VIDYA, v. 37, n. 2, p. 533-547, jul./dez., 2017 - Santa Maria, 2017. **ISSN** 2176-4603

SET-BEFORES E *MET-BEFORES*: INFLUÊNCIA NO ESTUDO DE ANÉIS DE POLINÔMIOS

SET- BEFORES AND MET-BEFORES: INFLUENCE IN THE STUDY OF POLYNOMIAL RINGS

DEBORA CRISTIANE BARBOSA KIRNEV*
ANGELA MARTA PEREIRA DAS DORES SAVIOLI**

RESUMO

Neste artigo apresentamos parte de uma pesquisa sobre a transição do pensamento matemático, na qual investigamos que *set-befores* e *met-befores* estão envolvidas em resoluções de atividades sobre anéis de polinômios. Para obtenção dos dados aplicamos uma avaliação em duas fases a estudantes que já cursaram a disciplina de estruturas algébricas. Inferimos que os estudantes são categorizados dentro dos três mundos da matemática, mais especificamente, no mundo *conceitual corporificado*, e classificamos as resoluções em diferentes níveis de pensamento quanto ao domínio da matemática. Concluímos que as *set-befores* e *met-befores* envolvidas no processo de resolução são decorrentes dos conteúdos aprendidos em operações com polinômios no conjunto dos números reais, nas experiências vivenciadas principalmente durante a Educação Básica.

Palavras-chave: Educação Matemática. Estruturas Algébricas. Anéis de Polinômios.

ABSTRACT

In this paper we present part of a research on the transition of mathematical thinking, in which we investigate that set-befores and met-befores are involved in resolutions of activities on polynomial rings. To obtain the data, we apply a two-stage evaluation to students who have already studied algebraic structures. We infer that students are categorized within the three worlds of mathematics, in the embodied conceptual world, and we classify the resolutions at different levels of thinking regarding the domain of mathematics. We conclude that the set-befores and met-befores involved in the resolution process are derived from the contents learned in operations with polynomials in the set of real numbers, in the experiences lived mainly during the Basic Education.

Keywords: *Mathematics Education. Algebraic Structures. Polynomial Rings.*

* Doutoranda em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Universidade Norte do Paraná. E-mail: deborabarbosa09@yahoo.com.br
** Doutora em Matemática. Universidade Estadual de Londrina. E-mail: angelamarta@uel.br

INTRODUÇÃO

De acordo com Boyer e Merzback (2012), temos que historicamente o desenvolvimento da Álgebra ocorreu em duas grandes etapas. A primeira inicia na antiguidade com os indícios do pensamento algébrico e a resolução de equações advindas de problemas cotidianos e permanece até por volta do século XVIII. A segunda etapa, que ocorre por volta do século XIX, atinge seu ápice com o desenvolvimento das Estruturas Algébricas, baseadas em axiomas e propriedades envolvendo o processo de prova de teoremas que fundamentam a Álgebra, que nesse contexto é denominada de Álgebra Moderna ou ainda, Álgebra Abstrata.

Atualmente adotamos uma linguagem simbólica convencional, na qual um estudante em processo de escolarização precisa construir significados para termos notacionais e associar a linguagem simbólica com formas de pensamento algébrico.

Fiorentini, Miguel e Miorin (1993, p. 95) ressaltam que mesmo possuindo diferentes concepções sobre a definição do que é a Álgebra, o ensino da álgebra tende a "redução do pensamento algébrico à linguagem algébrica". Isto é, são trabalhadas a resolução de atividades que consistem em converter a linguagem corrente em linguagem simbólica e aplicar algoritmos para a resolução.

Porém, desde os anos iniciais, pode haver o desenvolvimento do pensamento matemático. Destacamos, por exemplo, que a transposição de um pensamento aritmético para o pensamento algébrico promove um avanço do desenvolvimento do pensamento matemático para um estágio mais elevado, em que procede a uma transição de operações para objetos abstratos promovendo um desenvolvimento cognitivo.

Sobre esse tipo de processo salientamos que "o crescimento cognitivo do pensamento básico ao pensamento matemático avançado no indivíduo pode, em hipótese, começar a partir da 'percepção' e 'ação' sobre objetos no mundo externo." (TALL, 1995, p.3, tradução nossa[1]) Ressaltamos que, a aprendizagem de álgebra requer o desenvolvimento de uma dimensão estrutural e processual do conhecimento matemático.

Destacamos que Kirnev (2012), em estudos com estudantes do Ensino Superior, aponta que em um processo de argumentação para demonstração de resultados matemáticos, estudantes apresentam dificuldades referentes a notação, a linguagem e a forma que se emprega a argumentação. Evidenciadas tais dificuldades, podemos verificar que um estudante não desenvolveu o pensamento matemático avançado (PMA), conforme Tall (1995), pois o PMA envolve o uso de estruturas cognitivas derivadas de uma ampla gama de atividades matemáticas que promovem a construção de novas ideias que desenvolvam e ampliem um sistema cada vez maior de teoremas estabelecidos.

Considerando o processo de escolarização básica que os estudantes possuem para subsidiar os estudos no Ensino Superior, entendemos que certas dificuldades que os estudantes apresentam em Estruturas Algébricas devem-se a um ensino básico em que se apresenta uma álgebra estrutural previamente a processos algébricos sem o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Sobre o processo de ensino e a relação entre Educação Básica e Ensino Superior, temos que Moreira e David (2005, p. 23) afirmam que "a 'validade' dos resultados matemáticos a serem discutidos no processo de escolarização básica não está posta em dúvida; ao contrário, já está garantida, *a priori¸* pela própria Matemática Acadêmica". Ou seja, os estudantes no ciclo básico de aprendizagem não desenvolvem habilidades e competências que promovem o desenvolvimento do PMA relacionados aos

[1] "The cognitive growth from elementary to advanced mathematical thinking in the individual may therefore be hypothesised to start from "perception of" and "action on" objects in the external world.

processos axiomáticos de provas e demonstrações, culminando em dificuldades diante de conteúdos com natureza complexa, como por exemplo, os abordados em Estruturas Algébricas.

