VIDYA, v. 37, n. 2, p. 383-396, jul./dez., 2017 - Santa Maria, 2017. **ISSN** 2176-4603

MATERIAL PARA O ENSINO DE CÁLCULO DIFERENCIAL: CONTINUIDADE E DIFERENCIABILIDADE

MATERIAL FOR TEACHING DIFFERENTIAL CALCULUS: CONTINUITY AND DIFFERENTIABILITY

SONIA BARBOSA CAMARGO IGLIORI*
MARCIO VIERIA DE ALMEIDA**

RESUMO

A educação matemática alcançou um estágio de desenvolvimento de produção de teorias que, se incorporadas às práticas docentes, podem trazer resultados satisfatórios para a aprendizagem. Quais meios são eficazes para a articulação entre teoria e prática docente? Quais estratégias têm sido utilizadas para que isso ocorra? Os materiais didáticos, em geral, corroboram com a formação de conceitos matemáticos? Este artigo tem como objetivo tratar dessas questões propondo uma forma de se estabelecer essa articulação por meio de construções de materiais, para o ensino. Esse material traz, em sua formatação, marcas da Gênese Documental como um meio de colaborar com a ampliação do conjunto de recursos para a sala de aula e de constructos teóricos de Tall, com vistas ao favorecimento da formação de conceitos matemáticos. Os bons resultados do uso do material vão depender, como em qualquer outro caso, do esquema de utilização pelos docentes.

Palavras-chave: Ensino de Cálculo. Continuidade e Diferenciabilidade. Gênese Documental. Organizador Genérico. Raíz Cognitiva.

ABSTRACT

The mathematical education has reached a stage of development of production of theories that, if incorporated to teacher activities, can bring satisfactory results to learning. Which means are effective to articulate theory and teaching practice? What strategies have been used for this to happen? Do the didactic materials, in general, support the formation of mathematical concepts? This article aims at dealing with these issues, offering a way of establishing this articulation, the one of construction of materials for teaching by means of theories. This material brings in its format, marks of Documental Genesis as a way to collaborate with the expansion of the set of resources in the classroom and the construction of theories of Tall and collaborators in order to improve the formation of mathematical concepts. The good results of using the material will depend, as in any other case, on the plan of how to use the materials by the teachers.

Keywords: *Teaching of Calculus. Continuity and Differentiability. Documental Genesis. Generic Organizers. Cognitive Roots.*

* Doutora em Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. sigliori@pucsp.br.
** Doutor em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. marcioalmei-dasp@gmail.com.

INTRODUÇÃO

A partir de nossa prática docente e de resultados de pesquisas em educação matemática, foi possível detectar dificuldades de aprendizagem acerca dos conceitos de Cálculo Diferencial, por estudantes de cursos da área de exatas. Como professores e pesquisadores do ensino de Cálculo, consideramos que há um distanciamento entre proposições de teorias da educação matemática e propostas para o ensino de Cálculo apresentadas em materiais didáticos, e julgamos ser um entrave para o processo de ensino e aprendizagem dessa disciplina. Nesse contexto e atribuindo importância ao material didático para o ensino iniciamos pesquisa tendo por objetivo diagnosticar formas eficientes de organizar esse material para o ensino, admitimos que uma possibilidade de contribuir com essa situação seria investigar a questão da elaboração de materiais com vistas a estreitar a relação entre teoria e prática. Passamos então a desenvolver pesquisa nessa direção. E levantamos algumas questões: Quais meios são eficazes para a articulação entre teoria e prática docente? Quais estratégias têm sido utilizadas para que isso ocorra? Os materiais didáticos, em geral, corroboram com que os estudantes formem conceitos matemáticos?

A pesquisa que vimos desenvolvendo tem nos mostrado que a produção de materiais embasada em teorias da educação matemática, possivelmente possa ser um viés de respostas aos nossos questionamentos. Até o momento produzimos materiais para o ensino de funções reais de uma variável real, e procedemos com as mesmas orientações do material apresentado neste artigo. Nós aplicamos, em sala de aula de um curso de mestrado em educação matemática, um material que elaboramos voltado ao ensino de limite de sequências reais. Esse material levava em conta dificuldades desses estudantes sobre a definição de limite de uma sequência real. Ressaltamos que essas dificuldades foram apontadas em pesquisas (FISCHBEIN, 1994), como por exemplo: buscar identificar n_0 para um dado épsilon, variando n ao infinito e não sua relação funcional com esse épsilon; admitir que o limite de uma sequência nunca é atingido, apenas os termos da sequência se aproximam dele; e que sequências convergentes são sempre monotônicas.

Os pesquisadores analisaram os conhecimentos prévios dos estudantes (os quais já haviam estudado limite de sequências reais) e identificaram entre eles a existência dessas concepções inadequadas. Após a aula com a utilização do material pôde-se constatar que os estudantes evoluíram em suas imagens e definições conceituais[1] acerca desses conceitos, indicando acerto na abordagem de ensino com a utilização do material elaborado.

Para esse artigo optou-se, por apresentar o material relativo à abordagem dos conceitos de continuidade e diferenciabilidade de funções reais de uma variável real, mesmo sem tê-lo aplicado em sala de aula, por considerar que não seria primordial tê-lo já aplicado, uma vez que na aplicação cada professor terá seu esquema de utilização, que dependerá dos diversos fatores de sua sala de aula e de sua formação. Diante disso, busca-se evidenciar a necessidade de se integrar teoria e prática no campo da educação matemática para que haja efeitos dessa área na evolução da aprendizagem da matemática, especificamente, no ensino e aprendizagem de Cálculo.

A esse respeito, Rasmussen, Marrongelle e Borba ressaltam que “é importante que o corpo de pesquisa em ensino, aprendizagem e entendimento do Cálculo contribua com a prática educacional de estudantes que estão matriculados em cursos de Cálculo a cada ano” (2014, p. 507, tradução nossa).

