in the teaching. **Educational Researcher**, Washington, US, v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986.

SHULMAN, L. S. Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. **Harvard Educational Review**, Cambridge, US, v. *57,* n. 1, p. 1-22, 1987.

SMITH, E. E.; MEDIN, D. L. **Concepts and categories.** Cambridge, MA: Harvard University Press, 1981.

THAGARD, P. Conceptual change in the history of science: Life, mind, and disease. **International handbook of research on conceptual change**, p. 374-387, 2008.

VINNER, S. Concept definition, concept image and the notion of funtion. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 14, n. 3, p. 293-305, 1983.

WISNIEWSKI, E. J. Concepts and Categorization. In: Medin, D. editor. **STEVENS' HANDBOOK OF EXPERIMENTAL PSYCHOLOGY**, v. 2. MEMORY AND COGNITIVE PROCESSES. New York, NY: Wiley, 2002, p. 467-531.

RECEBIDO EM: 06 jun. 2017.
CONCLUÍDO EM: 20 ago. 2017.