Nessa perspectiva, investigamos o processo do desenvolvimento do pensamento algébrico, e como isso interfere no processo de ensino e aprendizagem de Estruturas Algébricas. A partir disso, pesquisamos sobre o processo de desenvolvimento cognitivo envolvido na aprendizagem matemática e nos deparamos com os estudos de David Tall (2004) sobre *set-befores* e m*et-befores* que nos auxiliaram a compreender como um sujeito pode desenvolver o PMA, e averiguarmos: "Que *set-befores* e *met-befores* estão envolvidos em resoluções de atividades sobre anéis de polinômios?"

Para esse trabalho, delimitamos nosso objetivo de "investigar sobre *set-befores* e *met-befores* e verificar suas influências no processo de aprendizagem de polinômios na Educação Básica e a relação estabelecida com anéis de polinômios no estudo de Estruturas Algébricas".

REFERENCIAL TEÓRICO

Set- Befores e Met- Befores

David Tall (2004) investiga aspectos da natureza do PMA, segundo o autor, existe mudança do pensamento matemático elementar (PME) para o PMA se um indivíduo se apropria de uma linguagem formal para definir e provar objetos matemáticos. Ou seja, o que difere estas formas de pensamento são as mudanças dos estágios da 'descrição' aplicadas em situações de aprendizagem para a 'definição' utilizada na matemática formal.

As mudanças envolvidas no pensamento na transição da matemática escolar à prova formal em matemática pura no Ensino Superior são objetos de estudos de Tall (2008). Segundo o autor, a matemática escolar é vista como uma combinação de representações visuais, incluindo a geometria e gráficos, em conjunto com cálculos e manipulações simbólicas. As mudanças da matemática pura no Ensino Superior envolvem a formalização por meio de sistemas axiomáticos e prova matemática.

Com base no exposto, nos apoiamos no processo que Tall (2004, 2008) define como a transição do pensamento por meio dos 'três mundos da matemática', ou seja, o mundo 'conceitual corporificado' com base na percepção, ação e experimento de pensamento, o mundo 'proceitual simbólico' de cálculo e manipulação algébrica comprimindo processos, tais como a contagem em conceitos tais como o número, e o mundo 'axiomático formal' de definições, conceitos, conjunto teórico e prova matemática.

Quadro 1 - Três mundos da matemática.

Mundo da Matemática	Descrição
Conceitual Corporificado	Este mundo trata dos aspectos de percepção e observação das propriedades dos objetos do mundo externo, assim como, a identificação de padrões, semelhanças, diferenças, recorrendo, por exemplo, a exemplificações, representações gráficas e uso da linguagem corrente.
Proceitual Simbólico	Neste mundo estão contidos os aspectos relacionados com a linguagem simbólica matemática, sendo este o mundo dos símbolos e suas manipulações no cálculo da álgebra, aritmética, ou seja, aplicam-se procedimentos mais elaborados, tomando como base o rigor matemático.
Formal Axiomático	Neste mundo temos um desenvolvimento matemático baseado em axiomas, definições e prova de teoremas. Isto é, lidamos em um mundo relacionado com a matemática formal.

Fonte: dos autores, baseado em Tall (2004, 2008).

Cada 'mundo' tem a sua própria sequência de desenvolvimento e suas próprias formas de prova podem ser combinadas para dar uma rica variedade de formas de pensar matematicamente. Tall (2008, p. 5) afirma que "isso revela o pensamento matemático como uma combinação de diferentes estruturas de conhecimento, por exemplo, os números reais são uma combinação de corporificações da reta numérica, de símbolos na aritmética decimal e um corpo ordenado completo na teoria formal".

Neste sentido, esse modelo permite formas de analisar o desenvolvimento de uma atividade matemática, sendo que possibilita uma interpretação da aprendizagem da matemática desde a matemática elementar tratada na Educação Básica, até a matemática formal do Ensino Superior.

Segundo Tall (2008) podemos recorrer a aportes teóricos para descrever como estruturas genéticas existentes desde a formação do indivíduo podem permitir o desenvolvimento do pensamento matemático. Além disso, essas pesquisas apontam como as experiências que o indivíduo vivenciou podem afetar o seu crescimento pessoal.

A partir disso, nos apoiamos nesse autor e o aporte teórico citado para justificar as construções que são utilizadas por estudantes para o processo de transição da matemática da Educação Básica para a matemática do Ensino Superior, como por exemplo, a corporificação e simbolismo são misturados com o formalismo. Temos que em um desenvolvimento cognitivo mais elevado, teoremas estruturados são provados nas teorias axiomáticas voltando para formas mais sofisticadas de corporificação e simbolismo, revelando a relação íntima entre os três mundos, e caracterizando o desenvolvimento do PMA.

A seguir apresentamos uma visão global da aprendizagem humana em longo prazo, baseados em Tall (2008). O autor considera a construção de estruturas genéticas que todos compartilhamos e desenvolvemos por meio do conhecimento individual mais sofisticado, baseado em experiências pessoais. O autor destaca que existem três atributos humanos fundamentais estabelecidos antes do nosso nascimento em nossos genes que são essenciais para pensamento matemático e que o crescimento pessoal depende da interpretação do indivíduo de novas situações com base nas experiências que foram vivenciadas anteriormente.