[1] Esses termos são utilizados no sentido definido em Vinner e Tall (1981), o termo imagem conceitual é utilizado para “descrever a estrutura cognitiva total de um aprendiz que é associada a um conceito, a qual inclui todas as figuras mentais e as propriedades e processos associados” (p. 151, tradução nossa). O termo definição conceitual é utilizado para indicar a forma verbal utilizada pelo aprendiz para especificar um conceito.

Rasmussen, Marrongelle e Borba revelam que, para o ensino e aprendizagem de Cálculo, há quatro padrões de pesquisas: as que buscam identificar e estudar dificuldades e obstáculos cognitivos; as que têm por objetivo investigar os processos pelos quais os estudantes aprendem um conceito particular; as que realizam estudos empíricos, que incluem reflexão sobre os efeitos de inovações curriculares e pedagógicas na aprendizagem de estudantes; e, mais recentemente, as relacionadas à busca de conhecimentos, crenças e práticas de professores. Em relação a esses estudos, os autores ressaltam sobre a necessidade de os pesquisadores da área da educação matemática no ensino superior se engajem no desenvolvimento de projetos de pesquisa abrangentes, com vistas à abordagem de questões relacionadas ao ensino e aprendizagem de Cálculo, quer sejam de natureza teórica ou prática. A produção do material apresentado nesse artigo vai ao encontro dessas recomendações.

Nos estudos de Robert e Speer (2001), é reforçada a urgência da integração entre teoria e prática em estudos relacionados ao ensino de Cálculo, com destaque a duas categorias de pesquisa relacionadas ao ensino e aprendizagem de Cálculo e de Análise. A primeira inclui pesquisas guiadas por teorias, e a segunda, guiadas pela prática. Essa categorização não implica dizer a existência de uma separação, uma vez que Robert e Speer entendem que essas duas abordagens são complementares e que o campo de pesquisa da educação matemática "vai fazer progressos no ensino e na aprendizagem, de maneira eficaz, só se tratar, de forma significativa, com as questões teóricas e pragmáticas simultaneamente" (p. 297, tradução nossa).

Mamona-Downs e Downs (2002) consideram três pontos relativos às abordagens dos conteúdos do ensino superior: (a) uma reclamação dos estudantes de que a matemática é "muito abstrata" e eles "frequentemente carecem, no nível avançado, do sentido da *razão* pela qual a abstração foi feita" (p. 168, tradução nossa, grifo do autor); (b) a questão do rigor, pois na Escola Básica o processo de produção de argumentos não é feito por meio de afirmações matemáticas precisas, como no ensino superior; (c) a diferença que na matemática avançada a conceptualização tende a ser feita após a exposição da definição formal dos objetos. Nesse aspecto, os autores relatam o seguinte sentimento dos estudantes: "Eles sentem que a própria natureza do material ensinado mudou radicalmente e não entendem completamente, por que e como lidar com essa mudança" (p. 98, tradução nossa).

Igliori (2009) reforça diferenças na maneira como a aprendizagem em nível superior, relativamente ao nível básico, é concebida e pontua mudanças na forma como os conteúdos curriculares são tratados, bem como na atitude dos estudantes. Os conteúdos são considerados como objetos de ensino, ou seja, um conjunto de saberes que deverá ser "ensinado" a sujeitos que deverão "aprender". No ensino superior, os conteúdos são objetos de aprendizagem, os quais "deverão ser compartilhados entre professores e estudantes 'sujeitos que estudam'" (p. 11). Em razão da diferença de como os conteúdos são considerados, nota-se uma mudança na atitude dos estudantes, pois eles passam a adquirir maior responsabilidade pelo sucesso (ou insucesso) de sua aprendizagem.

As diferenças indicadas entre abordagens da matemática no ensino básico e superior, além da necessidade de coordenar aspectos teóricos e práticos nas investigações para o ensino, levam a inserir entre os objetos de pesquisa da educação matemática a elaboração de materiais para o ensino que sejam respaldados em constructos teóricos e que levem em consideração a transição entre a matemática básica e a matemática superior.

Com base nos elementos apresentados nesta seção, considera-se que as teorias podem chegar às práticas de sala de aula por meio de materiais elaborados para o ensino e norteados por essas teorias. No caso desse artigo, o material teve seu processo de produção fundamentado em elementos da Gênese Documental, proposta por Gueudet e Trouche (2009), bem como em indicações teóricas que favorecem a aprendizagem, desenvolvidas por David Tall e seus associados.

REFERÊNCIAS TEÓRICAS DO MATERIAL

Nesta seção, serão apresentadas as teorias que fundamentaram a elaboração do material apresentado nesse artigo. A Gênese Documental tem suas bases na documentação produzida por professores para a preparação de suas aulas. Para Gueudet e Trouche (2009), essa documentação está no cerne tanto das atividades quanto do desenvolvimento profissional do professor. O trabalho de documentação, definido por eles, constitui-se em: buscar por novos recursos, selecionar e criar tarefas matemáticas, planejar sequências nas quais as atividades serão desenvolvidas, gerenciar o tempo e a administração dos artefatos disponíveis.

No âmbito dessa teoria são definidos dois termos: recurso e documento. O termo recurso é utilizado para descrever uma variedade de artefatos e outros elementos que podem ser utilizados pelo professor no desenvolvimento de uma aula ou um conjunto de aulas. Um recurso pode ser, por exemplo, um livro texto, uma aplicação produzida num *software* ou uma lista de exercícios a ser resolvida pelos alunos. Um recurso nunca é isolado, ou sejam trata-se de um conjunto de recursos. Enfim, o professor esboça num conjunto de recursos seu trabalho de documentação.

O que se pretende, nesse artigo, é propor que a elaboração de materiais para o ensino de Cálculo seja alvo de pesquisas na área de educação matemática, cujo objetivo é contribuir com a ampliação do repertório de recursos de um professor, bem como com o processo de documentação para a preparação de suas aulas. Isso ocorre porque consideramos que essa ação permitirá o estreitamento da relação entre teoria e prática, constituindo-se em fonte de informações para a criação de novos recursos a serem utilizados pelos professores. Nessa perspectiva, Gueudet e Trouche representam o processo que eles denominam de Gênese Documental pela igualdade indicada em (1),

$$\textit{Documentos} = \textit{Recursos} + \textit{Esquema de utilização} \tag{1}$$

O esquema de utilização é um componente psicológico definido por Vergnaud "como uma organização invariante do comportamento do sujeito para uma classe de situações" (1998, p. 229). O processo de Gênese Documental é indicado pelo seguinte esquema da figura 1.

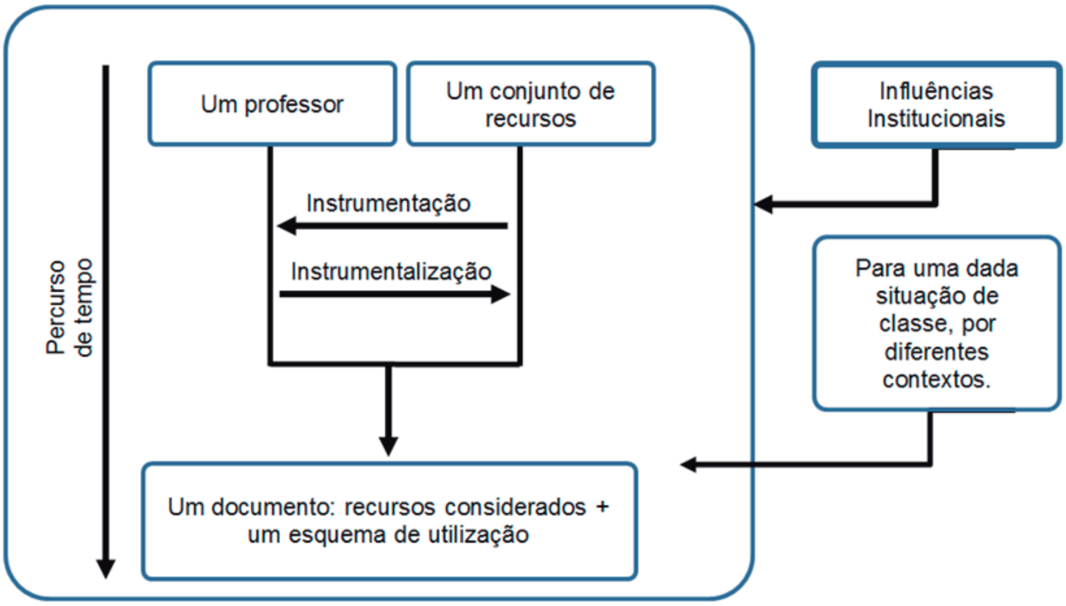
É importante destacar que o material apresentado no artigo não se configura como um documento, o que só poderá ocorrer na conjunção de um recurso a um esquema de utilização de um professor. Ele foi preparado, nas condições de um recurso segundo a Gênese Documental, ou seja, um recurso é algo que o professor usa para sua aula, constituído por três componentes entrelaçados: o componente material; o matemático e o didático.

O componente material é composto por equipamentos, por exemplo, papel, computador, fichários, etc.

As noções matemáticas, as tarefas que as envolvem e técnicas constituem o componente matemático.

No componente didático, devem ser levados em consideração aspectos institucionais e pedagógicos que influenciam no trabalho do professor em sala de aula. Gueudet e Trouche definem que esse componente engloba também "elementos organizacionais que vão desde o mapeamento do ano ao planejamento de uma única sessão de uma hora" (GUEUDET; TROUCHE, 2009, p. 207, tradução nossa).

Figura 1 - Representação esquemática da Gênese Documental.



Fonte: GUEUDET; TROUCHE, 2009, p. 206, tradução nossa.

São esses três tipos de componentes que formatam o material que estamos produzindo. Conforme a teoria em que nos embasamos, um recurso acompanhado de um esquema de utilização é o que sustenta a ação do docente em sala de aula, por essa razão pretendemos que os materiais que produzimos possam compor o conjunto de recursos de um professor quando prepara um documento para suas aulas de Cálculo. Os constructos teóricos de Tall referentes à noção de organizador genérico e raiz cognitiva foram tomados como elementos do componente didático.

O organizador genérico é definido como “um ambiente (ou micromundo) que permite ao aprendiz manipular exemplos e, se possível, contraexemplos de um conceito matemático específico, ou de um sistema de conceitos relacionados” (TALL, 2000, p. 10, tradução nossa). O termo “genérico” foi utilizado para denotar que a atenção do aluno é dirigida a determinados aspectos dos exemplos considerados, devendo esses aspectos incorporarem elementos do conceito abstrato, objetivado pelo professor/pesquisador. Possíveis exemplos de organizadores genéricos são: o material Cuisenaire e os Blocos de Dienes.

Outro exemplo de um organizador genérico é uma aplicação desenvolvida em um *software* que dá retorno imediato às alterações realizadas pelo usuário. Considerando as funcionalidades disponíveis no GeoGebra, determinada aplicação nele construída pode ser um organizador genérico. Contudo, essa aplicação deve levar em conta a seleção de uma ideia importante e essencial, que será o foco da atenção do estudante. Essa ideia não é necessariamente o alvo do estudo realizado naquele momento, porém ela auxilia o sujeito a desenvolver intuições apropriadas ao desenvolvimento teórico, pois, segundo Tall:

> [...] um organizador genérico está devidamente projetado e o agente de organização atua de forma eficaz, a compreensão intuitiva das ideias oferecidas pelo organizador pode fornecer uma base sólida para o desenvolvimento posterior da teoria formal. Isso pode depender muito da ação do agente organizador que tenta garantir que as

propriedades não-genéricas do organizador não atuem como distratores e causem obstáculos (TALL, 1986, p. 85, tradução nossa).