Segundo Tall (2008, p.6) o termo '*set-befores*' é adotado:

> [...] para se referir a uma estrutura mental que nós nascemos na qual podemos levar um pouco de tempo para amadurecer e que nossos cérebros fazem conexões desde o início da vida. Por exemplo, a estrutura visual do cérebro foi construída com sistemas para identificar cores e tons, para ver mudanças na sombra, identificar bordas, coordenar as bordas de objetos e acompanhar seus movimentos. Assim, a criança nasce com um sistema biológico para reconhecer um pequeno número de objetos (um, dois, ou talvez três) que dá um '*set-befores'* para o conceito de 'duplicidade' antes que a criança aprenda a contar. Outros *set-befores* incluem concepções como '*up'* e '*down'* relacionadas com a força da gravidade e nossa postura ereta, e o conceito relacionado ao horizontal. Outra é a sensação de peso que encontramos através da tração sobre nossos músculos quando nós levantamos objetos. Outros *set-befores* incluem as capacidades

> sociais para interagir com outros usando gestos como apontar para chamar a atenção para as coisas (TALL, 2008, p. 6, tradução nossa[2]).

Baseado nessa descrição o autor aponta que há três *set-befores* fundamentais no qual moldamos o nosso aprendizado de longo prazo nos conduzindo a pensar matematicamente de maneiras específicas. São especificados por:

> • *reconhecimento* de padrões, semelhanças e diferenças;
> • *repetição* de sequências de ações até que se tornem automáticas;
> • *linguagem* para descrever e aperfeiçoar a maneira como pensamos sobre as coisas (TALL, 2008, p. 7, tradução nossa[3]).

Ou seja, por meio do reconhecimento e da repetição articulados com a linguagem podemos praticar rotinas e o uso de símbolos relacionados nos permite focar em importantes ideias para o sujeito em aprendizagem, que posteriormente irá nomeá-las e falar sobre elas, e refinar o seu significado. Neste sentido o reconhecimento de padrões é uma habilidade essencial para a matemática, incluindo padrões de forma e número.

Além disso, a repetição possibilita a automatização de procedimentos de aprendizagem, possibilitando a utilização da linguagem simbólica de modo sucinto, porém é preciso haver a abstração dos conceitos envolvidos.

Há também um processo de pensamento mais sofisticado que envolve não só a capacidade de executar o processo, mas também de pensar nisso como entidades sofisticadas em sua própria estrutura de pensamento, em que os símbolos operam duplamente como processo e conceito (*procept*) para permitir-nos pensar de forma flexível (Gray & Tall, 1994 apud Tall 2008).

Em síntese, o desenvolvimento do pensamento matemático depende densamente destes três *set-befores*, pois a partir deles um indivíduo pode ser capaz de examinar uma sequência de ações e desenvolvê-las de modo fluente, além de refletir sobre o processo, sendo passível de analisa-la, ou ainda, refazê-la sempre que necessário.

Quanto aos m*et-befores,* trata-se:

> [...] do desenvolvimento pessoal que se baseia em experiências que o indivíduo vivenciou antes. Experiências anteriores formam conexões no cérebro que afetam o modo como damos sentido às novas situações. Eu defino um *met-befores* de ser uma 'facilidade mental atual com base nas experiências prévias específicas do indivíduo'. [...] Um *met-befores*, às vezes, é consistente com a nova situação e, por vezes, inconsistente. Por exemplo, um *met-befores* "2 + 2 dá 4" é experimentado pela primeira vez, e o número continua em toda aritmética sendo coerente com a aritmética das frações, inteiros positivos e negativos, números racionais, reais e

[2] I use the term 'set-before' to refer to a mental structure that we are born with, which may take a little time to mature as our brains make connections in early life. For instance, the visual structure of the brain has built-in systems to identify colors and shades, to see changes in shade, identify edges, coordinate the edges to see objects and track their movement. Thus the child is born with a biological system to recognize small numbers of objects (one, two, or perhaps three) that gives a 'set-before' for the concept of 'twoness' before the child learns to count. Other set-befores include conceptions such as 'up' and 'down' related to the pull of gravity and our upright posture, and the related concept of the horizontal. Another is the sense of weight that we encounter through the pull on our muscles as we lift objects. Other set-befores include the social ability to interact with others using gestures such as pointing to draw attention to things.

[3] • *recognition* of patterns, similarities and differences;
• *repetition* of sequences of actions until they become automatic;
• *language* to describe and refine the way we think about things;

> complexos. Mas o *met-befores* “tirando dá menos” permanece consistente com frações (positivas), mas é inconsistente com negativos, em que tirando -2 dá mais. O mesmo *met-befores* funciona de forma consistente com conjuntos finitos, em que tirando um subconjunto deixa menos elementos, mas é inconsistente no contexto dos conjuntos infinitos, em que removendo os números pares dos números naturais ainda deixa os números ímpares com a mesma cardinalidade (TALL, 2008, p. 7, tradução nossa[4]).

Segundo o autor, os *met-befores* podem operar secretamente, afetando a maneira que as pessoas interpretam a nova matemática, por vezes, há vantagem, mas, por vezes, causando confusão interna que impede o aprendizado.

Tall complementa que,

> muitos termos dos currículos focam na ampliação das experiências com base nos *met-befores* positivos, deixando de abordar *met-befores* que causam a muitos alunos profundas dificuldades. Por exemplo, os matemáticos têm o conceito de limite como um *met-befores* em suas próprias mentes, que, para eles, é a base lógica do cálculo e análise; mas não é um *met-befores* para estudantes começando o cálculo e provoca profundas dificuldades (TALL, 2008, p. 7, tradução nossa[5]).