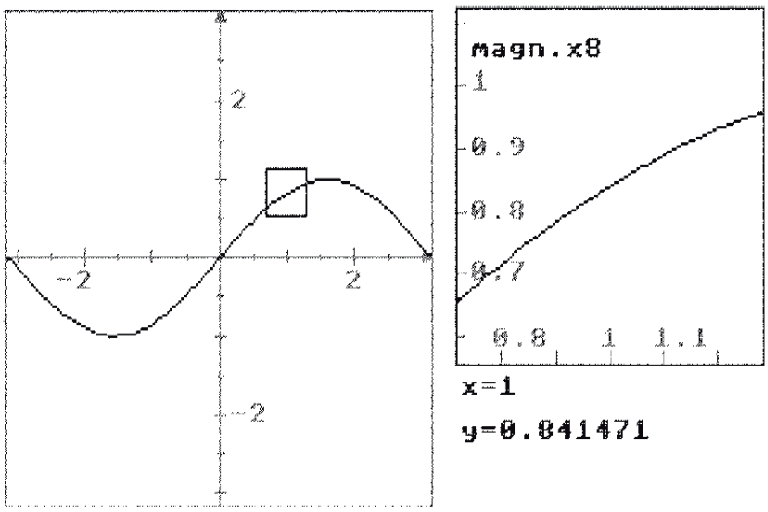
Denomina-se raiz cognitiva qualquer conceito ou noção que pode ser utilizado no desenvolvimento de um organizador genérico, ou seja, ela é "uma unidade cognitiva que é (potencialmente) significativa ao estudante naquele momento, no entanto deve conter sementes de uma expansão cognitiva para definições formais e desenvolvimento teórico futuro" (TALL, 2000, p. 11, tradução nossa).

No material apresentado nesse trabalho, a raiz cognitiva utilizada é a noção de retidão local, definida do seguinte modo: diz que uma função possui retidão local se sua representação gráfica se assemelha a uma linha reta nas vizinhanças de um ponto para um determinado grau de ampliação dessa vizinhança. Essa noção pode ser verificada assim:

> [...] faço um *zoom* no gráfico e observo uma parte desse zoom, em seguida amplio essa parte e observo que ela vai ficando cada vez menos curvada até que em certo grau de ampliação essa parte se assemelha a um segmento de reta. Um gráfico com essa propriedade é dito ser localmente reto (TALL, 2013, p. 299, tradução nossa adaptado).

Em um ambiente computacional, Tall elaborou o organizador genérico *Magnify*, que "permite ao usuário focar sua atenção ao gráfico e traçar uma parte ampliada dele numa segunda janela" (TALL, 2000, p. 11, tradução nossa). Na Figura 2, é utilizado o *Magnify* para o estudo da função real dada pela seguinte sentença $g(x) = \text{sen}\, x$:

Figura 2 - Verificação da retidão local do gráfico de uma função.



Fonte: TALL, 2000, p. 12.

UM MATERIAL PARA O ENSINO DE CÁLCULO

Nesta seção, é apresentado um material elaborado para ser utilizado em sala de aula, em cursos da área de Exatas, referente à abordagem e relação entre os conceitos de continuidade e diferenciabilidade de funções reais de uma variável real. A metodologia utilizada teve por base a estruturação de um recurso, conforme a Gênese Documental, em componentes. Nessa perspectiva, buscou-se identificar os três componentes das atividades elaboradas: o componente matemático, o material e o didático, bem como o papel de cada um deles no desenvolvimento do material de ensino. Na sequência, serão apresentados esses componentes e evidenciadas suas potencialidades na construção das atividades, assim como do material.

O componente matemático, como poderia se esperar, trata dos conceitos matemáticos a serem abordados acerca da continuidade e a diferenciabilidade de uma função real de uma variável real. O teorema que os relaciona desempenha um papel crucial, sendo ele: "Se uma função $f\colon[a,b]\subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em $x_0 \in (a,b)$ então *f* é contínua em x_0.

Esse teorema estabelece uma condição de suficiência entre a continuidade e a diferenciabilidade. No entanto, como se sabe existem funções contínuas não diferenciáveis, ou seja, não é necessário que uma função seja diferenciável para ser contínua. É esse o ponto tratado no material apresentado nesse artigo.

É fato que, em geral, na exploração dessas relações, poucos exemplos são apresentados. O mais comum, por isso um exemplo clássico, é o da função modular $h(x) = | x |$, função essa contínua no ponto $x = 0$, mas não diferenciável nesse ponto.

Tall chama atenção sobre o cuidado que se deve ter na escolha de exemplos, ele diz que, em um "curso introdutório de Cálculo, geralmente focam-se em funções regulares dadas por uma combinação de funções usuais. Isso necessariamente dá a impressão de que funções são geralmente diferenciáveis, configurando um "met-before"[2] para ideias posteriores da matemática avançada" (2013, p. 314).