Baseados no exposto, temos que as mudanças decorrentes do desenvolvimento cognitivo são derivadas da capacidade do pensar ao longo do tempo, da reorganização de informações assimiladas e utilizadas para formar novas estruturas, que em geral possuem um nível de sofisticação superior que a anterior e são apropriadas para desenvolver soluções de problemas geradas por situações novas. Ou seja, o processo de aprendizagem não é simplesmente um acúmulo de experiências anteriores acrescentando novas informações às existentes; e sim a reformulação de informações antigas a novas maneiras, modificando e desenvolvendo o pensamento matemático da forma elementar para a avançada. Para que esse processo ocorra utilizamos as *set-befores* e *met-befores* como bases para o crescimento cognitivo.

Pirâmide de Avaliação

Para De Lange (1999), uma tarefa matemática contempla diversas informações podendo estar associadas a conteúdos distintos. Isso requer que o estudante realize uma decodificação da mesma e para promover a resolução é preciso que haja a interpretação de linguagem simbólica e formal, correlacionadas com a linguagem natural, ou seja, nesse

[4] Personal development builds on experiences that the individual has met before. Previous experiences form connections in the brain that affect how we make sense of new situations. I define a met-before to be ‘a current mental facility based on specific prior experiences of the individual.’[...] A met-before is sometimes consistent with the new situation and sometimes inconsistent. For instance, the met-before ‘2+2 makes 4’ is experienced first in whole number arithmetic and continues to be consistent with the arithmetic of fractions, positive and negative integers, rational, real and complex numbers. But the met-before ‘taking away gives less’ remains consistent with (positive) fractions, but is inconsistent with negatives where taking away -2 gives more. The same met-before works consistently with finite sets, where taking away a subset leaves fewer elements, but is inconsistent in the context of infinite sets, where removing the even numbers from the counting numbers still leaves the odd numbers with the same cardinality.

[5] Most long-term curriculum focus only on broadening experiences based on positive met- befores, failing to address met-befores that cause many learners profound difficulties. For example, mathematicians will have the limit concept as a met-before in their own minds, which, for them, forms the logical basis of calculus and analysis; but it is not a met-before for students beginning calculus and causes profound difficulties.

processo podemos obter diferentes representações mentais para um mesmo enunciado de um problema proposto em uma tarefa matemática. Para a formulação de uma resolução do problema é preciso haver a conexão com um conjunto de tarefas que se relacionam e a partir disso, desenvolver a solução de problemas e a validação das mesmas.

Uma tarefa que promove a reflexão exige que os estudantes analisem, interpretem, desenvolvam suas próprias estratégias e desenvolvam um processo argumentativo evoluindo gradativamente para um processo de provas e generalizações. Segundo De Lange (1987), isso caracteriza um processo de 'matematizar'. Ou seja, a matematização "é uma atividade de organização e de estruturação para a qual conhecimento e habilidades adquiridos são usados para descobrir regularidades desconhecidas, relações e estruturas" (DE LANGE, 1987, p. 42[6]).

Segundo o autor, há dois tipos de matematização. Destacamos primeiramente, a matematização horizontal que compreende o processo de adaptar uma situação para outra matematicamente formulada, por meio de esquemas, padrões, regularidades e relações, construídas pelo sujeito na qual traduz a situação do mundo real para a linguagem matemática. Esse processo se baseia em:

> - identificar alguma matemática específica em um contexto geral;
> - esquematizar;
> - formular e visualizar um problema de diferentes modos;
> - descobrir relações;
> - descobrir regularidades;
> - reconhecer aspectos isomórficos em diferentes problemas;
> - transpor um problema do mundo real para um problema matemático;
> - transpor um problema do mundo real para um modelo matemático conhecido (DE LANGE, 1987, p. 43).

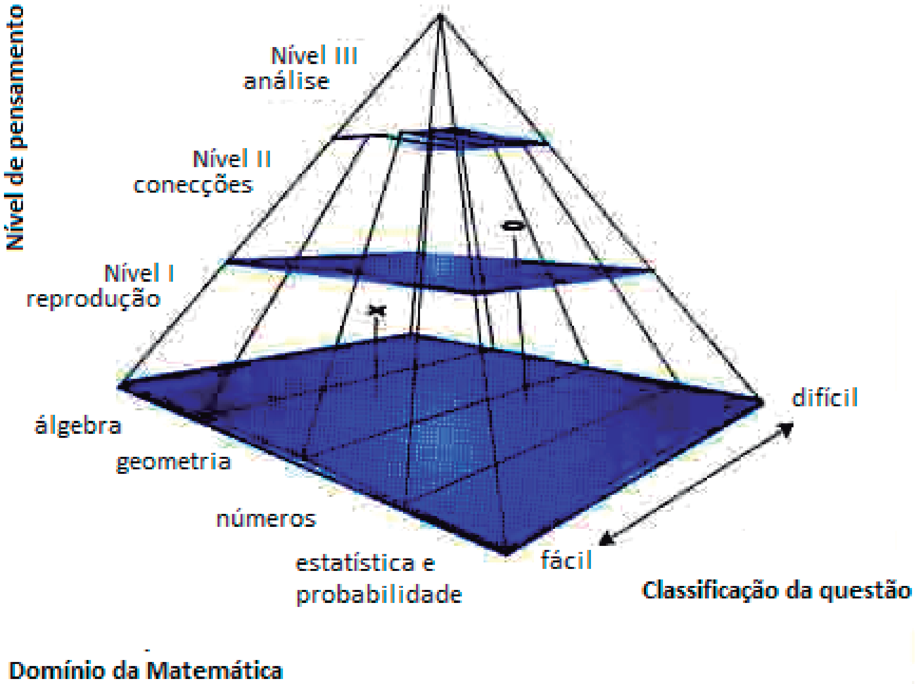
A outra forma de matematização é denominada de vertical e é caracterizada pelo fato do problema ser transposto em um problema matemático e resolvido por meio de ferramentas matemáticas. Esse processo se baseia em:

> - representar uma relação em uma fórmula;
> - provar regularidades;
> - refinar e ajustar modelos;
> - usar diferentes modelos;
> - combinar e integrar modelos;
> - formular um novo conceito matemático;
> - generalizar (DE LANGE, 1987, p. 44).