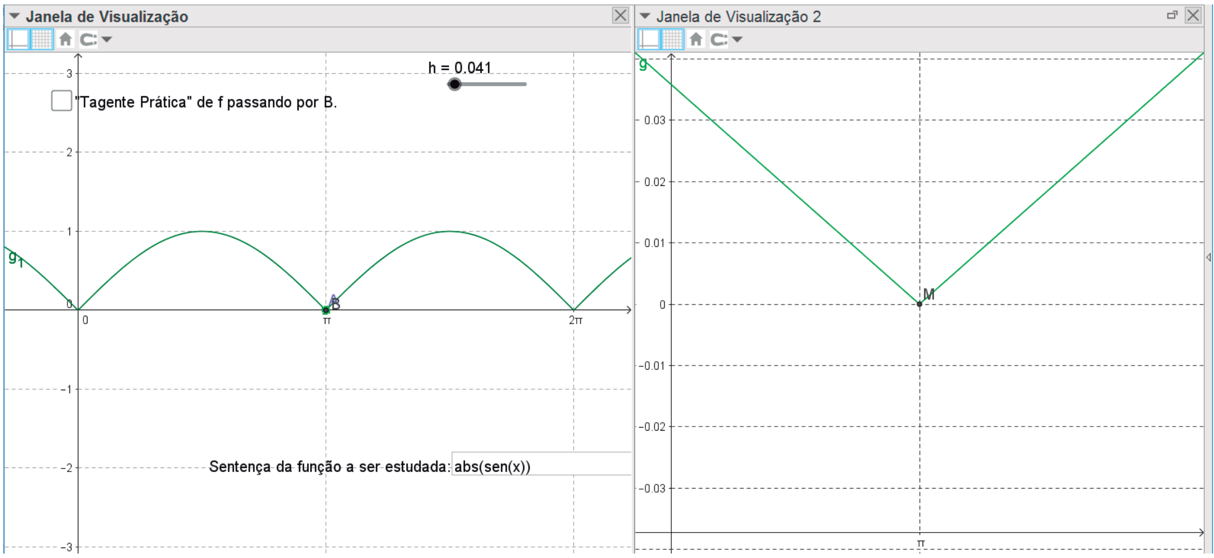
Como Tall, achamos importante tomar como diretriz a inserção no componente didático, outros exemplos mais complexos, o caso de uma função contínua e não diferenciável em todos os pontos de seu domínio.

Além do cuidado de escolha dos exemplos, inserimos também nesse componente a abordagem corporificada da noção de retidão local, que também foi proposta por Tall. Essa abordagem implica elaborar um meio de decisão sobre a diferenciabilidade de uma função a partir da retidão local. Para esse autor, é possível estabelecer a não diferenciabilidade de uma função em um dado ponto a partir do estudo da retidão local, nas vizinhanças desse ponto. Isto é uma função é não diferenciável em um ponto quando sua representação gráfica, nas vizinhanças desse ponto, não se assemelhar a uma reta, qualquer que seja o grau de ampliação desse gráfico. Vejamos um exemplo: a função $h(x) = \left| sen(x) \right|$. Observando seu gráfico, tendo por base a retidão local, pode-se concluir que *h* não é diferenciável nos pontos , qualquer que seja o número inteiro.

A Figura 3 mostra o gráfico de *h*, na Janela de Visualização, bem como uma ampliação desse gráfico em uma vizinhança de , na Janela de Visualização 2.

[2] O termo *met-before* refere-se a determinados aspectos do pensamento que foram encontrados em ocasiões anteriores e agora fazem parte da maneira pela qual o sujeito pensa, possivelmente, afetando a maneira pela qual novas ideias são desenvolvidas.

Figura 3 - Representação gráfica da função *h* e uma vizinhança de $x = \pi$ ampliada.



Fonte: Produção nossa.

O estudo da função *h*, uma função não diferenciável em um número infinito de pontos de seu domínio, favorece o levantamento da conjectura: Existe uma função contínua para qual sua representação gráfica não satisfaça a retidão local em qualquer ponto de seu domínio? Ou, falando de outra maneira, a exemplo da função *h,* existe uma função contínua em que seu gráfico nunca se assemelha, localmente, a um segmento de reta, para qualquer que seja o grau de ampliação dessa parte do gráfico?

Esperar a existência de uma tal função não é compatível com a noção de continuidade. Foi essa a análise feita para propor a construção do gráfico da função manjar branco, como uma atividade motivadora para ampliar a análise da relação continuidade/diferenciabilidade e favorecer estudos mais avançados.

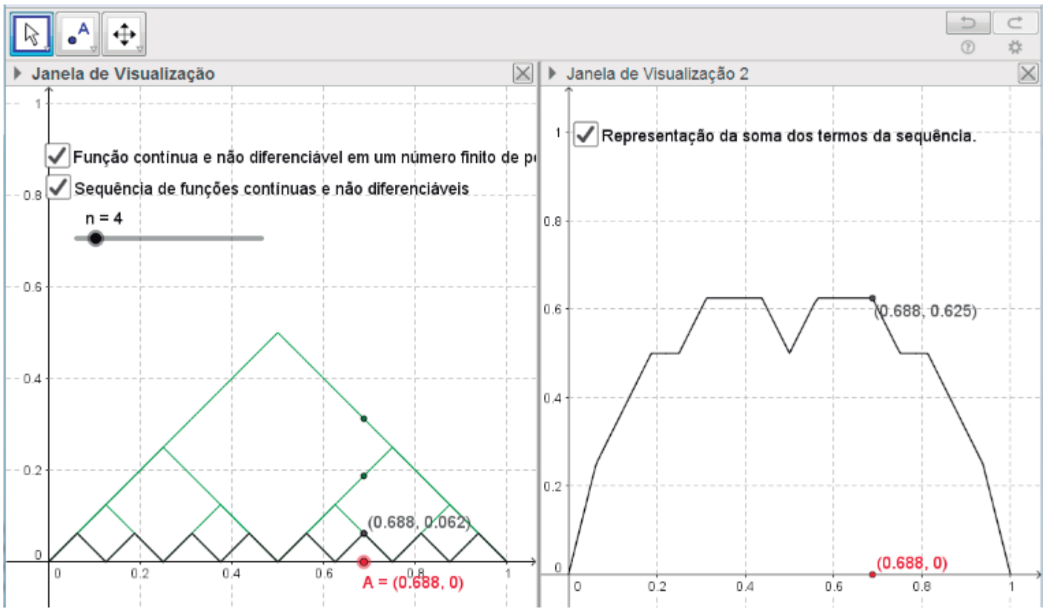
O terceiro e último componente, o componente material, é aquele que fornece os elementos para a construção das atividades (o material para o ensino), trata-se de uma aplicação desenvolvida no *software* GeoGebra, que permite construir termos de uma sequência de funções cujo limite é a função manjar branco e as somas parciais dessa sequência.. Essa aplicação foi elaborada nessa pesquisa e foi por nós denominada “ManjarBrancoG”. A função, manjar branco, *b* é definida assim:

$$b(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) \tag{2}$$

sendo $f_n(x) = \dfrac{1}{2^{n-1}} f(2^{n-1} \cdot x)$ e $f(x) = d(x, \mathbb{Z})$[3]. Essa função *d* associa a cada *x* da reta real o módulo da distância entre *x* e o inteiro “mais próximo” de *x*. Por exemplo, $d(0{,}1, \mathbb{Z}) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$. É fácil verificar que para qualquer que seja *x* real, $0 \leq d(x, \mathbb{Z}) < 1$. A Figura 4 apresenta uma implementação da “Manjar BrancoG” para $n = 4$