Sintetizando o exposto anteriormente podemos representar esquematicamente pela pirâmide proposta pelo autor:

[6] Is an organizing and structuring activity to which acquired knowledge and skills are used to discover unknown regularities, relations and structures.

Figura 1 - Pirâmide de Avaliação



Fonte: adaptação da pirâmide de De Langue (1999).

Ambas as formas de matematização, horizontal e vertical, são componentes que estão fortemente relacionadas e os processos entre ambas se interagem em uma resolução de problema de uma tarefa a se resolver, podendo ser utilizadas como um processo para avaliação realizada em fases.

Com base no exposto anteriormente, De Lange (1987) aponta que uma avaliação em duas fases oportuniza aos estudantes refletir a respeito de seu próprio trabalho, possibilitando analisar o desenvolvimento dos processos envolvidos na matematização.

METODOLOGIA

Visando realizar um estudo a respeito do desenvolvimento do PMA optamos por uma investigação no Ensino Superior, em uma área do conhecimento na qual fosse relevante esse estudo e promovesse contribuições para os processos de aprendizagem da Matemática. Nesse sentido delimitamos a pesquisa em conteúdos que abordem sobre Estruturas Algébricas.

Uma vez delimitada a área do conhecimento, convidamos bacharelandos de um curso de Matemática de uma universidade estadual do norte do Paraná, Brasil, que já haviam cursado a disciplina de Estruturas Algébricas para participar da investigação, em um total de sete estudantes, codificados por E1, E2,..., E7. A pesquisa caracterizou-se como de natureza qualitativa, cunho descritivo e interpretativo.

Para a coleta de dados, desenvolvemos uma proposta de tarefas com base nas referências bibliográficas da disciplina de Estruturas Algébricas da universidade do curso em questão, para ser aplicada em duas fases a esses estudantes. A primeira fase foi uma avaliação diagnóstica, aplicada sem consulta, em que posteriormente foi realizada uma pré-análise e considerado o processo de resolução e as dúvidas decorrentes do desenvolvimento das atividades. A segunda fase consistiu na refacção das atividades da avaliação diagnóstica. Nesta etapa foi devolvida a mesma avaliação da primeira fase, em posse de material de pesquisa e demais materiais que o estudante julgasse necessário. Além disso, o estudante pode realizar e/ou modificar as resoluções já feitas na fase diagnóstica das atividades propostas.

Em ambas as fases, investigamos um processo de reflexão por parte dos estudantes sobre o conteúdo abordado e o nível de dificuldade da atividade realizada, promovendo uma análise sobre seu processo de aprendizagem. No período entre as duas fases os estudante assistiram aulas no curso de graduação que contemplavam os conteúdos abordados na primeira fase, e foram orientados a pesquisar em outras fontes.

Com relação ao contexto de resolução da questão, temos que todos os estudantes haviam cursado a disciplina de Estruturas Algébricas. Além disso, não realizaram uma retomada de conteúdo antes da aplicação da questão e não foram informados sobre qual conteúdo seria contemplado na aplicação da tarefa, os mesmos fizeram com base nos conhecimentos prévios adquiridos anteriormente à aplicação e isso nos remete que as *set-befores* e *met-befores* que possuíam a partir da construção do pensamento matemático que desenvolveram ao longo do tempo.

Neste texto apresentamos apenas a análise da seguinte questão:

Encontre a soma e o produto dos seguintes polinômios: $f(x) = 2x^3 + 4x^2 + 3x + 2$ *e* $g(x) = 3x^4 + 2x + 4$ *em* $Z_5[x]$. *Calcule o grau de* $f + g$ *e o grau de* fg.

Solução esperada:
$f(x) + g(x) = (2x^3 + 4x^2 + 3x + 2) + (3x^4 + 2x + 4) = 3x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 1$; *temos um polinômio de grau 4.*
$f(x) \,.\, g(x) = (2x^3 + 4x^2 + 3x + 2) \,.\, (3x^4 + 2x + 4) = x^7 + 4x^4 + 3x^3 + 2x^6 + 3x^3 + x^2 + 4x^5 + x^2 + 2x + x^4 + 4x + 3 = x^7 + 2x^6 + 4x^5 + x^3 + 2x^2 + x + 3$; *temos um polinômio de grau 7.*

Fonte: adaptação de DOMINGUES, H. H; IEZZI, G. **Álgebra** *Moderna*,
volume único, 4ª ed., São Paulo: Atual, 2003.

A partir da questão proposta, temos que considerar que representando de uma forma generalizada, podemos compreender um polinômio como uma sequência de um anel, em que a partir de certa ordem, todos os termos da sequência são nulos. Por exemplo, o polinômio $f(x) = (2,3,4,2,0,0,...,0,...)$ $Z_5[x]$ é indicado na forma usual por meio de $f(x) = 2x^3 + 4x^2 + 3x + 2$.

A seguir apresentamos os resultados obtidos por meio das análises dos registros escritos apresentados na primeira fase, que será o objeto de estudo neste trabalho.

ANÁLISES

Após as aplicações das duas fases e da pré-análise, consideramos resoluções semelhantes para realizar agrupamentos. Em um primeiro momento fizemos a descrição da resolução de cada estudante e posteriormente realizamos as inferências apoiadas no referencial teórico pertinente ao agrupamento analisado.

Ressaltamos que no grupo de sete estudantes participantes da pesquisa, apenas o estudante E1 não desenvolveu uma resolução para a questão, justificando que "*Não aprendi esse conteúdo [...]*" (registro do estudante E1). Quanto aos demais obtivemos: Grupo 1: resolveu a questão considerando as operações em R[x] e Grupo 2: resolveu a questão considerando as operações parcialmente em Z_5 [x]. A seguir apresentamos as análises por agrupamento.