[3] $d(x, \mathbb{Z}) = inf\ \{|x - z|$, para z um inteiro$\}$.

Figura 4 - Aplicação “ManjarBrancoG”.



Fonte: Produção nossa.

Na Figura 4, é possível observar duas janelas: a de Visualização (à esquerda) e a de Visualização 2 (à direita). Na Janela de Visualização, há um controle deslizante *n*, com a definição de variação de 1 a 30, visualizado em $n = 4$, e duas caixas para exibir/esconder objetos. A primeira caixa é nomeada “Função contínua e não diferenciável em um número finito de pontos” que apresenta, na Figura 4, o gráfico dos 4 primeiros termos da série de funções que converge para a função *b*. Na Janela de Visualização 2, há uma caixa para exibir/esconder objetos, denominada “Representação da soma dos termos da sequência de funções” que apresenta o gráfico da soma das funções da Janela de Visualização.

Há, na Janela de Visualização, no eixo *x,* um ponto denominado A, que impõe dependência a pontos nas duas Janelas de Visualização. Na Janela de Visualização, apresentada na Figura 4, estão destacados alguns desses pontos, os quais têm, como abscissa x_A a abscissa do ponto A, e como ordenada os valores de $f_i(x_A)$, $i = 1, 2, 3$ e 4, sendo 4 o valor fixado no controle deslizante *n*. Na Janela de Visualização 2, estão dois pontos: um no eixo *x*, que possui os mesmos valores de abscissa e ordenada do ponto A; e outro que tem abscissa do ponto A e ordenada . Os pontos indicados nas duas Janelas foram concebidos com vistas a possibilitar ao usuário a análise de “bicos” dos gráficos das funções envolvidas.

Com a definição dos três componentes da Gênese, elaborou-se um conjunto de cinco atividades que compõem o material de ensino que é objeto desse artigo.

No Quadro 1, é apresentado esse conjunto de atividades que trata do estudo passo a passo da função manjar branco. Nas duas primeiras atividades, objetiva-se identificar pontos nos quais a função f_3, terceiro termo da série cujo limite *b* é a função manjar branco, não seja diferenciável. E ainda conjecturar o que acontece, com a quantidade de pontos de f_i em que ela não seja diferenciável, na medida em que o *i* aumenta.

Com as atividades três e quatro, pretende-se estudar uma soma parcial da série de funções, cujo limite é a função *b*, a função manjar branco, e os pontos nos quais essa soma parcial não seja diferenciável.

Por fim, com a quinta atividade, tem-se por finalidade estimar uma "possível aparência" da função manjar branco, feita pelo GeoGebra.

Quadro 1 - Atividades propostas com a "ManjarBrancoG".

Neste conjunto de atividades, será mobilizado o estudo da função "manjar branco", isto é, a função *b* definida em [0,1] e assumindo valores no conjunto dos números reais. Essa função é definida como:

$$b(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$$

sendo f_i: $[0, 1] \to \mathbb{R}$, definida por $f_i(x) = \frac{1}{2^{i-1}} f(2^{i-1} \cdot x)$, $i = 1, 2.$ e $f(x) = d(x, \mathbb{Z})$.
Propõe-se:

1) Selecionando-se apenas a opção "Função contínua e não diferenciável em um número finito de pontos" e utilizando o *mouse*, faça o seguinte:

a) Mova o controle deslizante *n* para 3, observe o gráfico e responda: para quais valores do domínio a função f_3 não é diferenciável?
(Resposta esperada: 0,125; 0,25; 0,375; 0,5; 0,625; 0,75; 0,875) ____

____

b) Movimente o controle deslizante, para outros valores e conjecture o que acontece com a quantidade de valores do domínio de f_i, para qualquer *i*, para os quais a f_i não seja diferenciável?
(Resposta esperada: A quantidade de valores nos quais a função fi não é diferenciável aumenta à medida que n aumenta) _____

____

2) Selecionando-se apenas a opção "Sequência de funções contínuas e não diferenciáveis", serão exibidos, na Janela de Visualização, *n* funções que são contínuas e não diferenciáveis. Movimente o ponto A, perceba que aparece um conjunto de pontos sobre os gráficos das f_i que têm a mesma abscissa de A.

a) Movimente o controle deslizante para o valor $n = 4$ e posicione o ponto A em $x = 0,5$. E analise o comportamento das f_i, $i = 1, 2, 3, 4$, quanto à diferenciabilidade nesse ponto.
(Resposta esperada: As funções f_i para i = 1,2,3,4 não são diferenciáveis em $x = 0,5$.) ______________________________

____

b) Repita o processo do item anterior, porém alterando o ponto A para $x = 0,625$, e analise o comportamento das f_i, $i = 1, 2, 3, 4$, quanto à diferenciabilidade nesse ponto.
(Resposta esperada: Existem duas funções que são diferenciáveis e $x = 0,625$ e outras duas que não são diferenciáveis nesse ponto.)____

c) Repita o processo do item a), porém alterando o ponto A para $x = 0,875$, e analise o comportamento das f_i, i = 1, 2, 3, 4, quanto à diferenciabilidade nesse ponto.
(Resposta esperada: Existem duas funções que são diferenciáveis em $x = 0,875$ e outras duas que não são diferenciáveis nesse ponto.)____

d) Conjecture o seguinte: se calcularmos $f_1 + f_2 + f_3 + f_4$, podemos afirmar que a função resultante será diferenciável em $x = 0,5$? E em $x = 0,625$? E em $x = 0,875$?
(Resposta pessoal)____