Grupo 1

Neste grupo temos os estudantes E3, E4, E6 e E7. Na resolução da questão esses estudantes desenvolveram as operações dos polinômios como se os coeficientes fossem números reais, desconsiderando o especificado no enunciado que o anel de polinômio adotado é o Z_5[x], ou seja, os coeficientes são números inteiros pertencentes às classes de restos {0,1,2,3,4}.

Os estudantes realizaram as operações como é a proposta no ensino de polinômios no decorrer da Educação Básica, desconsiderando a abordagem dada em disciplinas de Estruturas Algébricas, na qual operamos com as classes de restos.

Neste sentido entendemos que os mesmos possuem dificuldades de interpretação do enunciado e da notação utilizada.

Além da característica comum que possibilitou o agrupamento, tivemos resolução de ambos os itens da questão e resolução parcial, esse fato gerou subgrupos de análises. A seguir apresentamos um quadro síntese com as resoluções obtidas nesse grupo e realizamos uma subdivisão de acordo com a quantidade de respostas apresentadas.

Quadro 1 - síntese das resoluções obtidas

	Estudante	Resolução da operação de adição em R[x]	Resolução da operação de multiplicação em R[x]
Subgrupo A	E3	X	
	E6	X	
Subgrupo B	E4	X	X
	E7	X	X

Fonte: dos autores

Vejamos a seguir as resoluções do subgrupo A.

Figura 2- registro escrito do estudante E3

$$(f+g)(x) = 2x^3 + 4x^2 + 3x + 2 + 3x^4 + 2x + 4$$
$$= 3x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 5x + 6$$

Fonte: dos autores

Figura 3- registro escrito do estudante E6

$$f+g = 3x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 5x + 6$$

$$f \cdot g =$$

Fonte: dos autores

Os estudantes E3 e E6 resolveram parcialmente a questão, realizando a operação de adição de polinômios usual nos números reais. O estudante E3 justifica que nesta resolução teve dificuldade com o conteúdo e que "*não sei como ficaria a soma dos polinômios em $Z_5[x]$*" (registro do estudante E3). Considerando as experiências vividas anteriormente por esses estudantes as *met-befores* desenvolvidas não foram suficientes para que os estudantes promovessem as resoluções. Com base na categorização dos três mundos da matemática de Tall (2004, 2008) podemos indicar que há uma percepção sobre os objetos matemáticos, mas ainda não há compreensão dos mesmos, indicando o princípio do desenvolvimento do mundo *conceitual corporificado*. Corroborando com essa caracterização de Tall, temos que os estudantes se encontram na base da pirâmide do desenvolvimento de De Lange (1999) na qual se lida parcialmente com a reprodução de procedimentos algébricos.

Os estudantes do subgrupo B resolveram ambos os itens da questão. Vejamos o primeiro caso:

Figura 4 - registro escrito do estudante E4

$$f+g = (2x^3+4x^2+3x+2)+(3x^4+2x+4)$$
$$= 3x^4+2x^3+4x^2+5x+6$$

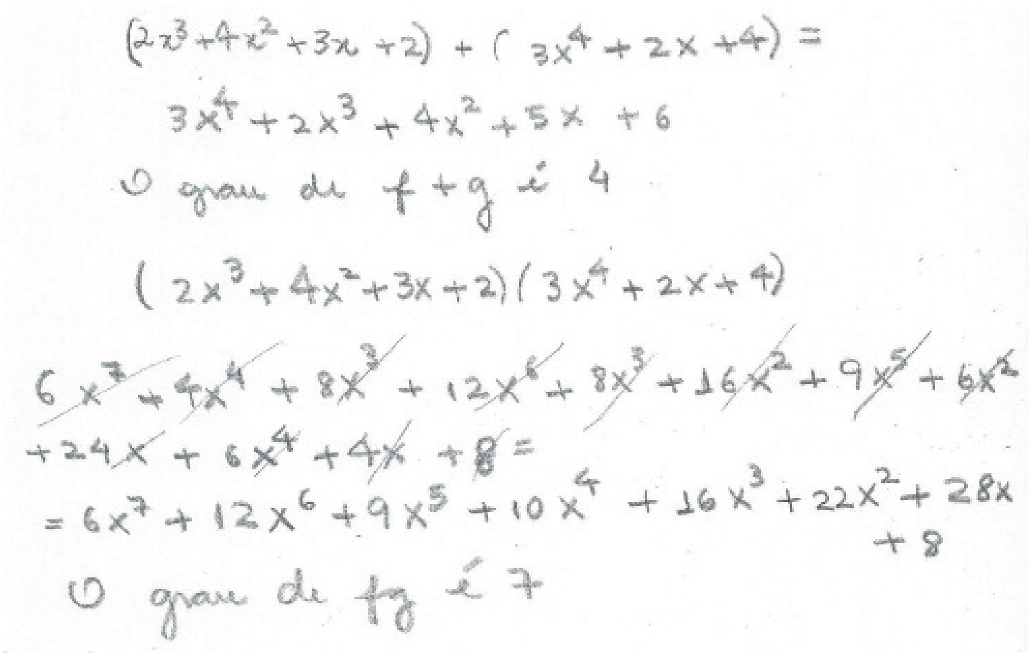
grau 4

$$f \cdot g = (2x^3+4x^2+3x+2)(3x^4+2x+4)$$
$$= 6x^7+4x^4+8x^3+12x^6+8x^3+16x^2+9x^5+6x^2+12x+6x^4+4x+8$$
$$= 6x^7+12x^6+9x^5+6x^4+16x^3+22x^2+16x+8$$

grau 7.