3) Selecione a opção "Representação da soma dos termos da sequência de funções' e observe o gráfico da função que surge na Janela de Visualização 2. Nessa Janela tem um ponto que não permite que seja movimentado, porém ele é dependente do ponto A da Janela de Visualização. Responda às seguintes questões:

a) A função que é representada na Janela de Visualização 2 é diferenciável em $x = 0,5$?
(Resposta esperada: Não é diferenciável.)____
b) E em $x = 0,625$?
(Resposta esperada: É diferenciável.)____
c) E em $x = 0,875$?
(Resposta esperada: É diferenciável.)____

4) Com todas as opções disponíveis selecionadas, observe todas as representações que aparecem nas duas Janelas.

a) Preencha a tabela de acordo com o que é observado.

Valor de "n"	Quantidades de "bicos" que aparecem na representação gráfica da função, apresentada na Janela de Visualização	Quantidades de "bicos" que aparecem na representação gráfica da função, apresentada na Janela de Visualização 2
1	(Resposta esperada - 1)	(Resposta esperada - 1)
2	(Resposta esperada - 3)	(Resposta esperada - 2)
3	(Resposta esperada - 7)	(Resposta esperada - 5)
4	(Resposta esperada - 15)	(Resposta esperada - 11)

b) Se fizemos *n* tender a infinito, conjecture o que acontece com a quantidade de valores nos quais a função, representada na Janela de Visualização 2, não seja diferenciável?
(Resposta esperada: A quantidade de valores nos quais a função não é diferenciável tende ao infinito.) ______________
____

5) Movimente controle deslizante para $n = 30$, espere um pouco, essa é a representação máxima que o *software* suporta da sequência de funções, cujo limite é uma função contínua e não diferenciável. O *software* tem uma restrição, ou seja, fica muito instável para essa quantidade de termos e não conseguimos utilizar a ferramenta zoom para observar com detalhes essa representação gráfica da função.

Fonte: Elaboração nossa.

O repositório digital no qual as atividades produzidas serão disponibilizadas é o *WordPress*. Esse ambiente é um local, não só de um repositório dos cenários de aprendizagem que podem incluir vídeos, *podcasts*, objetos de aprendizagem, micromundos, etc., como também um ambiente aberto e permanente de orientações, subsidiadas por textos e pesquisas no contexto da educação matemática.

O *WordPress* pode estabelecer a relação de pesquisadores com professores de Cálculo pelo fato de esse ambiente favorecer a divulgação das atividades e propiciar aos professores usuários não só a utilização dessas atividades em sua prática profissional, mas também a coautoria em um diálogo com os pesquisadores envolvidos, sugerindo reformulação, atualização e/ou ampliação por meio de ferramentas de *feedback* disponíveis no *WordPress*. Um exemplo de ferramenta de *feedback* é um comentário feito por um professor que utilizou o material produzido e disponibilizado. O ambiente possibilita a inclusão de relatos de experiências entre seus usuários, permitindo o desenvolvimento e aprimoramento contínuo da prática docente em matemática com o uso de recursos tecnológicos. A utilização do ambiente *WordPress* facilita a divulgação de conteúdo didático-pedagógico, bem como a indexação em ferramentas de busca da Internet, como o Google, além da possibilidade de integração com outras tecnologias.

Esse procedimento de pesquisa segue orientação qualitativa, uma vez que os pesquisadores estão interessados no processo de cooperação com professores em sala de aula. Essa orientação metodológica é indicada por Rogers (2003), quando apresenta um modelo de inovação-decisão em que esquematiza o processo pelo qual o indivíduo passa do conhecimento mais geral sobre a inovação, aprofundando esse conhecimento, formando uma opinião ou uma atitude a seu respeito, até chegar à decisão de adotá-la ou rejeitá-la para, enfim, no caso de adoção, trabalhar com a implementação e confirmar essa decisão.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesse trabalho, foi apresentado um material com vistas a trazer, aos professores de Cálculo, elementos para explorar a relação entre continuidade e diferenciabilidade, com embasamento teórico para tal. A organização desse material foi feita por meio da noção de recurso apresentada por Gueudet e Trouche (2009), bem como constructos teóricos desenvolvidos por Tall (2013).

O material apresentado envolve conceitos matemáticos que, com mais frequência, são apresentados em cursos de Análise. Tall defende que, com o auxílio do computador, é possível apresentar ideias complexas como, por exemplo, no Cálculo, sem ter de se seguir uma sequência de conteúdos do simples para o mais complexo. Para o autor:

> [...] o computador oferece novas possibilidades. Ao invés de construir do simples para o complexo, é possível construir, com determinado *software*, ambientes para que o aprendiz possa explorar ideias mais complexas desde o princípio. Essa forma de aprendizagem envolve a negociação de significados de conceitos matemáticos modelados pelo computador nos quais a organização do currículo e o papel do professor é crucial (TALL, 1989, p. 37, tradução nossa).

Com base na proposta desse pesquisador inglês, é possível utilizar essas ideias avançadas para a apresentação do exemplo de uma função contínua e não diferenciável em todos os pontos do domínio, mesmo em um curso de Cálculo, sendo que essas ideias podem ser formalizadas posteriormente, por meio de provas. As explorações feitas, no conjunto de atividades apresentadas no Quadro 1, com a aplicação “ManjarBrancoG”, por si só, não justificam a condição de a função manjar branco ser contínua e não diferenciável em todos os pontos de seu domínio, o que pode ser demonstrado posteriormente, porém a discussão sobre sua existência e os elementos apresentados no artigo podem motivar os alunos e favorecer a compreensão de resultados matemáticos mais complexos que envolvam os conceitos de continuidade e de diferenciabilidade.