Fonte: dos autores

Figura 5 - registro escrito do estudante E7



$(2x^3+4x^2+3x+2)+(3x^4+2x+4)=$

$3x^4+2x^3+4x^2+5x+6$

O grau de $f+g$ é 4

$(2x^3+4x^2+3x+2)(3x^4+2x+4)$

$\cancel{6x^7}+\cancel{4x^4}+\cancel{8x^3}+\cancel{12x^6}+\cancel{8x^3}+\cancel{16x^2}+\cancel{9x^5}+\cancel{6x^2}$
$+24x+6x^4+4x+8=$
$=6x^7+12x^6+9x^5+10x^4+16x^3+22x^2+28x$
$+8$

O grau de fg é 7

Fonte: dos autores.

Os estudantes E4 e E7 resolveram ambas as operações solicitadas para a questão, ou seja, realizaram as operações de adição e multiplicação de polinômios usual nos números reais. As *met-befores* mobilizadas para a resolução da atividade demonstram que os estudantes associaram as experiências vividas com as operações com polinômios usualmente abordadas na Educação Básica, sendo desprezadas nesse processo de resolução as experiências vivenciadas no Ensino Superior na disciplina de Estruturas Algébricas, ou seja, os estudantes não associam ambos os processos de ensino e aprendizagem, sendo assim eles ainda transitam segundo Tall (2004, 2008) em um mundo da matemática *conceitual corporificado*. Baseado em De Lange (1999) os estudantes estão em um processo de *identificação* do contexto matemático envolvido na questão, mostrando que desenvolvem esse tipo de questão com base na *reprodução*.

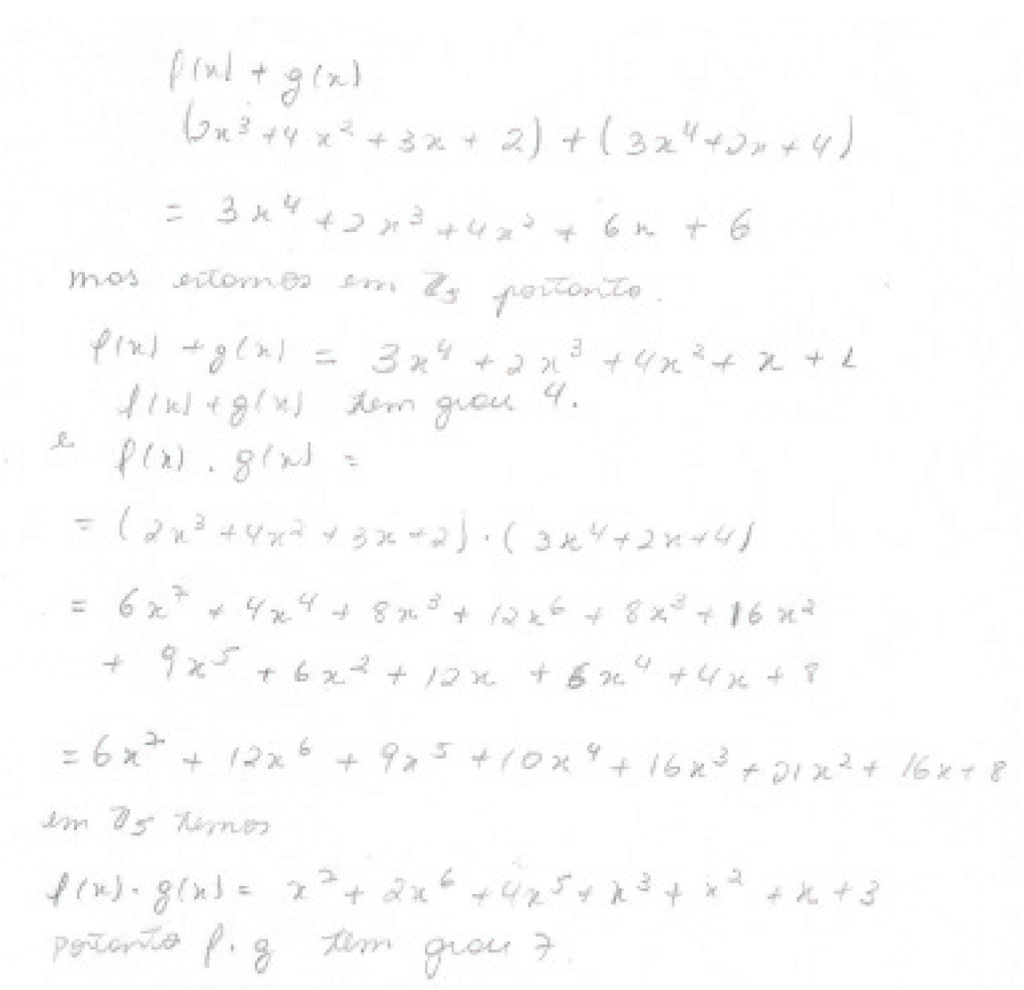
A seguir verificamos as resoluções do próximo grupo.

Grupo 2

Neste grupo temos os estudantes E2 e E5. Na resolução da questão esses estudantes desenvolveram as operações dos polinômios como se os coeficientes fossem números reais, porém consideraram o especificado no enunciado que o anel de polinômio adotado é $Z_5[x]$, mas tiveram dificuldades em realizar as operações utilizando as classes de restos.

Vejamos o exemplo de resolução:

Figura 6 - registro escrito do estudante E2.



$f(x) + g(x)$

$(6x^3 + 4x^2 + 3x + 2) + (3x^4 + 2x + 4)$

$= 3x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 6x + 6$

mas estamos em $\mathbb{Z}_5$ portanto.