A proposta desse artigo, referenciada na Gênese Documental, foi tomar como objeto de pesquisa a elaboração de um material para o ensino de Cálculo, munido de condições que possibilitem sua inserção no repertório de recursos de um professor de Cálculo em cursos da área de Exatas, quando faz suas escolhas para o desenvolvimento da documentação para suas aulas. Com relação especificamente ao material apresentado nesse artigo, declaramos que ele ainda não foi aplicado em sala de aula, porém vivenciamos uma experiência com outro material que elaboramos nesses mesmos moldes, sobre o ensino de conteúdos de Cálculo de funções reais de uma variável real (ALMEIDA, 2017), cujo resultado obtido motivou-nos a continuar essa pesquisa, com a pretensão de melhorar a qualidade dos materiais elaborados, bem como de recursos para documentos. Para tanto, é necessário que os recursos venham atrelados a esquemas de utilização. Essa transformação do material elaborado para recurso e, posteriormente, para documento implica ações práticas do pesquisador na observação de professores.

Essas ações, em nossa pesquisa, estão sendo tratadas por meio da utilização de um espaço desenvolvido num repositório digital, no qual pretendemos inserir os materiais produzidos, dialogar com docentes para a obtenção dos retornos avaliativos desses materiais, de modo a se observar, por meio desse diálogo, os esquemas de sua utilização.

Ademais, quando um material é elaborado com base em teorias da área de educação matemática, espera-se que sua validade seja justificada no que tange ao desenvolvimento da aprendizagem. No caso apresentado nesse artigo, o componente didático foi norteado pelas propostas de Tall que expressam meios de favorecimento da aprendizagem de conceitos do Cálculo. Mas, a qualificação do componente didático por si só não é suficiente, pois vai depender da pertinência da escolha dos elementos do componente material que, nesse caso, foi o *software* GeoGebra, que possui ferramentas e comandos que possibilitaram a construção da aplicação "ManjarBrancoG", considerando-se o conceito de retidão local, foi possível inferir sobre a não diferenciabilidade de uma função.

Esse material traz, em sua formatação, marcas da Gênese Documental como um meio de colaborar com a ampliação do conjunto de recursos para a sala de aula e dos constructos teóricos de Tall, com vistas ao favorecimento da formação de conceitos matemáticos. A expectativa dos autores desse artigo em relação à utilização desse material para o ensino e aprendizagem é de se obter bons resultados, em razão das teorias utilizadas, porém, eles entendem que seu sucesso vai depender, como no caso do uso de qualquer outro recurso, do esquema de utilização. Enfim, é nossa expectativa que materiais para o ensino de conteúdos matemáticos, que têm teorias da educação matemática como base de sua elaboração podem ser meios de estreitar a relação entre teorias e a prática docente, algo necessário e desejado por essa área de conhecimento.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, M. V. **Material para o ensino do cálculo diferencial e integral:** referências de Tall, Gueudet e Trouche. 2017. 261 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2017.

FISCHBEIN, E. The interaction between the formal, the algorithmic and the intuitive components in a mathematical activity. In: BIEHLER, R.; SCHOLZ, R. W.; WINKLEMANN, B. (Eds) **Didactics of Mathematics as a scientific discipline**. Mathematics Education Library. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1994.

GUEUDET, G.; TROUCHE, L. Towards new documentation systems for mathematics teachers? **Educational Studies in Mathematics**, v. 71, n. 3, p. 199-218, 2009.

IGLIORI, S. B. C. Considerações sobre o ensino do cálculo e um estudo sobre os números reais. In: FROTA, M. C. R; NASSER, L. (orgs.). **Educação matemática no ensino superior**: pesquisas e debates. Recife: SBEM, p. 11-26, 2009.

MAMONA-DOWNS, J.; DOWNS, M. Advanced mathematical thinking with a special reference to reflection on mathematical structure. In: ENGLISH, L. D. (ed.). **Handbook of international research in mathematics education**. New Jersey: Lawrence Erlbaum, p. 165-198, 2002.

RASMUSSEN, C.; MARRONGELLE, K.; BORBA, M. C. Research on calculus: what do we know and where do we need to go? **ZDM: Mathematics Education**, v. 46, n. 4, p. 507-515, 2014.

ROBERT, A.; SPEER, N. Research on the teaching and learning of Calculus/Elementary Analsys. In: HOLTON, D. (ed.). **The teaching and learning of mathematics at university level - an ICMI study**, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2001. p. 283-299.

ROGERS, E. M. **Diffusion of Innovations**. 5th ed. New York: Free Press, 2003.

TALL, D. **Building and testing a cognitive approach to the calculus using interactive computer graphics**. 1986. 505 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - University of Warwick, Inglaterra, 1986.

______. Concept images, generic organizers, computers, and curriculum change. **For the Learning of Mathematics**, Canada, v. 3, n. 9, p. 37-42, 1989.

______. Biological brain, mathematical mind & computational computers (how the computer can support mathematical thinking and learning). In: ASIAN TECHNOLOGY CONFERENCE IN MATHEMATICS, 5, 2000, Chiang Mai. **Proceedings**... Blackwood: ATCM Inc, 2000.

______. **How humans learn to think mathematically**: exploring three worlds of mathematics. New York: Cambridge University Press, 2013.

VERGNAUD, G. Toward a cognitive theory of practice. In: SIERPISKA, A; KILPATRICK, J. (Eds.). **Mathematics education as a research domain: a search of identity**. Dordrecht: Kluwer. p. 227-241, 1998.

VINNER, S.; TALL, D. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. **Educational studies in mathematics**, v. 12, n. 2, p. 151-169, 1981.

RECEBIDO EM: 31 mai. 2017.
CONCLUÍDO EM: 02 out. 2017.