$f(x) + g(x) = 3x^4 + 2x^3 + 4x^2 + x + 1$

$f(x) + g(x)$ tem grau 4.

e $f(x) \cdot g(x) =$

$= (2x^3 + 4x^2 + 3x + 2) \cdot (3x^4 + 2x + 4)$

$= 6x^7 + 4x^4 + 8x^3 + 12x^6 + 8x^3 + 16x^2$

$+ 9x^5 + 6x^2 + 12x + 6x^4 + 4x + 8$

$= 6x^7 + 12x^6 + 9x^5 + 10x^4 + 16x^3 + 21x^2 + 16x + 8$

em $\mathbb{Z}_5$ temos

$f(x) \cdot g(x) = x^7 + 2x^6 + 4x^5 + x^3 + x^2 + x + 3$

portanto $f \cdot g$ tem grau 7.

Fonte: dos autores.

Observamos que o estudante E2 não obteve o resultado de acordo com a solução esperada, pois errou no agrupamento dos termos com variável x^2, isso demonstra dificuldade na manipulação simbólica.

Figura 7 - registro escrito do estudante E5.

Temos: $(f+g)(x) = 3x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 5x + 6$ e

$(f \cdot g)(x) = (2x^3+4x^2+3x+2)(3x^4+2x+4) = 6x^7 + 4x^4 + 2x^3$

$+ 12x^6 + 8x^3 + 4x^2 + 9x^5 + 6x^2 + 12x + 3x^4 + 4x + 8 =$

$= 6x^7 + 12x^6 + 9x^5 + 7x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 16x + 8$

Então, em $Z_5[x]$, temos:

$(f+g)(x) = 3x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 6$ (grau 4)

$(f \cdot g)(x) = x^7 + 2x^6 + 4x^5 + 2x^4 + x + 3$ (grau 7).

Fonte: dos autores

O estudante E5 não obteve o resultado de acordo com a solução esperada, pois errou na aplicação da propriedade distributiva, isso demonstra dificuldade na manipulação simbólica. O mesmo relata que "*tive dificuldade para lembra em como ficam os polinômios em $Z_5[x]$*" (registro do estudante E5, SIC).

Como no agrupamento anterior os estudantes realizaram as operações como propostas no ensino de polinômios no decorrer da Educação Básica, mas buscaram uma associação com os conteúdos estudados na disciplina de Estruturas Algébricas.

Entendemos que mesmo resolvendo e aplicando as operações com números reais é possível converter o resultado obtido para o conjunto $Z_5[x]$ e obter a solução esperada.

De acordo com Tall (2008) inferimos que os estudantes ainda não possuem experiências prévias baseadas nas *set-befores* e *met-befores* que os auxiliem na resolução, levando a categorizá-los no mundo *conceitual corporificado*, o qual exerce uma ação de percepção e observação dos objetos matemáticos.

Entretanto no grupo dois, baseado em De Lange (1999) os estudantes estão em um processo de *identificação* e *esquematização* do contexto matemático envolvido na questão, mostrando que desenvolvem esse tipo de questão com base na *conecção* do conhecimento adquirido na Educação Básica com o desenvolvido na Educação Superior.

CONSIDERAÇÕES

Retomando a questão investigada "Que *set-befores* e *met-befores* estão envolvidas em resoluções de atividades sobre anéis de polinômios?", inferimos que os estudantes que desenvolveram a proposta de tarefas transitam segundo Tall (2004, 2008) no mundo *conceitual corporificado*, porém com base em De Lange (1999), podemos classificar as resoluções em diferentes níveis de pensamento quanto ao domínio da matemática. Além disso, em todos os casos os estudantes recorreram às experiências vivenciadas na sua formação na Educação Básica como forma prioritária para a resolução da atividade, havendo somente no grupo dois casos de associações com o conteúdo tratado no Ensino Superior. Sendo assim, as *set-befores* e *met-befores* envolvidas no processo de resolução são decorrentes dos conteúdos aprendidos em operações com polinômios no conjunto dos números reais.

Com isso identificamos que os mesmos transitam no desenvolvimento do pensamento de modo elementar, porém evidenciamos que os estudantes do grupo dois estão no começo de um processo de transição do PME desenvolvido na Educação Básica para o PMA desenvolvido no Ensino Superior.

REFERÊNCIAS

BOYER, C. B.; MERZBACK, U. C. **História da Matemática**. 2. Ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher LTDA, 2012.

DE LANGE, J. **Mathematics, Insight and Meaning**. Utrecht: OW &OC, 1987.

______. **Framework for classroom assessment in mathematics**. Utrecht: Freudenthal Institute and National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science, 1999.

KIRNEV, D. C. B. D**ificuldades evidenciadas em registros escritos a respeito de demonstrações matemáticas.** Dissertação de mestrado em ensino de ciências e educação matemática. Universidade Estadual de Londrina, 2012.

FIORENTINI, D.; MIGUEL, A; MIORIN, M. A. Contribuições para um repensar... A educação algébrica elementar. **Pro-prosições**, v. 4, n 1, p. 78-91, 1993.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. S. **A formação matemática do professor: licenciatura e prática docente escolar**. Belo Horizonte: Autêntica, p. 22-23, 2005.

TALL, D. O. The Transition to Formal Thinking in: **Mathematics. Mathematics Education Research Journal**, 20 n. 2, p. 5-24, 2008.

______. Thinking through three worlds of mathematics. In: **Proceedings of the 28th conference of PME**, Bergen, Norway, p. 281-288, 2004.

______. Cognitive Growth in Elementary and Advanced Mathematical Thinking. **Plenary Lecture, Conference of the International Group for the Psychology of Learning Mathematics**, Recife, Brazil, v. I, p. 161-175, 1995.

RECEBIDO EM: 05 jun. 2017.
CONCLUÍDO EM: 28 set. 2017.